ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 2

ΚΥΡΙΑΚΗ, 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+c$$

Α2. i. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

ii. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

γ. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, τότε $f'(x)=\alpha^x$.

δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

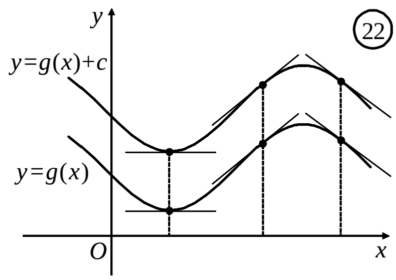
ΛΥΣΗ

Α1. i.

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0\,.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



ii. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

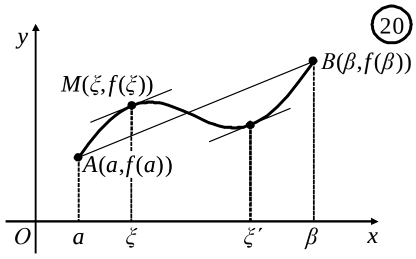
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



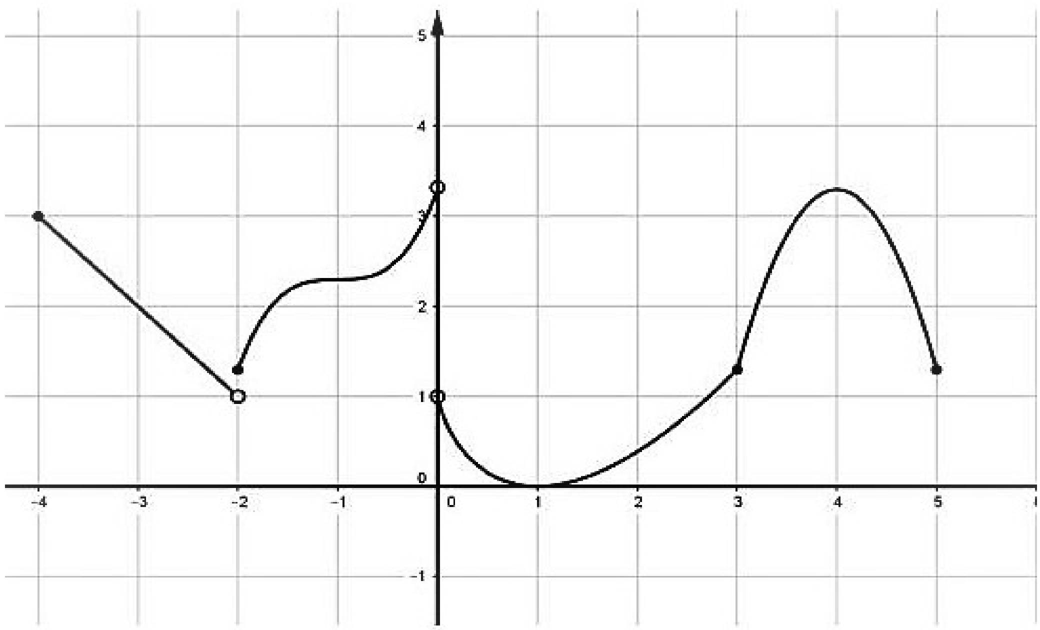
A3.

α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.



Β2. Να βρείτε το όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Β3. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0,\ 5]$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε την παράγωγο της f , όταν $x\in(-4,\ -2)$.

Β4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$\mathrm{I}=\int_{2}^{4}f(x)dx\,,\quad \mathrm{J}=\int_{-1}^{0}f(x)dx\,,$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+1$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog;

ΛΥΣΗ

Β1. Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-4,\ -2),(-2,\ 0),(0,\ 5]$, διότι δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_1=-2$ και δεν ορίζεται στο σημείο $x_2=0$

Β2. i. $\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=1$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

Β3.

i. Τα εσωτερικά σημεία $x_3=1,\ x_4=4,\ x_5=3$ του διαστήματος $(0,\ 5]$ είναι τα ζητούμενα κρίσιμα σημεία. Στα σημεία $A(x_3,\ f(x_3)),\ B(x_4,\ f(x_4))$ υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ και επομένως $f'(x_3)=0$ και $f'(x_4)=0$ άρα οι θέσεις $x_3=1,\ x_4=4$ είναι κρίσιμα σημεία της f. Στο σημείο $\Gamma(x_5,\ f(x_5))$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f και άρα η θέση x_5 είναι επίσης κρίσιμο σημείο της f.

ii. Η παράγωγος της f, όταν $x\in(-4,\ -2)$ είναι ίση με $\varepsilon\varphi 135^0=-1$ ή διαφορετικά είναι ο λόγος $\dfrac{(3-1)}{(-4+2)}=-1$.

Β4. Το Ι ορίζεται, αφού η f ορίζεται στο διάστημα $[2,\ 4]$ και είναι συνεχής σε αυτό Το J δεν ορίζεται αφού η f δεν ορίζεται στο σημείο $x_{\circ}=0$.

Β5.

i. Το πεδίο ορισμού D_{fog} έχουμε:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,g(x)\in[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]\}$$

Είναι:

$g(x)\in[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]$ αν, και μόνο αν, $(-4\le x+1<0$ ή $0<x+1\le 5)$ ή

$x\in[-5,\ -1)\cup(-1,\ 4]$

Επομένως $D_{fog}=[-5,\ -1)\cup(-1,\ 4]$.

ii. Ο τύπος της συνάρτησης fog είναι:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+1),x\in D_{f0g}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της fog είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα αριστερά (οριζόντια μετατόπιση).

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$\mathrm{f(x)=x^3+x+1,\ x\in R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και $\mathrm{f^{-1}}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

i. Ίσχύει: $\mathrm{|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\le|x-y|\le|f(x)-f(y)|}$ για κάθε $\mathrm{x,\ y\in R}$

ii. Η συνάρτηση $\mathrm{f^{-1}}$ είναι συνεχής στο R.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{f^{-1}(\xi)+2\xi=0}.$$

Γ5. Αν για την παράγουσα F της $\mathrm{f'}$ ισχύει:

$$\mathrm{F^2(x)\ge F(x)F(2-x)}\ \text{για κάθε}\ \mathrm{x\in R},$$

να βρείτε τον τύπο της F.

ΛΥΣΗ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1" και επομένως η f αντιστρέφεται.Το σύνολο τιμών της είναι το (A,B), όπου:

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,B=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \text{δηλαδή το}\ \mathbb{R}.$$

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το -1. Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=x$$

Έστω:

$$g(x)=f\left(f(x)\right)-x \text{, τότε είναι } g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Παρατηρώ ότι:

$$g(-1)=f\left(f(-1)\right)+1=f(-1)+1=-1+1=0$$

Άρα το -1 είναι ρίζα της $g(x)$

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x)=f'\left(f(x)\right)f'(x)-1=\left(3\left(x^3+x+1\right)^2+1\right)\left(3x^2+1\right)-1=\left(9x^2+3\right)\left(x^3+x+1\right)^2+3x^2>0$$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1».Επομένως το -1 είναι η μοναδική ρίζα της

$$g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(-1,\ f(-1)\right)$ ή $A(-1,\ -1)$.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος:</u>

Έχουμε:

$f(-1)=-1\Leftrightarrow f^{-1}(-1)=-1$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(f(x))=x.$$

Έστω ότι η $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\ \rho_2$ ($\rho_1<\rho_2$) επομένως και η $f(f(x))=x$ έχει ρίζες τις ρ_1,ρ_2.

Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(f(x))-x,\ x\in\mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[\rho_1,\rho_2]$)

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (ρ_1,ρ_2)) με:

$$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)-1=\left(3f^2(x)+1\right)\cdot(3x^2+1)-1=9f^2(x)\cdot x^2+3f^2(x)+3x^2>0$$

- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$ που είναι άτοπο αφού $g'(x)>0$.

Άρα η $x=-1$ η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x)=f(x)$ και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1,\ f(-1))$ ή $A(-1,\ -1)$.

Γ3. i.

- Για $x=y$ ισχύει η ισότητα:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|=\left|f(x)-f(y)\right|=|x-y|$$

- Για $x<y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x,y]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x,y) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_1\in(x,y)$: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 1$ ($f'(\xi_1)=3\xi_1^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(y)-f(x)\geq y-x \text{ ή } |f(x)-f(y)|\geq|x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=f(y)-f(x)\geq y-x=|y-x|=|x-y| \quad (1)$$

- Για $x>y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[y,x]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[y,x]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (y,x) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_2\in(y,x)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq 1$ ($f'(\xi_2)=3\xi_2^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(x)-f(y)\geq x-y \text{ ή } |f(x)-f(y)|\geq|x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=f(x)-f(y)\geq x-y=|x-y| \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$|x-y|\leq|f(x)-f(y)| \text{ (I) για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Στην σχέση (Ι) θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και y το $f^{-1}(y)$, αφού η (Ι) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right| \leq |x-y| \text{ και τελικά:}$$

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right| \leq |x-y| \leq |f(x)-f(y)|$$

ii.

Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

Έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \leq f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0) \leq |x-x_0|$$

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} |x-x_0| = \lim\limits_{x \to x_0} \left(-|x-x_0|\right) = 0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε και $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right) = 0$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$

Γ4. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = -2\xi \Leftrightarrow \xi = f(-2\xi) \Leftrightarrow f(-2\xi)-\xi = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(-2x)-x,\ x \in \mathbb{R}$$

Ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$).
- $g(0) = f(0)-0 = 1 > 0$
- $g(1) = f(-2)-1 = -9-1 = -10 < 0$

Από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $f^{-1}(\xi)+2\xi = 0$.

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (0, 1)) με:

$$g'(x) = -2f'(-2x)-1 = -2(12x^2+1)-1 = -24x^2-3 < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1», και επομένως το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $f(0)=1$ και $f(-1)=-1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει (και είναι μοναδικό) $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=x_1\in(-1,0)$$

Ακόμα $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)+2x$ στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (άθροισμα συνεχών στο $[0,\ 1]$) και

$$h(0)=f^{-1}(0)=x_1<0\,,\ h(1)=f^{-1}(1)+2=2>0$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)+2\xi=0$$

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα διότι:

Αν $y_1,y_2\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ με $y_1<y_2$.Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

Έστω $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$ με $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$. Άρα $x_1=f^{-1}(y_1),\ x_2=f^{-1}(y_2)$ (*)

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η (*) έχουμε διαδοχικά:

$$y_1<y_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα:

έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2) \\ x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \end{array}\right.$$ και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$f^{-1}(x_1)+2x_1<f^{-1}(x_2)+2x_2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Το ξ είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» .

Γ5. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$F^2(x)\geq F(x)F(2-x) \Leftrightarrow F^2(x)-F(x)F(2-x)\geq 0\ (1)$$

Θέτουμε $g(x)=F^2(x)-F(x)F(2-x),\ x\in\mathbb{R}$ και από την (1) προκύπτει:

$$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1),\ x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημεό του $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμψων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = 2F(x)F'(x) - F'(x)F(2-x) + F(x)F'(2-x), x \in \mathbb{R}$$

Επομένως από το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2F(1)F'(1) - F'(1)F(1) + F(1)F'(1) = 0 \text{ ή}$$

$$2F(1)F'(1) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \ (F'(1) = f'(1) = 3 \neq 0)$$

Άρα είναι:

$$F'(x) = f'(x) \Leftrightarrow F(x) = f(x) + c, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1 \Rightarrow F(1) = f(1) + c \Rightarrow 0 = 3 + c \Rightarrow c = -3$

Επομένως:

$$F(x) = f(x) - 3 = x^3 + x - 2, \ x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = -1$
- $f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \dfrac{1}{x} + x + 1$, για κάθε $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt$$

έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x > 0$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \dfrac{1}{e}, x = 1$.

Δ5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x > 0$

Αν η ευθεία $x=\lambda,\ \lambda>0$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία A_λ και B_λ αντίστοιχα, τότε να βρείτε :

i. την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων (A_λ, B_λ).

ii. τα όρια :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda^2+1} \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda\to0^+}\frac{E(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f'(x)+f(x)+4e^{x-1}=\ln x+\frac{1}{x}+x+1 \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)+4e^{2x-1}=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}+e^x x+e^x \Leftrightarrow$$

$$<=>\left(e^x f(x)+2e^{2x-1}\right)'=\left(e^x\ln x\right)'+\left(xe^x\right)' \Leftrightarrow e^x f(x)+2e^{2x-1}=e^x\ln x+xe^x+c$$

για $x=1$ έχουμε:

$$ef(1)+2e=e\ln1+e+c \Leftrightarrow -e+2e=0+e+c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα:

$$e^x f(x)+2e^{2x-1}=e^x\ln x+xe^x \Leftrightarrow f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}$$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1-2e^{x-1} \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}-2e^{x-1}<0,\ x>0$$

επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα ·

Παρατηρούμε ότι:

$$f'(1)=\frac{1}{1}+1-2e^{1-1}=0$$

Έχουμε:

$$\bullet x>1 \overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$$

$$\bullet x<1 \Rightarrow f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$-$	
$f(x)$	γν.αύξουσα	γν.φθίνουσα	

<u>Μονοτονία</u>

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

<u>Ακρότατα</u>: η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1)=-1

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u> (για τον υπολογισμό του ακροτάτου).

Για κάθε $x>0$ εχουμε:

$$\ln x \le x-1 \text{ (I) και } e^{x-1} \ge x \Leftrightarrow -2e^{x-1} \le -2x \text{ (II)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$\ln x - 2e^{x-1} \le -x-1 \Leftrightarrow \ln x - 2e^{x-1} + x \le -x - x + x \Leftrightarrow f(x) \le -1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1) \text{ για κάθε } x>0.$$

Επομένως η f παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο, το $f(1)=-1$

Δ3 . Είναι:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt \Leftrightarrow f'(x) = \left[f(\ln t) \right]_e^{e^2} = f(2) - f(1)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1 ,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού , υπάρχει $x_0 \in (1,\ 2)$ τέτοιο , ώστε:

$$f'(x_0) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1, 2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Εναλλακτικά:

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = f'(x) + f(1) - f(2)$$

για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

$$\Lambda(1) = f'(1) + f(1) - f(2) = 0 + f(1) - f(2) > 0$$

διότι $1 < 2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) > 0$

$$\Lambda(2) = f'(2) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + 1 - 2e - 1 - \ln 2 - 2 + 2e = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Lambda(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Εναλλακτικά:

<u>3^{ος} τρόπος</u>:

Έστω η συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - x \cdot \left(f(2) - f(1)\right)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- $k(1) = 2f(1) - f(2)$, $k(2) = 2f(1) - f(2)$

από το Θ.Rolle έχουμε :

υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$k'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Δ4.

Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le -1<0$$

Επομένως :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)<0\left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\,\frac{1}{x}>0\,\gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\,x>0\right)$$

$$|h(x)|=\left|\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right|=\frac{1}{x^2}\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right|=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\text{ για κάθε } x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$$

το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\mathrm{E}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|h(x)|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\int_{e}^{1}f(u)du=$$

$$\int_{e}^{1}\left(\ln u+u-2e^{u-1}\right)du=\int_{e}^{1}\left(u\ln u-u+\frac{u^2}{2}-2e^{u-1}\right)'du=\frac{4e^{e-1}-e^2-5}{2}$$

Δ5. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le -1<0$$

i) Η απόσταση των (A_λ,B_λ) είναι:

$$(\mathrm{A}_\lambda\mathrm{B}_\lambda)=|f(\lambda)-g(\lambda)|=|2f(\lambda)|=2|f(\lambda)|=-2f(\lambda)$$

και γράφεται ως συνάρτηση του λ , $d(\lambda)=-2f(\lambda)$

$d'(\lambda)=-2f'(\lambda)$, $d'(\lambda)\ge 0\Leftrightarrow f'(\lambda)\le 0\Leftrightarrow \lambda\ge 1$

λ	0	1	+∞
$d'(\lambda)$	-	+	
$d(\lambda)$	γν.φθίνουσα	γν.αύξουσα	

άρα η ελάχιστη τιμή είναι $d(1)=(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1)=-2f(1)=2$

ii)

$$\mathrm{E}(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda\cdot(-2f(\lambda))=-\lambda\cdot f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to+\infty}-\frac{\lambda(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1})}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1}=$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)=-1\cdot\left(0+1-\infty\right)=+\infty$$

γιατί :

- $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left(\ln\lambda\right)'}{\left(\lambda\right)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$
- $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left(e^{\lambda-1}\right)'}{\left(\lambda\right)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda-1}=+\infty$
- $\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{\lambda^2}=\lim_{\lambda\to+\infty}1=1$

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\mathrm{E}\left(\lambda\right)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to0^+}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}\overset{D.L.H}{=}$$

$$-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}+1-2e^{\lambda-1}}{1-\frac{1}{\lambda^2}}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda+\lambda^2-2\lambda^2e^{\lambda-1}}{\lambda^2-1}=\frac{0+0-0}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, καθηγητής Μαθηματικών