

Γεωμετρία

Α' Λυκείου

Τράπεζα

lisari team



Θεμάτων

Εκφωνήσεις



η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

«B Θέματα»

(Έκδοση: 13 – 03 -2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των συνεργατών του δικτυακού τόπου

<http://lisari.blogspot.gr>

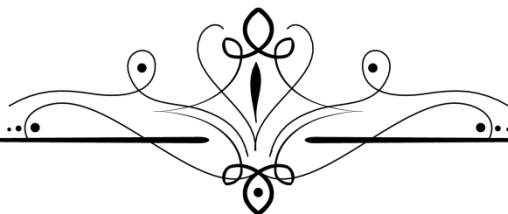
Έκδοση: 13 – 03 – 2015 (συνεχής ανανέωση)

Το βιβλίο διατίθεται αποκλειστικά
από το μαθηματικό blog

<http://lisari.blogspot.gr>

Περιεχόμενα – Β Θέματα

	Σελίδες
• Πρόλογος:	4
• Κεφάλαιο 3ο: Τρίγωνα	7
• Κεφάλαιο 4ο: Παράλληλες ευθείες	33
• Κεφάλαιο 5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία	46
• Κεφάλαιο 6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα	86



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog <http://lisari.blogspot.gr> ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος**. Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΛΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ωθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστερί)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασιθί)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Α.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπος Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων Γεωμετρία Α' τάξης

20 Δεκεμβρίου 2014

Λύτες

Έλεγχος

Συντονιστής

Εξώφυλλο

Επιμελητής

Γιάννης Βελαώρας

Μιχάλης Νάννος

Μάκης

Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Χρήστος Μαρούγκας

Χατζόπουλος

Δημήτρης Δούδης

Ανδρέας
Κουλούρης

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος

Βασίλης Κακαβάς

Θανάσης

Ανδρέας Κουλούρης

Γιάννης Κάκανος

Νικολόπουλος

Σπύρος Καρδαμίτσης

Ανδρέας Κουλούρης

Χρήστος Κουσιέρης

Θόδωρος Παγώνης

Χρήστος Σίσινας

Κώστας Τηλέγραφος

Πάυλος Τρύφων

Σταύρος Χαραλάμπους

Μάκης Χατζόπουλος

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 3ο : Τρίγωνα



ΑΣΚΗΣΗ (2_2814)

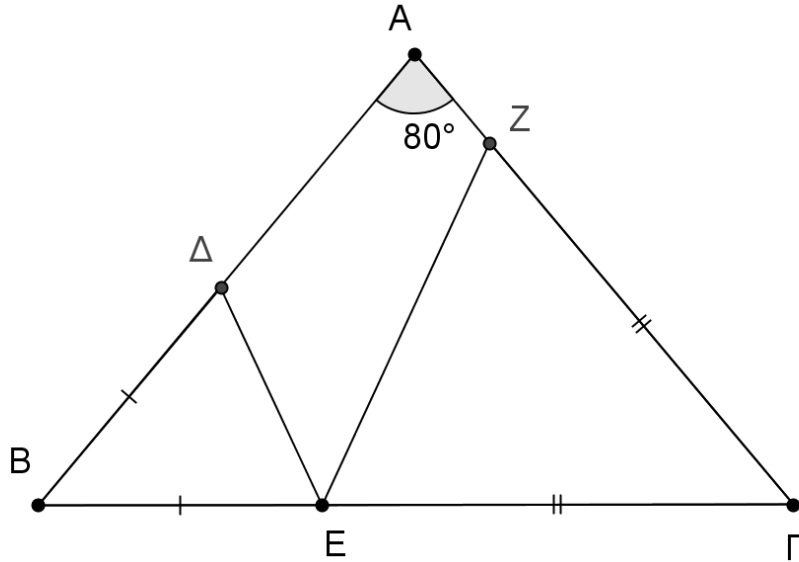
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$) είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α) Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $B\hat{\Delta}E$ και $\Gamma\hat{Z}E$

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2816)

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (K, ρ) φέρνουμε τις τέμνουσες του ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$ ώστε $\Sigma B = \Sigma\Delta$. Τα $K\Lambda$ και KM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ του κύκλου αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $K\hat{B}\Sigma$ και $K\hat{\Delta}\Sigma$ είναι ίσα.

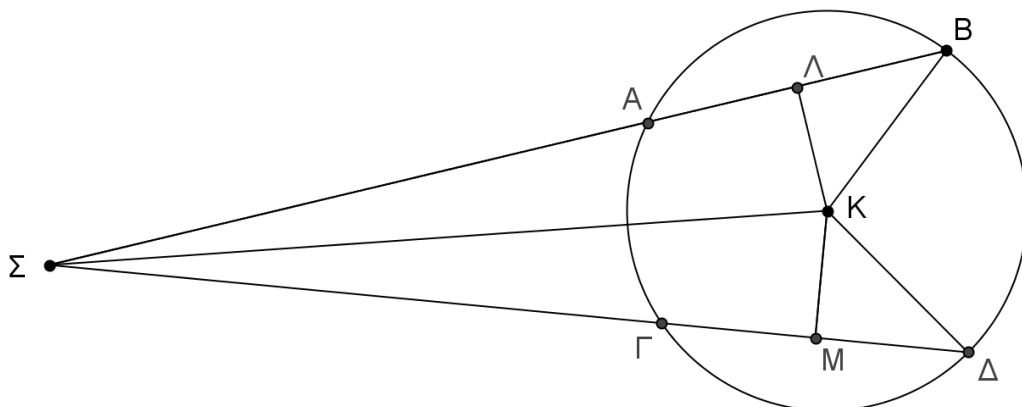
(Μονάδες 10)

ii) $K\Lambda = KM$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2819)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) , Ax η εφαπτομένη σε σημείο A του κύκλου και επιπλέον

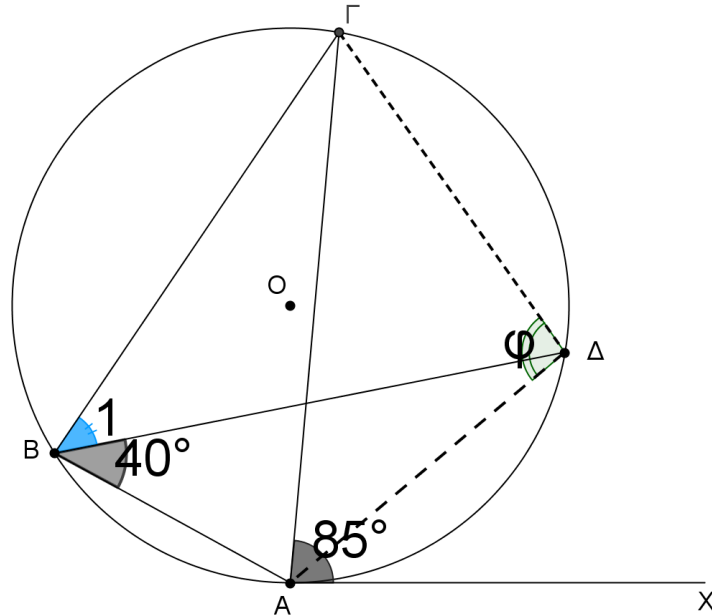
$\widehat{\Gamma \hat{A} x} = 85^\circ$ και $\widehat{\Delta \hat{B} A} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma \hat{B} \Delta} = 45^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Gamma \hat{\Delta} A}$.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2824)

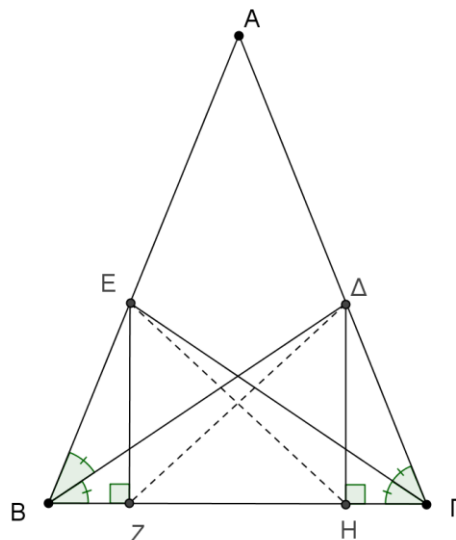
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν ισχύει ότι $E\text{H} \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

α) $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{B}E}$.

(Μονάδες 13)

β) $E\text{H} = \Delta Z$.

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2837)

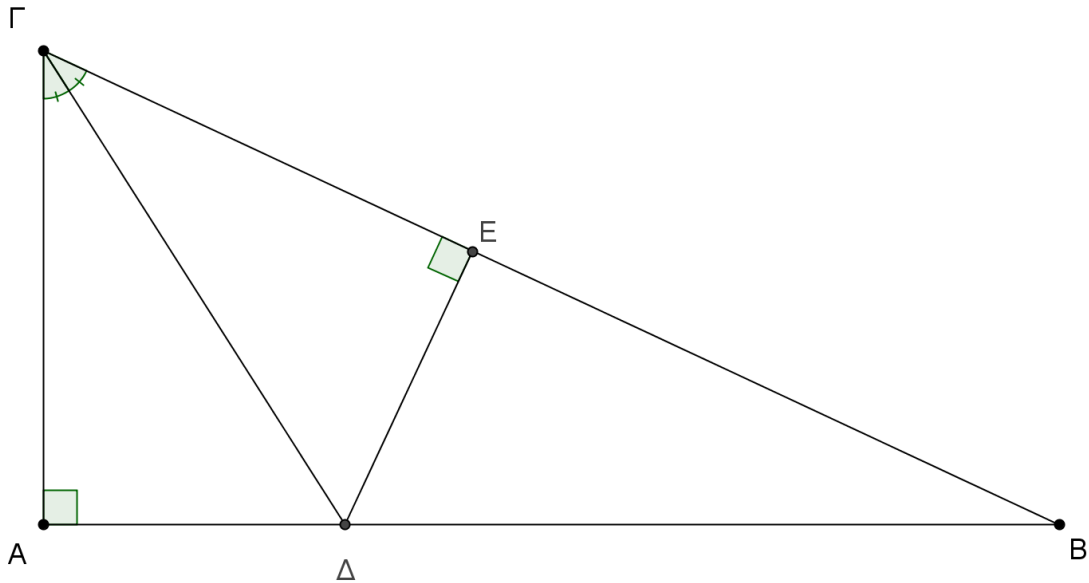
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$

(Μονάδες 13)

β) $A\Delta < \Delta B$

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2839)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

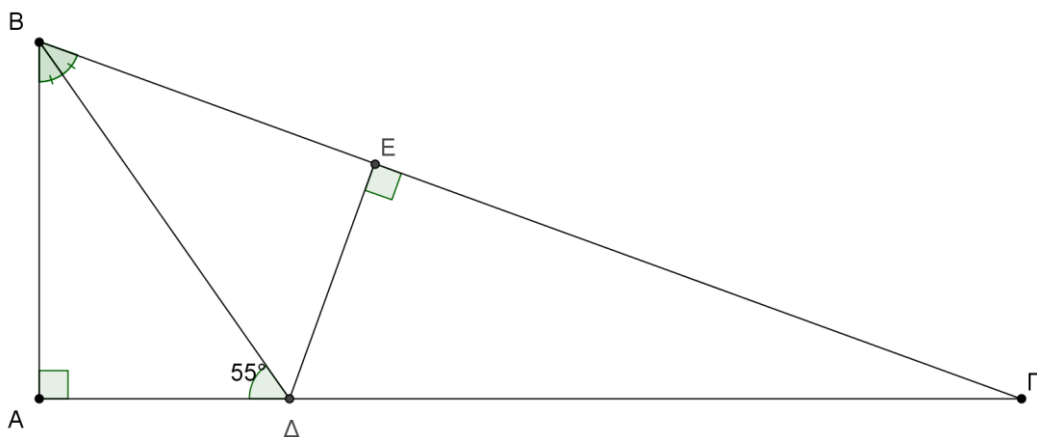
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\hat{\Delta}E$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2845)

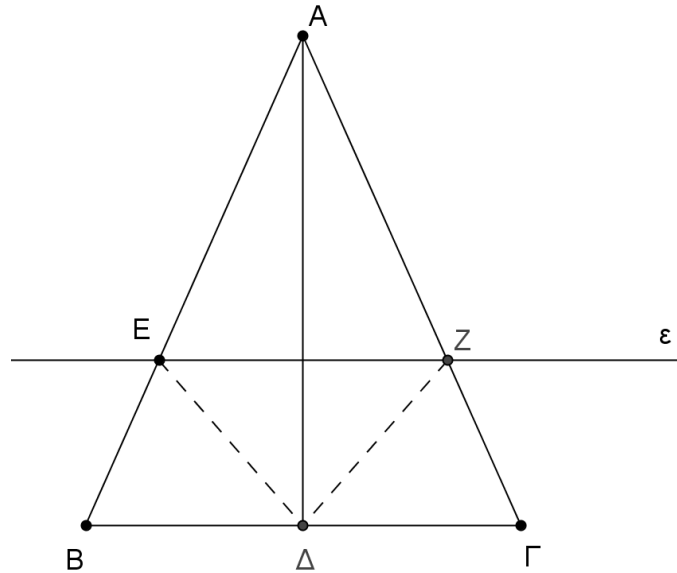
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\hat{A}EZ$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $\hat{A}E\Delta$ και $\hat{A}Z\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2846)

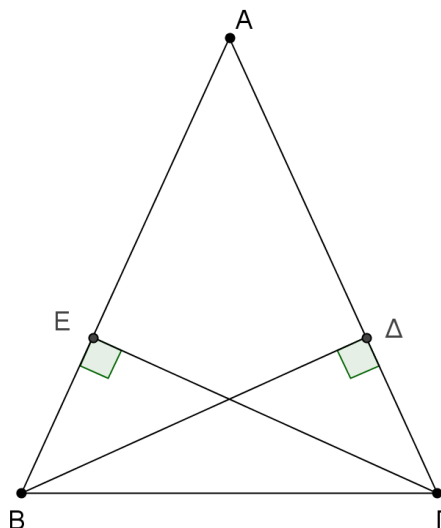
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\hat{B}\Delta\Gamma$ και $\hat{\Gamma}E B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $A\Delta=AE$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2847)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$.
 Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου

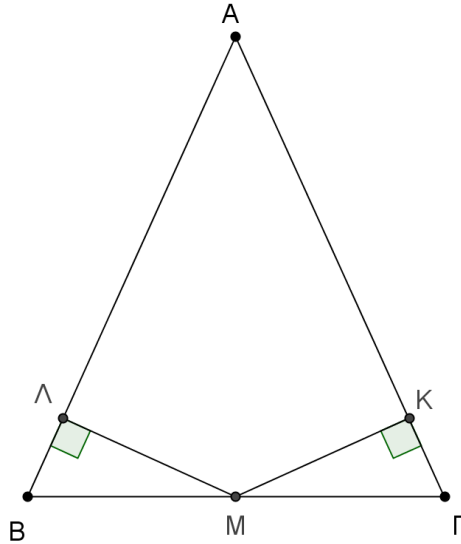
$\hat{A}B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK=ML$.

(Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}M\Lambda$.

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2848)

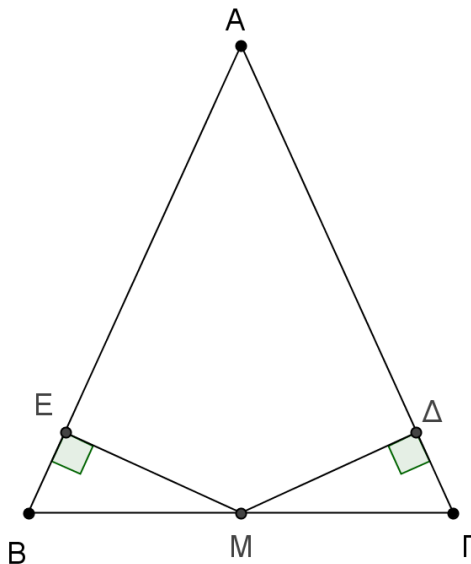
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ με $AB = AG$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Delta=ME$.

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $\hat{A}\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2853)

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\hat{X}\hat{O}\hat{\Psi}$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρος διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Μονάδες 25

ΑΣΚΗΣΗ (2_2854)

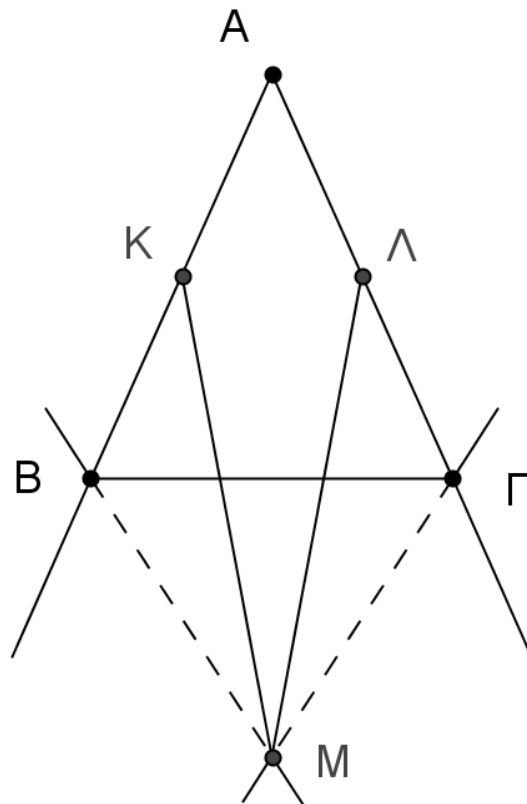
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\hat{\Gamma}$ ($AB=AG$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $MB=MG$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $MK=ML$.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2855)**

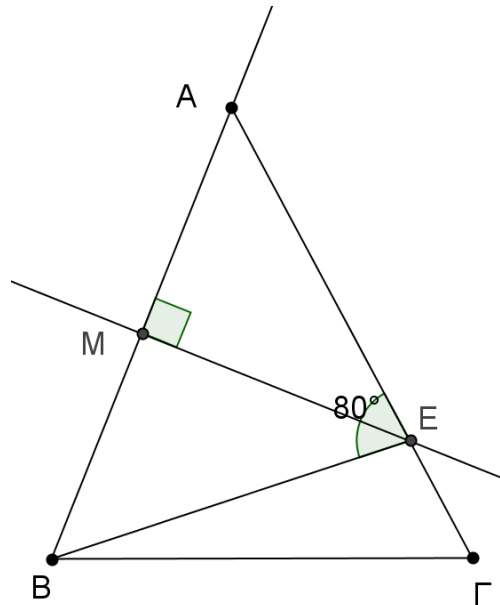
Δίνεται τρίγωνο $A\hat{B}\hat{\Gamma}$ στο οποίο η εξωτερική γωνία \hat{A} είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας \hat{B} .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$.

(Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ.

Αν η γωνία $\hat{A} \Delta B$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\hat{A} B \Gamma$.
(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2860)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.

α) Το τρίγωνο BΙΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Ο γωνίες $\hat{A} \Gamma I$ και $\hat{A} I B$ είναι ίσες.

Μονάδες 10

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος BΓ.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (2_3417)

Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $\hat{A} B \Gamma$ ($AB = AG$) και $\hat{A}' B' \Gamma'$ ($A'B' = A'G'$).

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $\hat{A} B \Gamma$ και $\hat{A}' B' \Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AG = A'G'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $\hat{A} B \Gamma$ και $\hat{A}' B' \Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_3420)

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τα ύψη του BΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3421)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3423)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

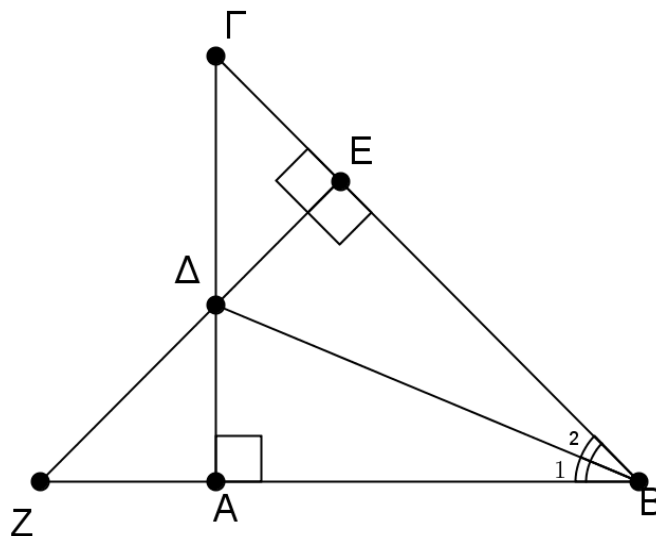
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_3425)

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε ΔΕ = ΑΔ.

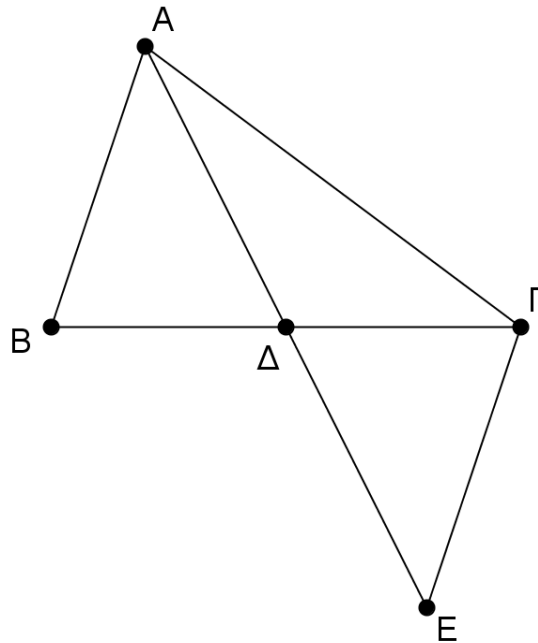
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = GE$

Μονάδες 12

β) $AD < \frac{AB + AG}{2}$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3426)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του Γ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $DE \perp BΓ$.

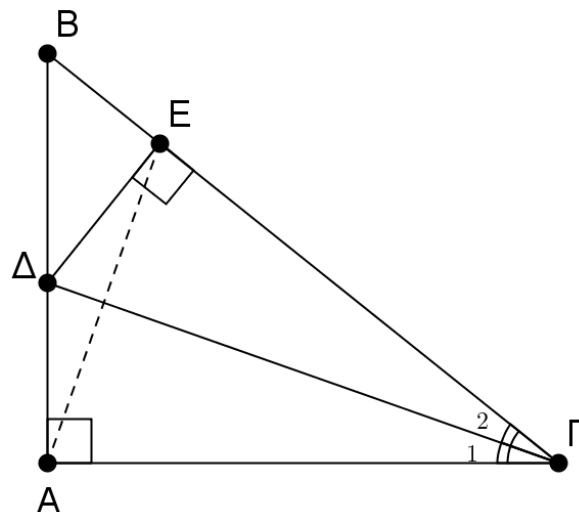
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_4974)

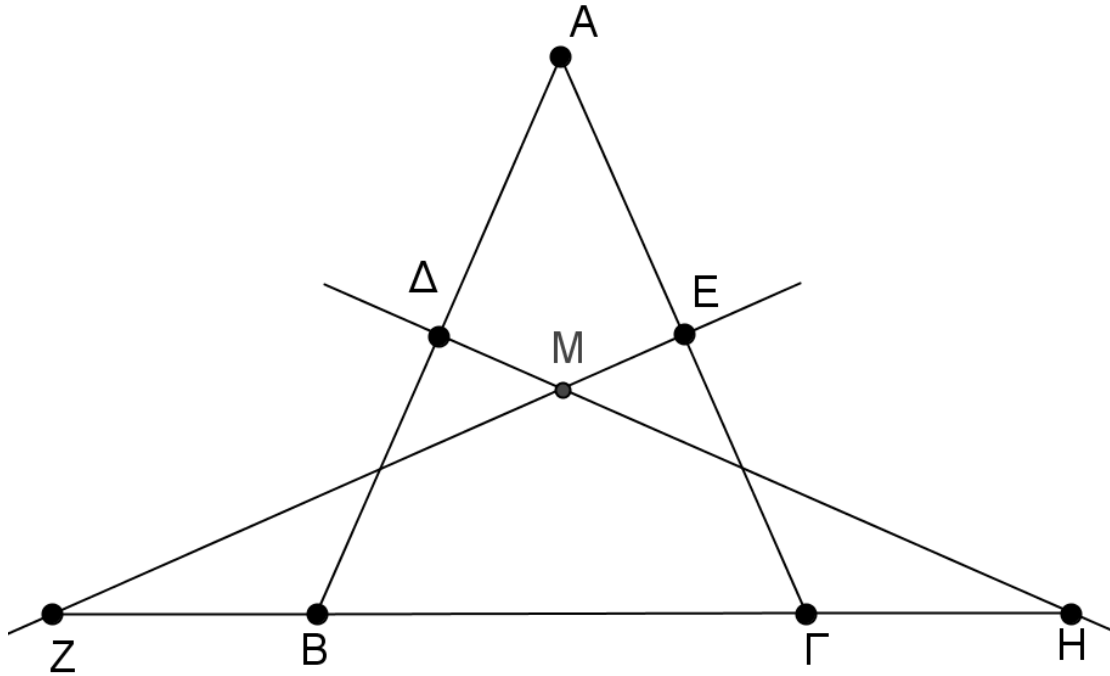
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B\H$ και $E Z\Gamma$.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_5017)

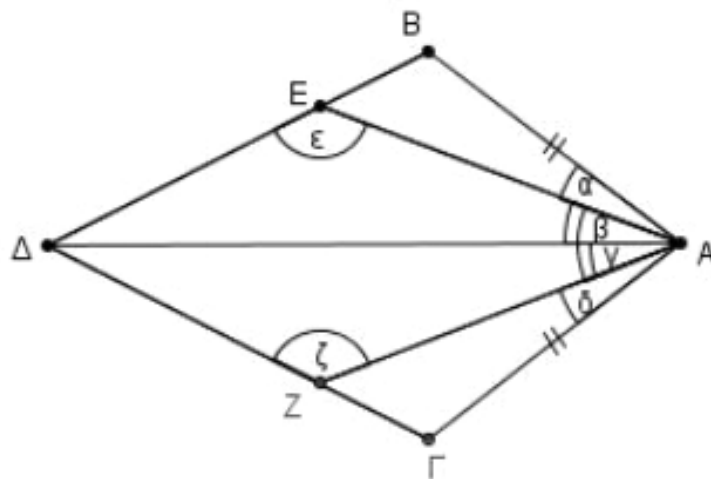
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα

Μονάδες 12

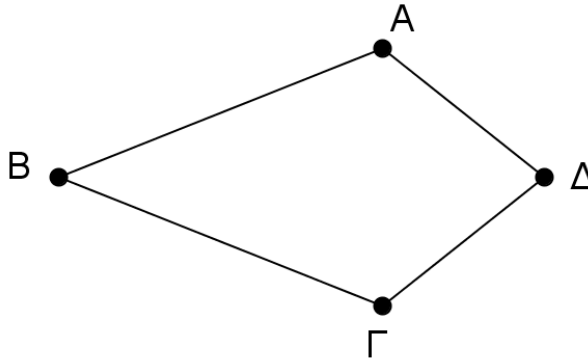
β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5029)

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{BA\Gamma} = \hat{B\Gamma A}$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5035)

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\alpha = \beta$ και

$\gamma = \delta$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και $A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.

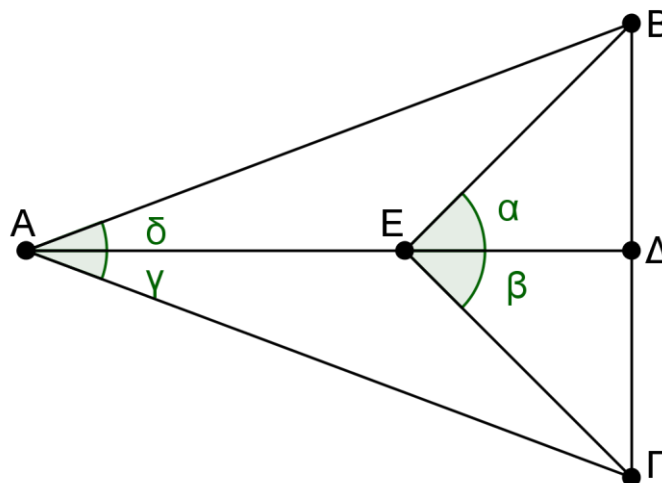
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5048)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

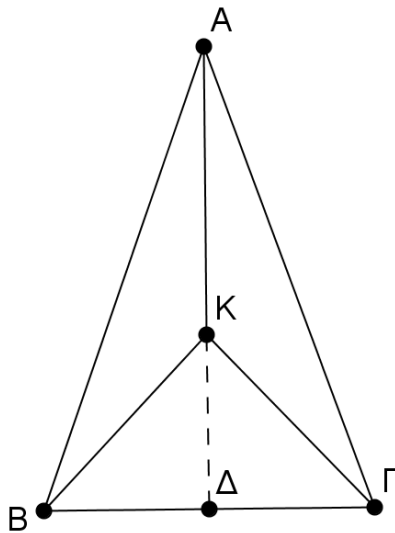
(Μονάδες 12)

β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου $BK\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5053)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{\epsilon\xi}} = \widehat{\Gamma_{\epsilon\xi}}$

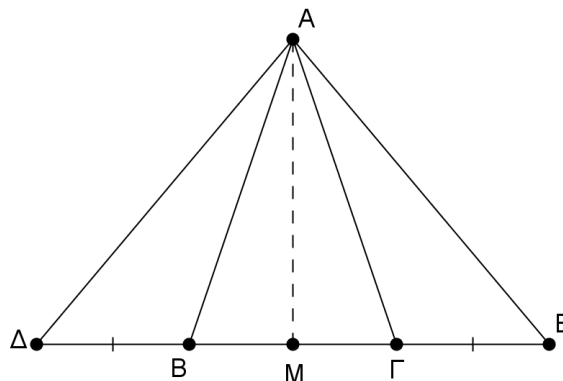
(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5075)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5127)

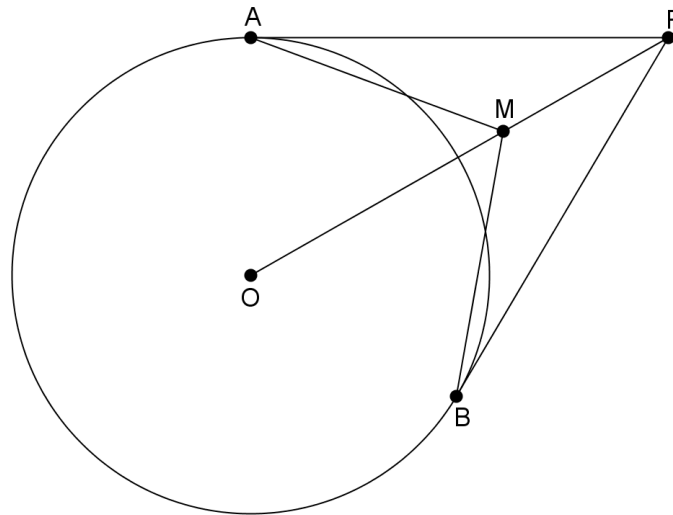
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) οι γωνίες \widehat{MAO} και \widehat{MBO} είναι ίσες.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5136)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσα .

Μονάδες 5

β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\epsilon\Gamma$ είναι ίσα .

Μονάδες 10

γ) το τρίγωνο $\Delta\epsilon M$ είναι ισοσκελές .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5139)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$ ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας K . Στην

προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές

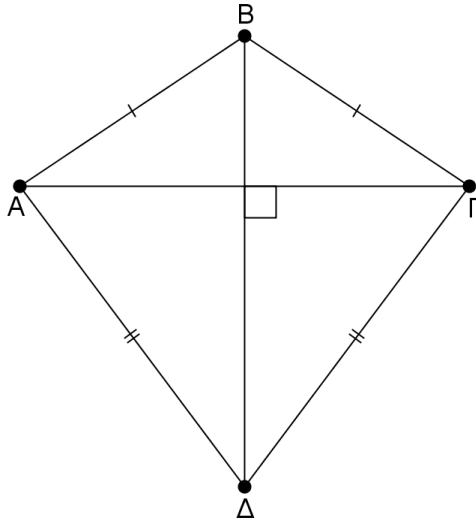
Μονάδες 12

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5144)

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι :



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 12

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5157)

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι :

α) $ΜΑ = ΜΒ$.

Μονάδες 15

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5567)

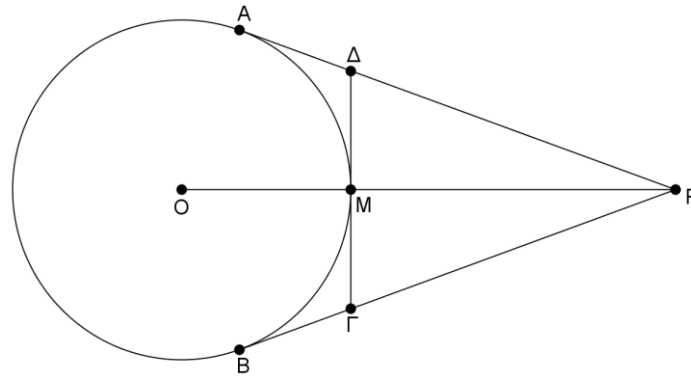
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40° να υπολογίσετε την γωνία ΑΟΒ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5573)

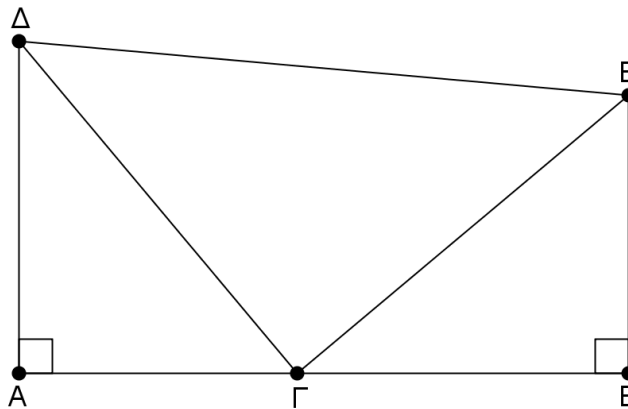
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες A , B είναι ορθές και επιπλέον $AD = BG$ και $AG = BE$.
 Να αποδείξετε ότι :

α) Να τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα .

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία $\widehat{EGB} = 40^\circ$ τότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5580)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A. Η BD είναι διχοτόμος της γωνίας B, η DE είναι κάθετη στη BG και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$

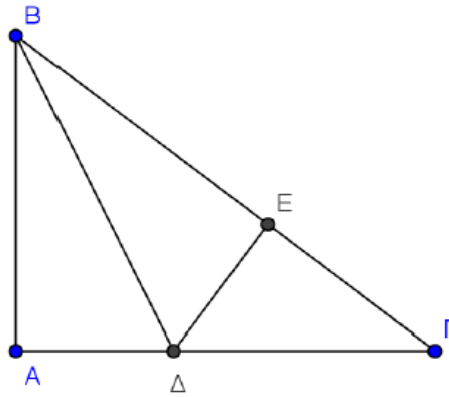
Μονάδες 8

β) $AD < DG$

Μονάδες 9

γ) $AG < AB$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5582)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$.

Μονάδες 6

β) $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 10

γ) $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (2_5591)

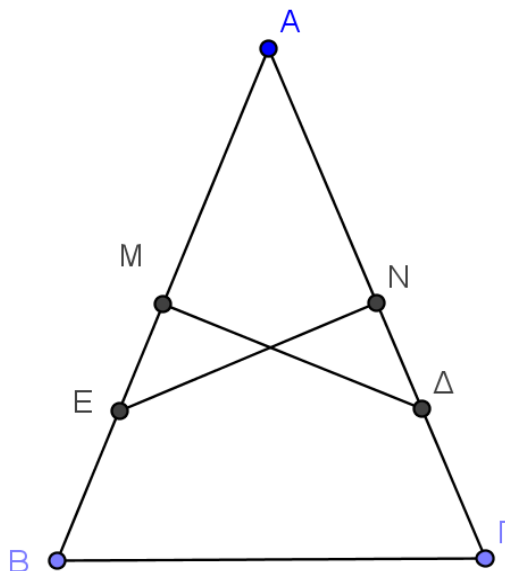
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5595)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

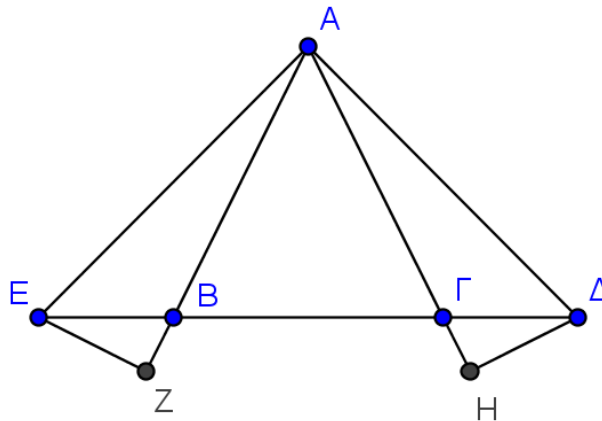
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$.

Μονάδες 12

β) $EZ = \Delta H$.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5597)

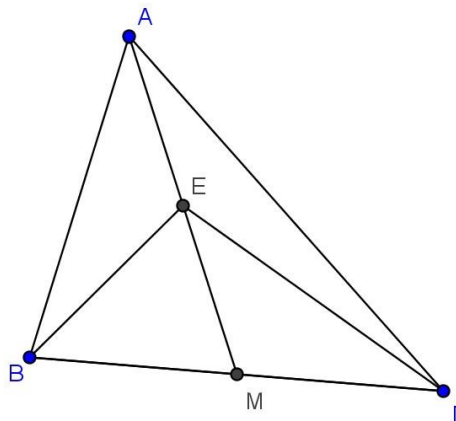
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$ να αποδείξετε ότι:

α) $\angle AEB = \angle EM\Gamma$.

Μονάδες 12

β) $AB = E\Gamma$.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5603)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $A\Delta$ είναι διχοτόμος

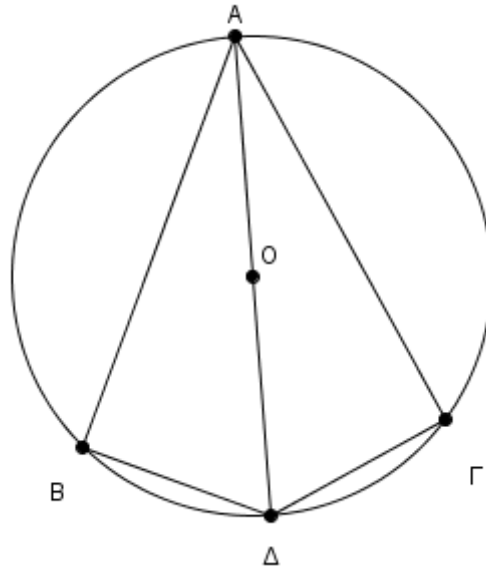
της γωνίας ΒΑΓ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα.

Μονάδες 10

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5607)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ , οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ .

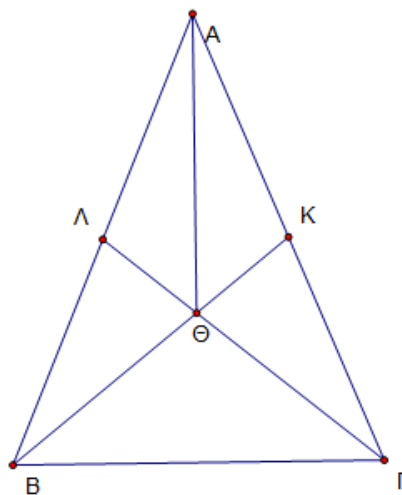
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5613)

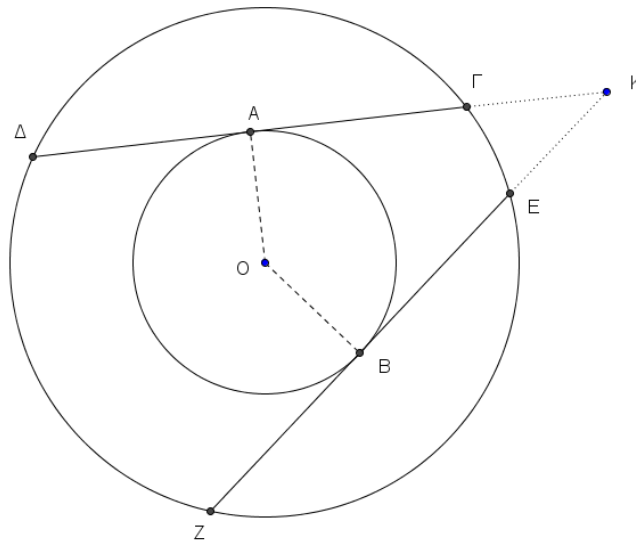
Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = Z\epsilon$.

Μονάδες 12

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και $Z\epsilon$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5619)

Δίνεται γωνία $\chi A\gamma$ και η διχοτόμος της $A\delta$, από τυχαίο σημείο B της $A\gamma$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την $A\chi$ στο Γ .

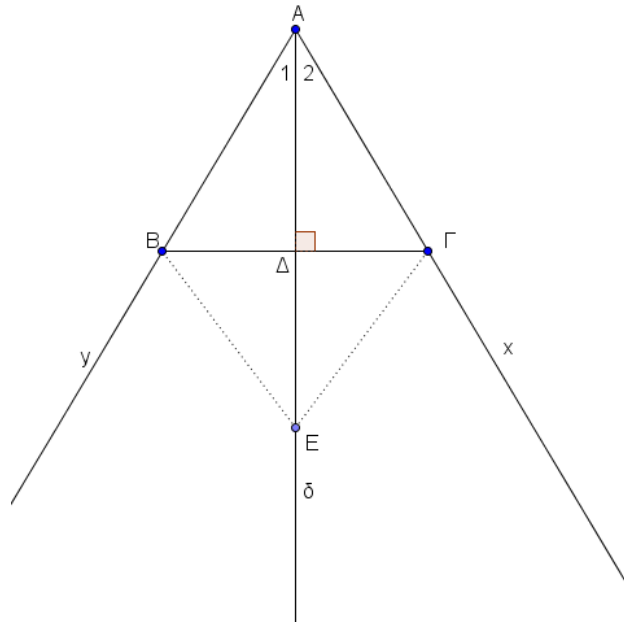
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5628)

Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο $Ο$ έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$, και τα σημεία $Η$ και $Ζ$ στα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ = ΟΖ$.

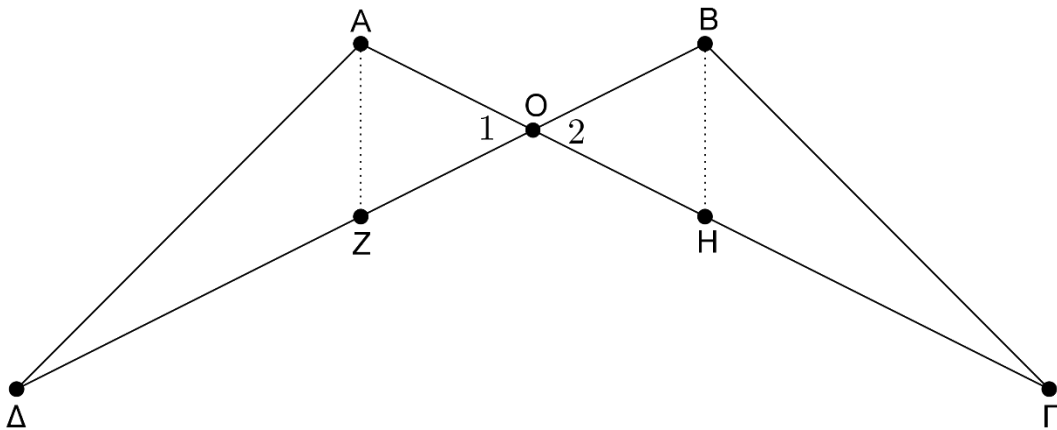
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $ΑΔΟ$ και $ΒΓΟ$ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $ΑΖ = ΒΗ$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5630)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από τα μέσα $Κ$ και $Λ$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα $ΚΕ$ και $ΛΖ$ στην πλευρά $ΒΓ$.

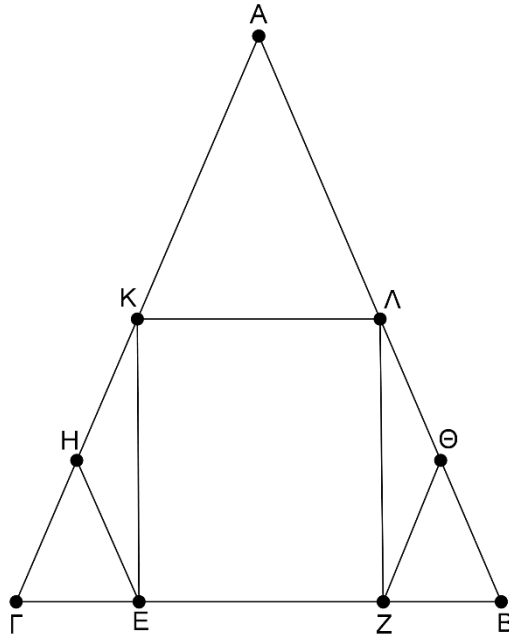
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΚΕΓ$ και $ΛΖΒ$ είναι ίσα.

Μονάδες 15

β) $ΕΗ = ΖΘ$, όπου $Η, Θ$ τα μέσα των τμημάτων $ΚΓ, ΛΒ$ αντίστοιχα.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_5633)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν το κύκλο στα K και L αντίστοιχα.

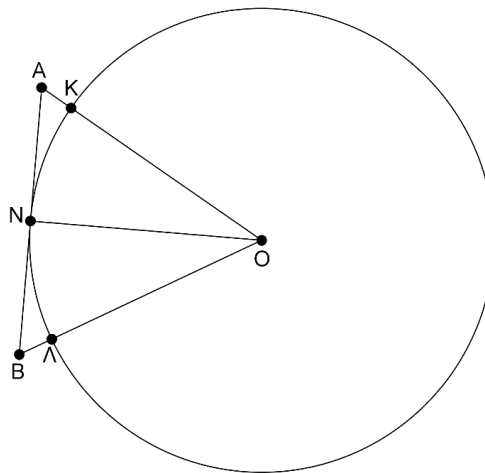
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου KL .

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5634)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO

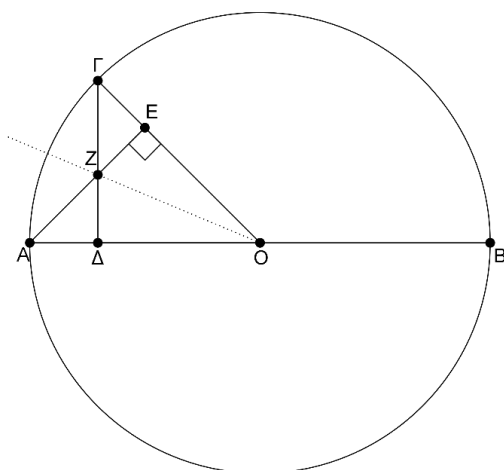
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5647)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

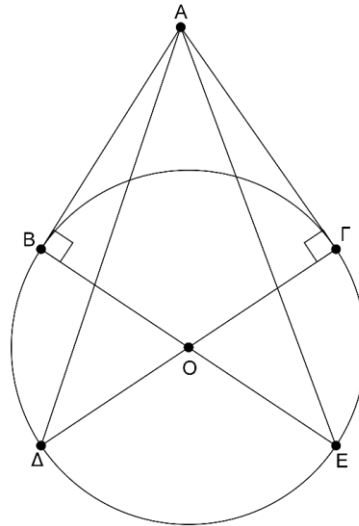
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5733)

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

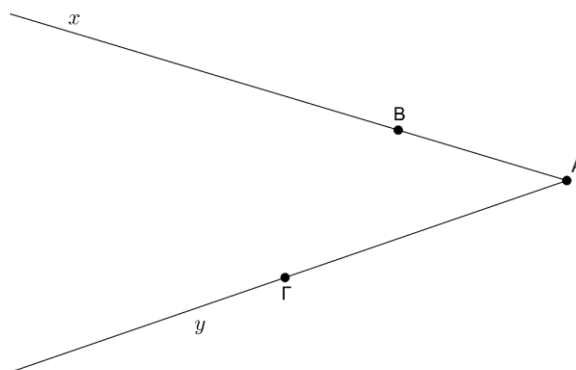
Μονάδες 9

β) Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 9

γ) Ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (2_6592)

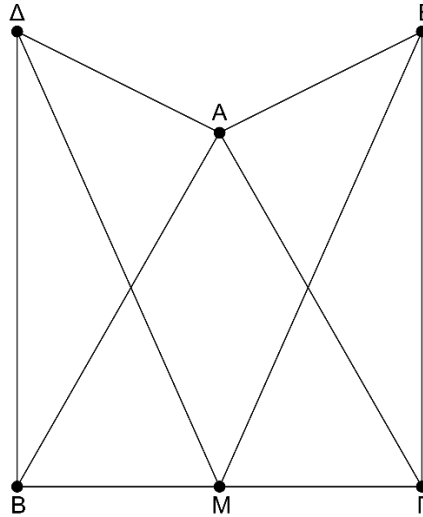
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) $A\Delta = A E$.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_6886)

[είναι από το κεφάλαιο 2ο]

Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε :

α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,

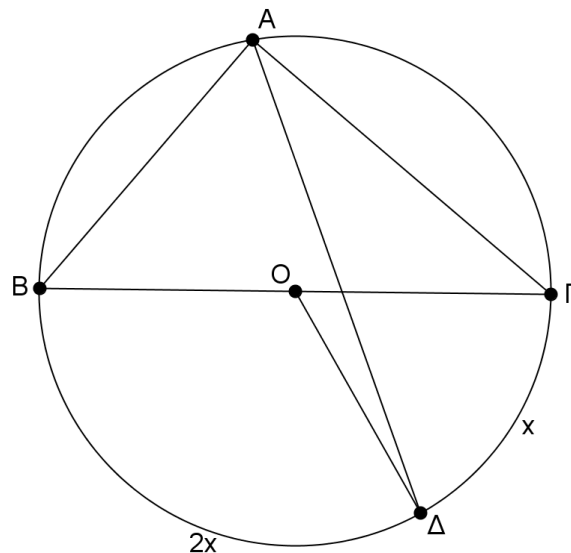
Μονάδες 8

β) τη γωνία $BO\Delta$,

Μονάδες 9

γ) τη γωνία $BA\Delta$.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_7453)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\hat{A}=90^0$ και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z . Να αποδείξετε ότι :

α) $BE = AB$,

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 4ο : Παράλληλες ευθείες



ΑΣΚΗΣΗ (2_2825)

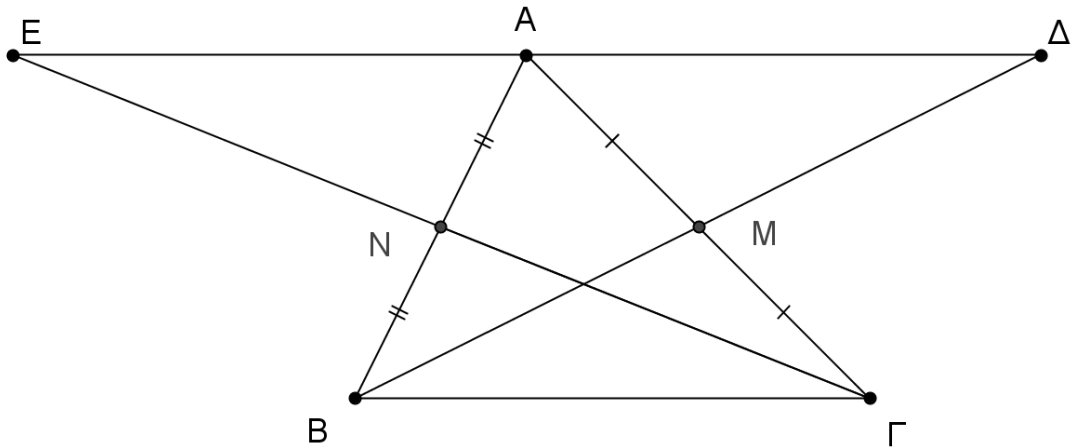
Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$, στο οποίο φέρνουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM προς το M κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN προς το N κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta // B\Gamma$ και $AE // B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E, A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2857)

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε, εκτός του τριγώνου ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$.

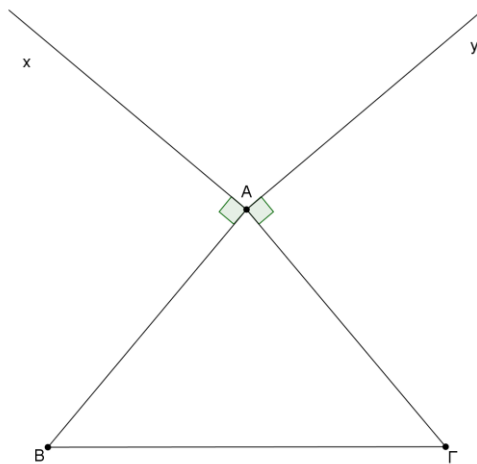
Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 12

β) Αν η γωνία BAG είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3424)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $E\text{H} \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$

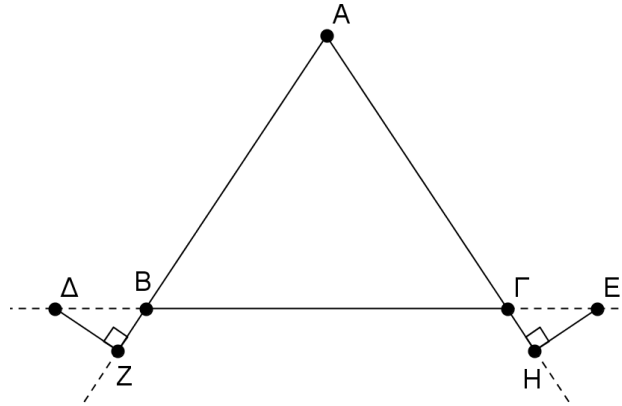
Μονάδες 10

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές

Μονάδες 7

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

Μονάδες 8

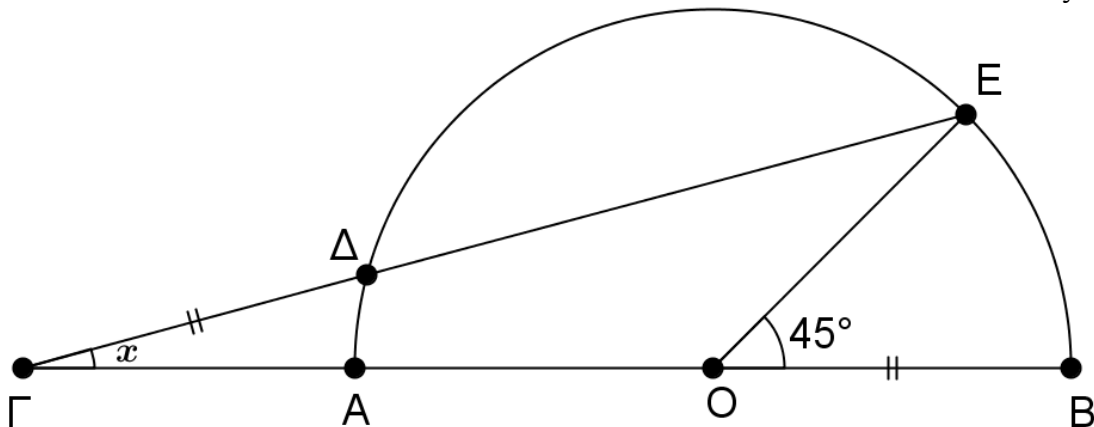


ΑΣΚΗΣΗ (2_4972)

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και η γωνία

$\angle BOE = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \Gamma O = x$.

Μονάδες 25

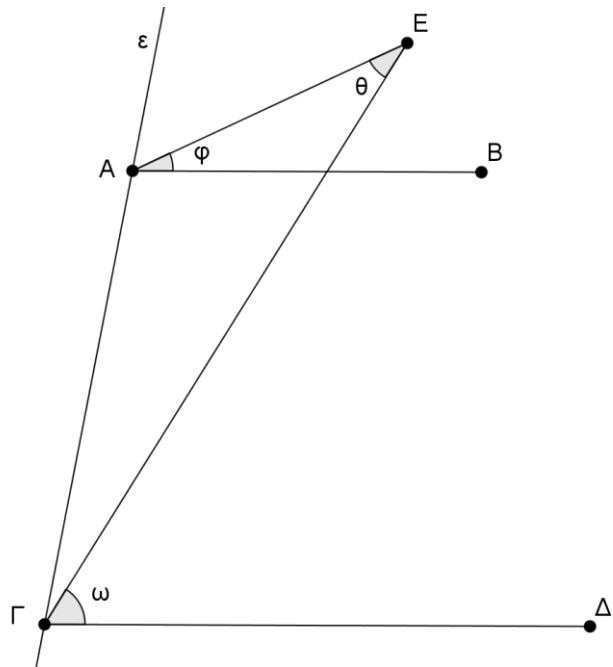


ΑΣΚΗΣΗ (2_5040)

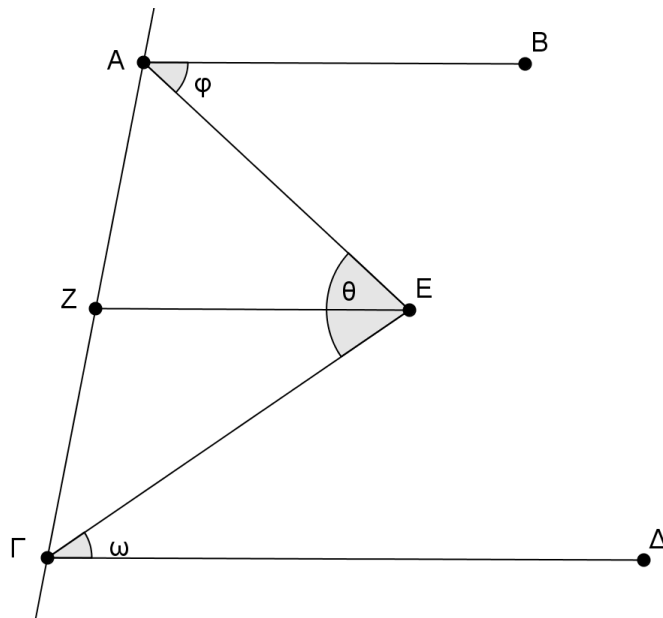
Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



ΑΣΚΗΣΗ (2_5055)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας \hat{A} , τέτοιο ώστε $KB = KA = KΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

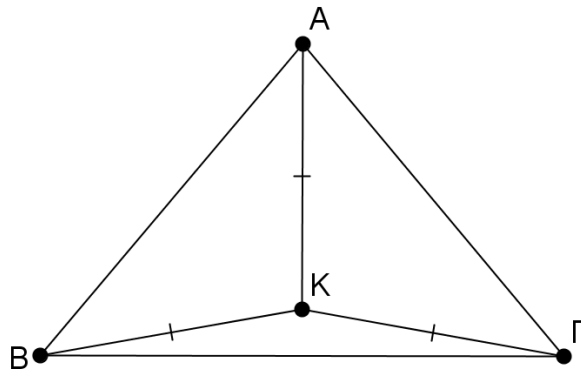
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{ABK} και $\hat{AΓK}$

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BKΓ}$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5061)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

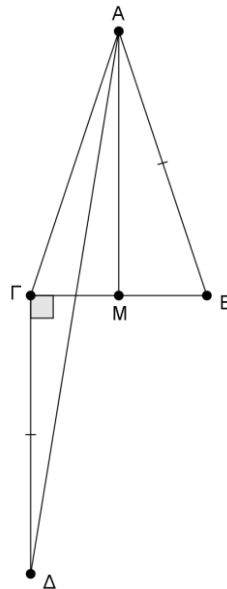
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\Delta A$.

(Μονάδες 12)

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5064)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας

$\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

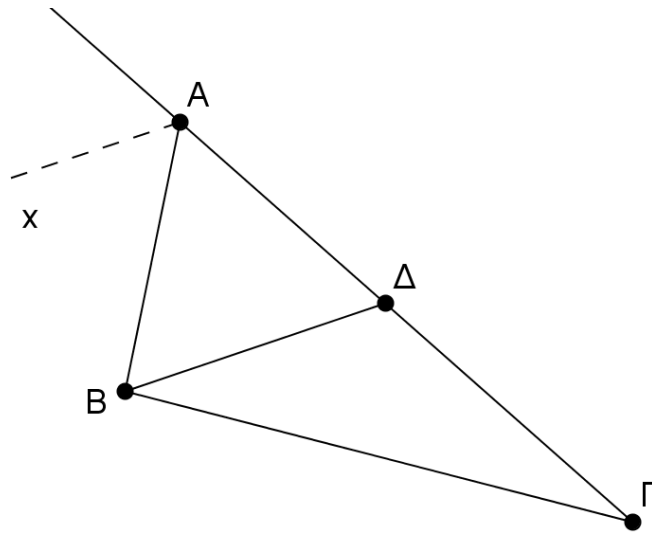
(Μονάδες 10)

ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία \widehat{BDA} είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5066)

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $E\Delta // B\Gamma$

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5080)

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\widehat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία A .

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5089)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $\widehat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5092)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $A=40^\circ$. Στην προέκταση της GB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\Delta A\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5094)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της

γωνία A και η $\Delta E \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

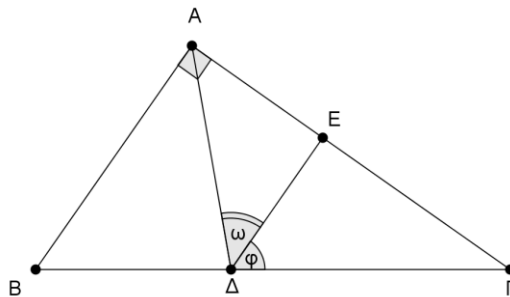
(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες φ και ω .

(Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5100)

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{B A \Gamma} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\hat{A B \Delta} = \hat{A \Gamma E} = 110^\circ$.

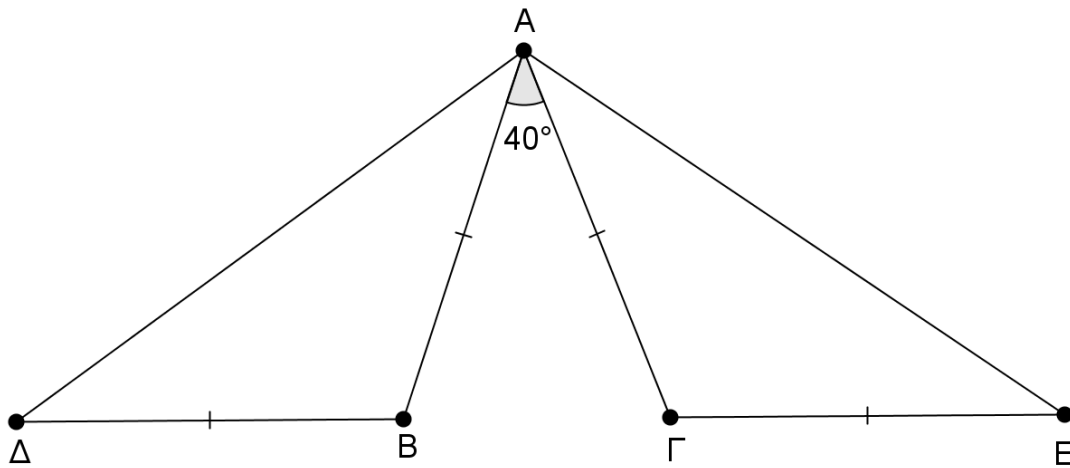
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5134)

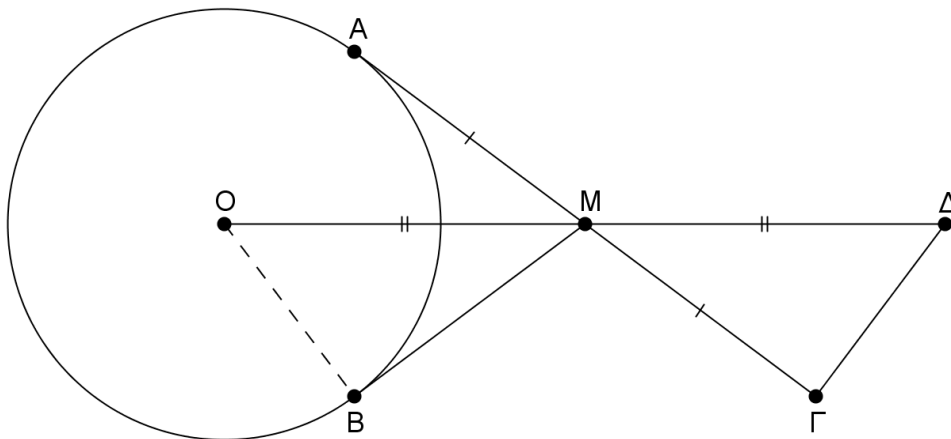
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = MO$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα, και να γράψετε τα στοιχεία τους.

Μονάδες 13

β) Να αιτιολογήσετε γιατί $OA \parallel \Gamma\Delta$.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5562)

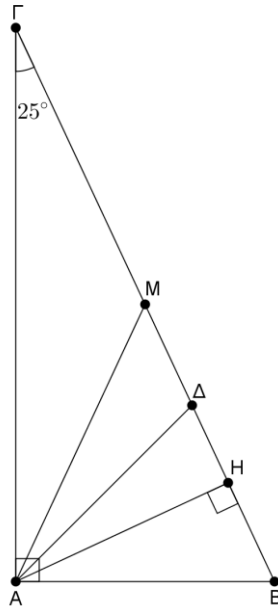
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB , HAB , $A\Delta B$.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M\Delta\Delta} = \hat{\Delta A H} = 20^\circ$.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_5570)

Στα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΔE (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

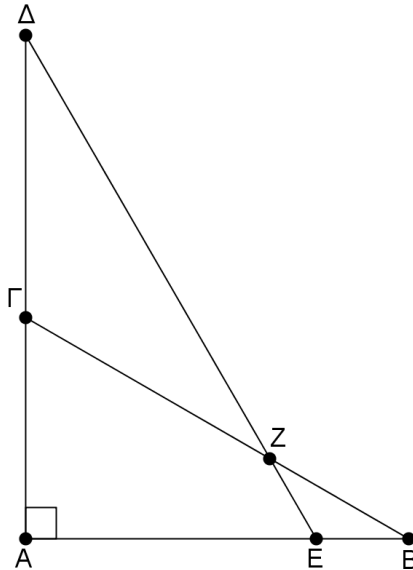
$$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ.$$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου AEFZ .

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και EBZ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5572)

Στο παρακάτω σχήμα , οι AΔ και BE είναι παράλληλες . Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$,

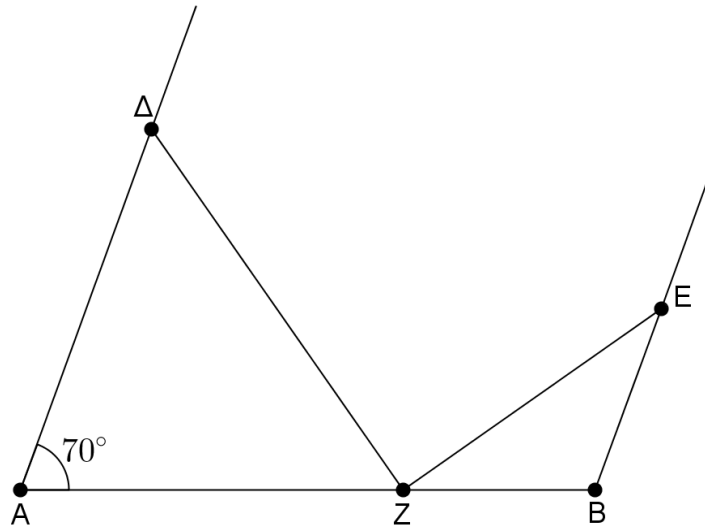
$$BE = BZ \text{ και } \hat{A} = 70^\circ.$$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων AΔZ και BZE .

Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta Z E} = 90^\circ$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5578)

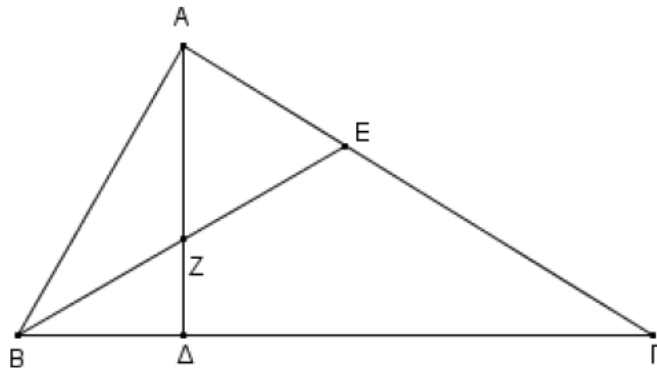
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $A + \Gamma = 2B$ και $A = 3\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι ίση με 60°

Μονάδες 10

β) Αν το ύψος $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5599)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\angle B A \Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

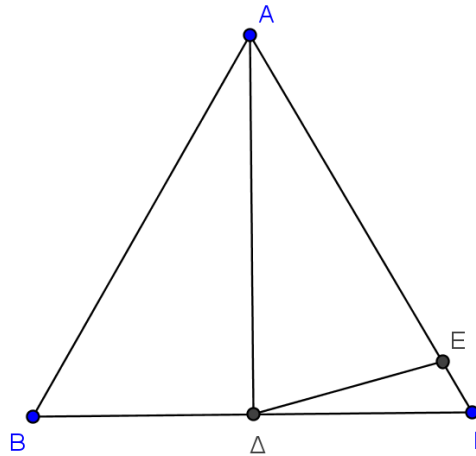
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5626)

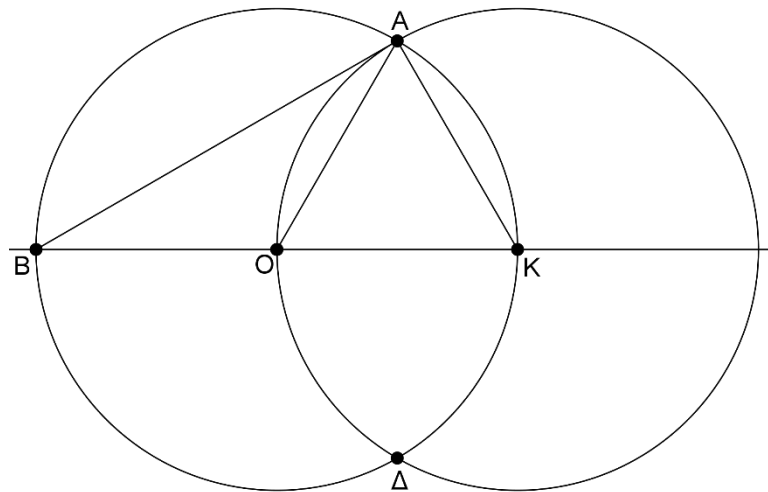
Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5652)

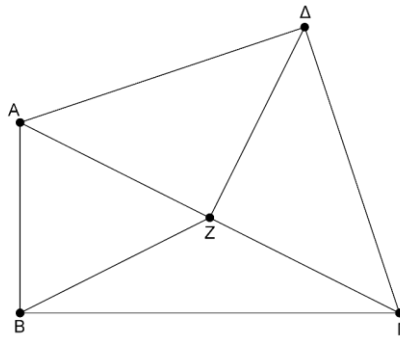
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $B = 90^\circ$ και Z το μέσο του AG. Με υποτείνουσα το AG κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο AΔΓ με $\Delta = 90^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

Μονάδες 13

β) Αν $\angle A\Gamma B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες BΑΔ και BΓΔ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_6002)

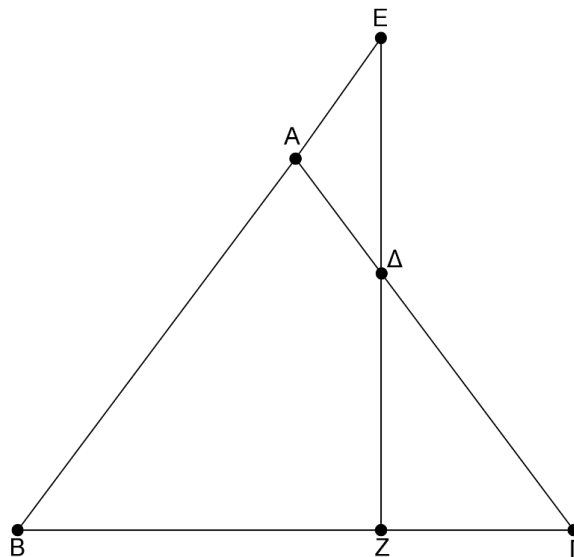
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς AG , ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

Μονάδες 10

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_6584)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την AG στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.

Μονάδες 9

γ) Αν η γωνία B είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας Γ , να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (2_6593)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

Μονάδες 13

β) Αν $A = 75^\circ + B$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_6595)

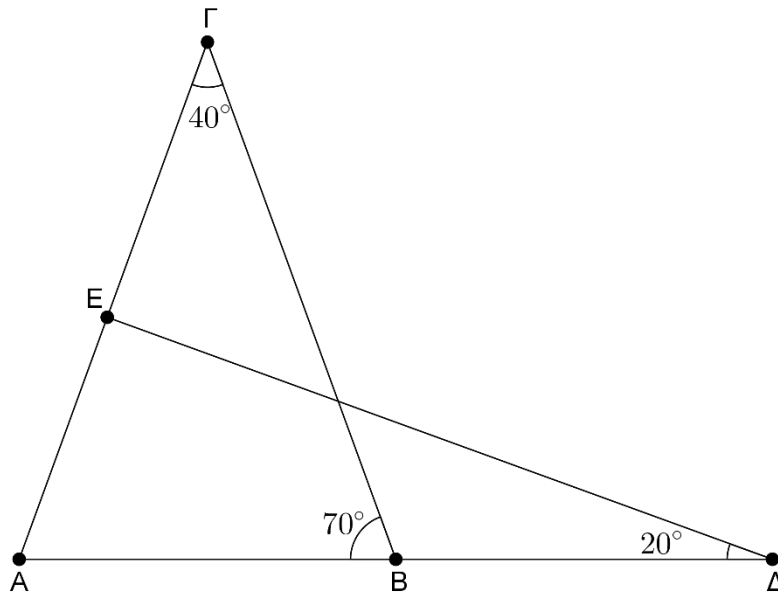
Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

Μονάδες 13



Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 5ο

Παραλληλόγραμμο - Τραπέζια



ΑΣΚΗΣΗ (2_2817)

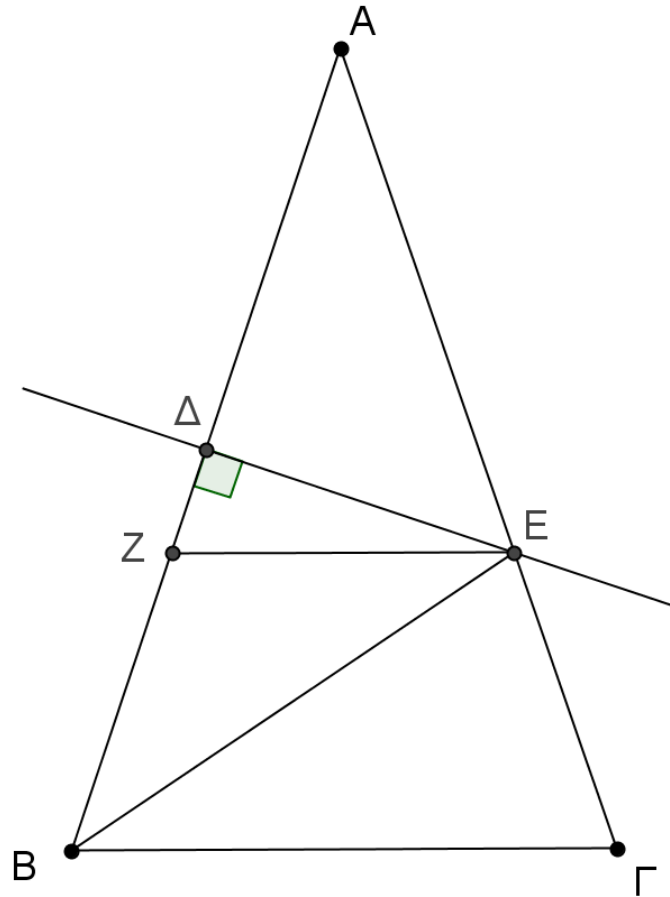
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α Να αποδείξετε ότι $AE=BE$.

(Μονάδες 15)

β Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2822)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι

α Το τρίγωνο $B\hat{A}E$ είναι ισοσκελές.

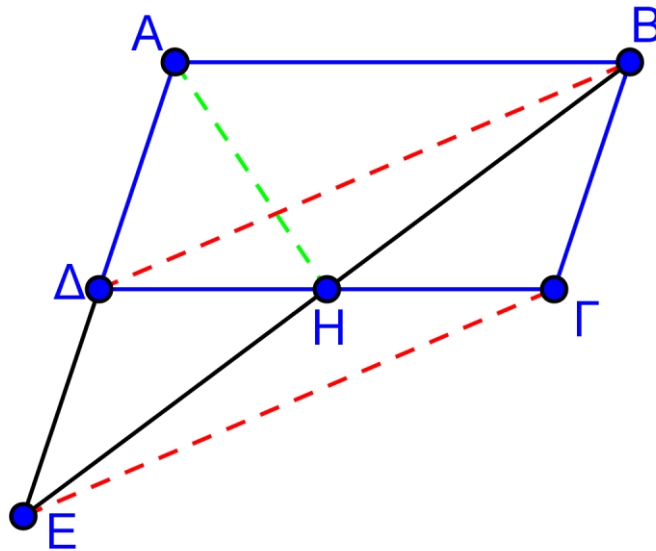
(Μονάδες 7)

β Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ Η AH είναι διάμεσος του τριγώνου $B\hat{A}E$.

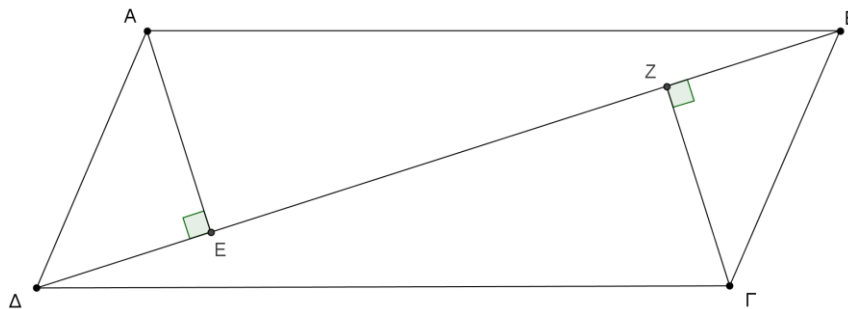
(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2827)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και η διαγώνίός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στην ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

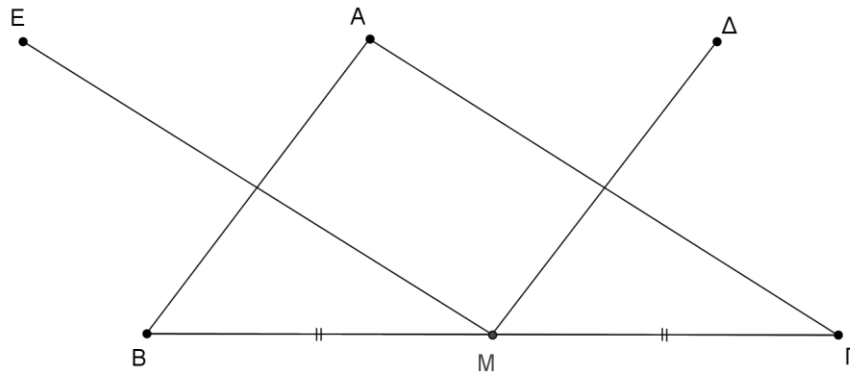
- α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{\Gamma} \hat{B} Z$. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2829)

Δίνεται τρίγωνο $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta = BA$ με $M\Delta // BA$ και ευθύγραμμο τμήμα $ME = \Gamma A$ με $ME // \Gamma A$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $\Delta A = AE$ (Μονάδες 8)
- β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)
- γ) $\Delta E = B\Gamma$ (Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2831)

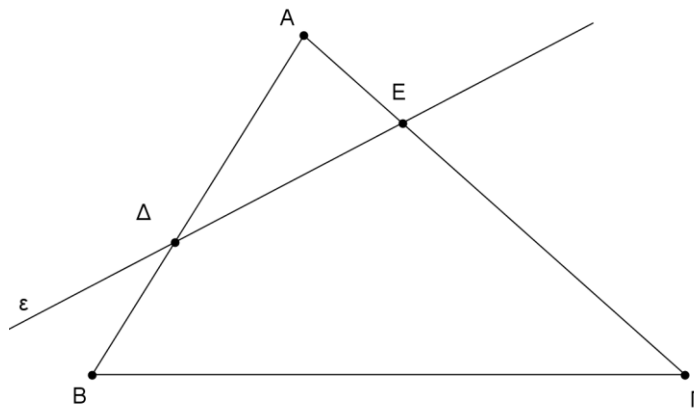
Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά AG σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ σε ένα τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}E$ και ένα τετράπλευρο $B\Delta E\hat{\Gamma}$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\hat{\Gamma}$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $\hat{A}B\hat{\Gamma}$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



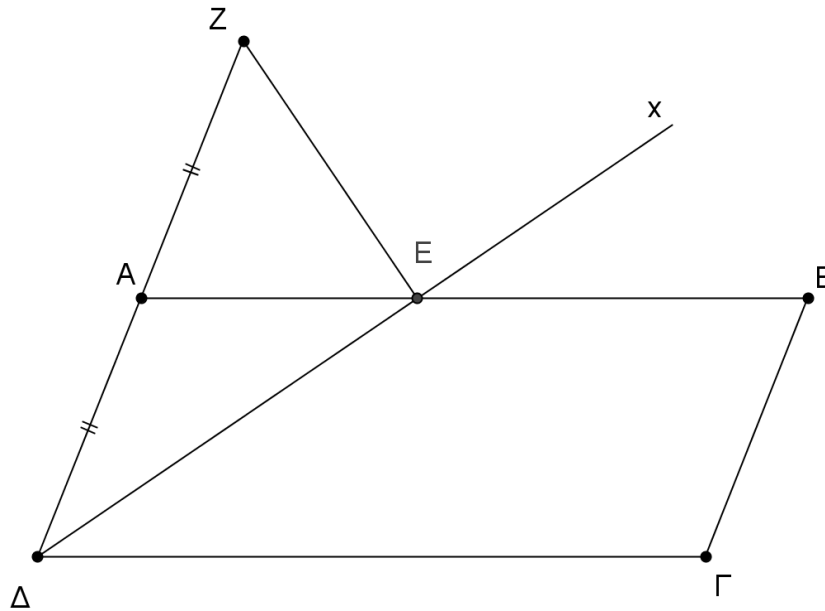
ΑΣΚΗΣΗ (2_2832)

Σε παραλληλόγραμμο $AB\hat{\Gamma}\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα

$AH = \Delta A$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

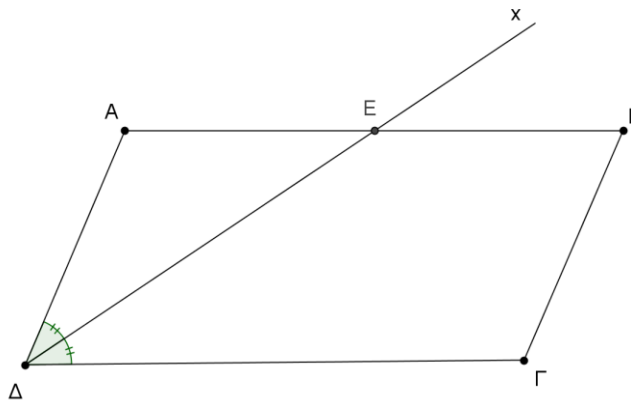
β) Το τρίγωνο $\hat{\Delta}\hat{Z}H$ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία \hat{Z} . (Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2834)

Δίνεται παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

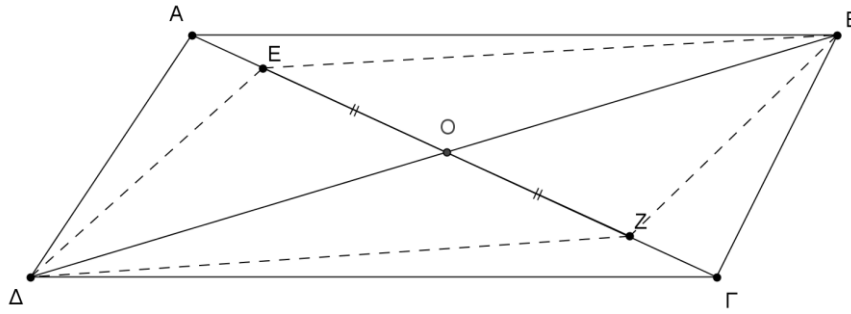
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\hat{A}\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) Είναι το Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2836)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $OE=OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E=BZ$. (Μονάδες 12)
- β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2841)

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} . Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$

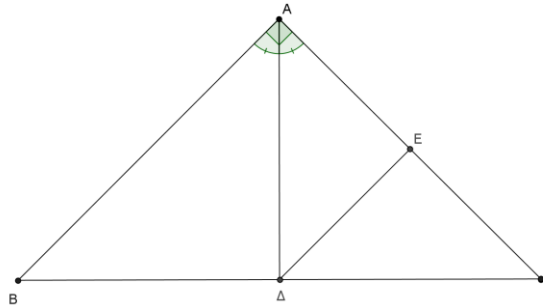
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2844)

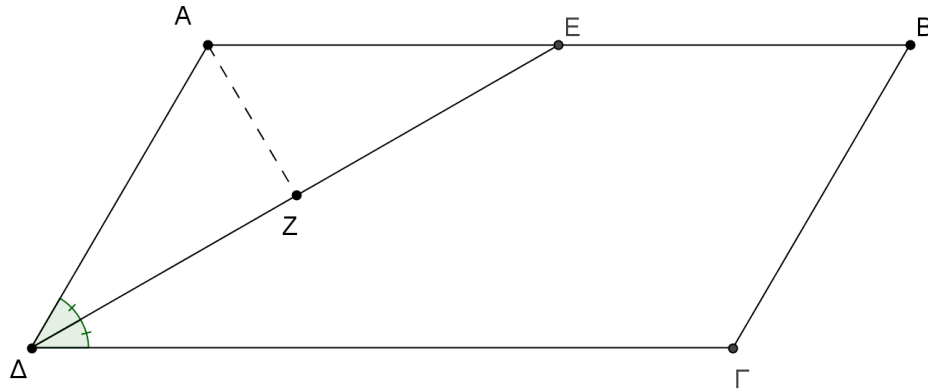
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας \hat{A} του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη ΔE . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2850)

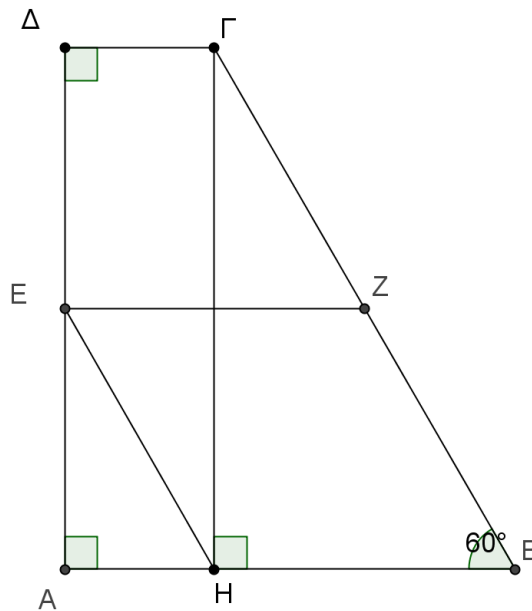
Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών AD και BΓ αντίστοιχως. Να δείξετε ότι:

α) $AB = 3\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο EHBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2858)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ (2_3411)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και η διάμεσός του AM. Στην προέκταση της διαμέσου MΔ του τριγώνου AMΓ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_2849)

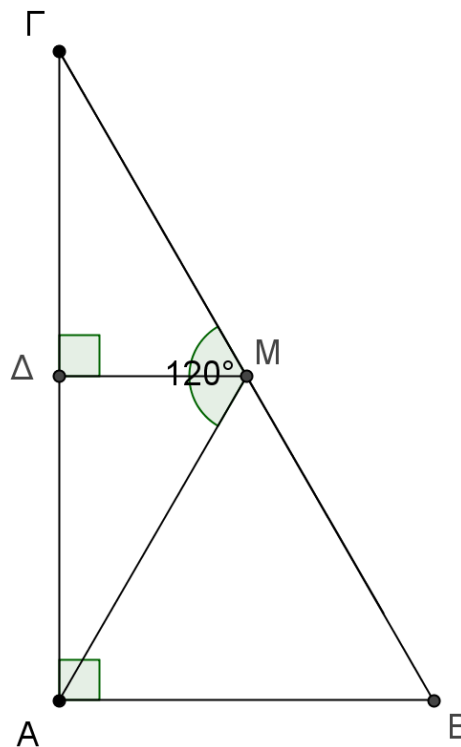
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\hat{\Gamma} = 8 \text{ cm}$. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\hat{\Gamma}$. Αν η γωνία $A\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4 \text{ cm}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2852)

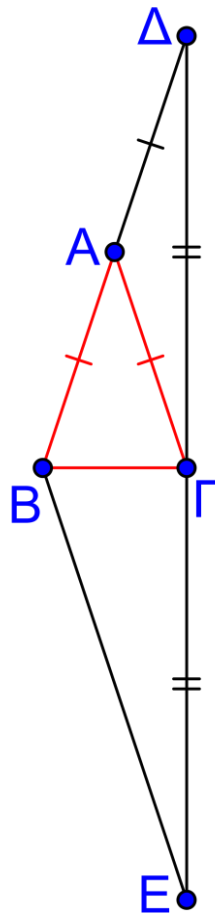
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$ ($AB = A\hat{\Gamma}$). Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}E$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\hat{\Delta} \hat{\Gamma} \hat{B}$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $BE \parallel A\hat{\Gamma}$ και $A\hat{\Gamma} = BE/2$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2851)

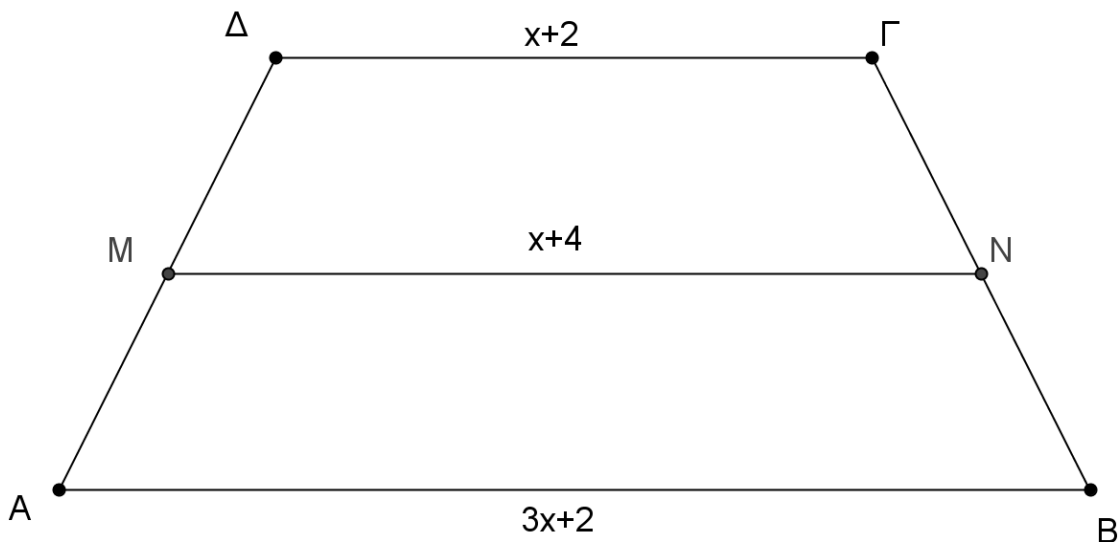
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας \hat{B} , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2856)

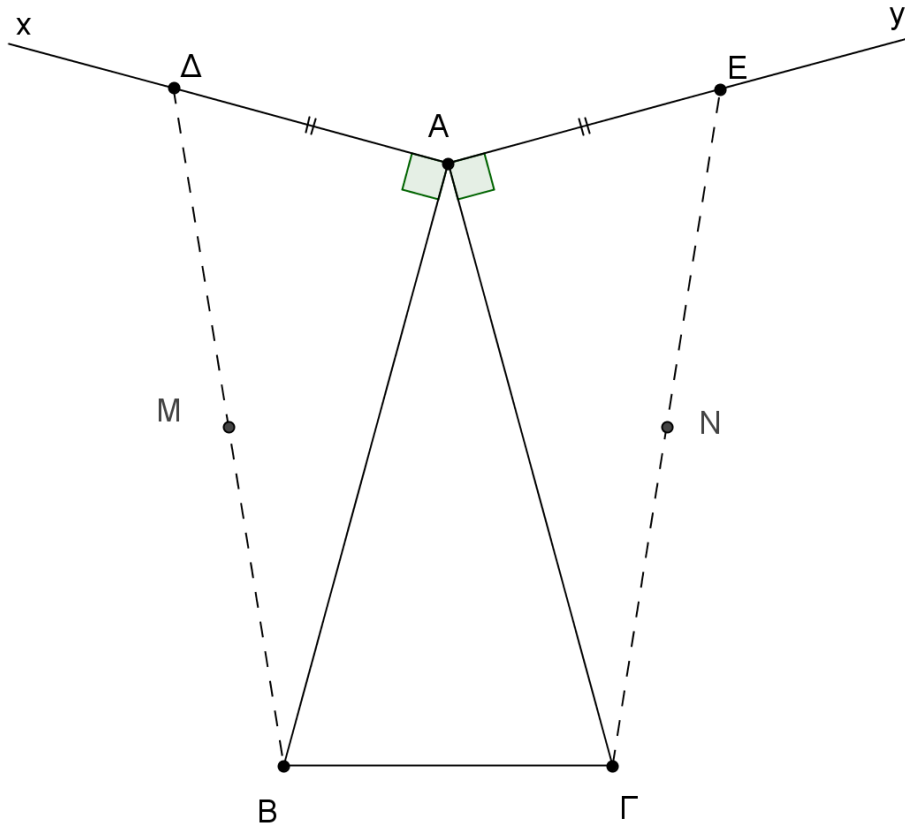
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=GE$.

(Μονάδες 12)

β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και GE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_3412)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

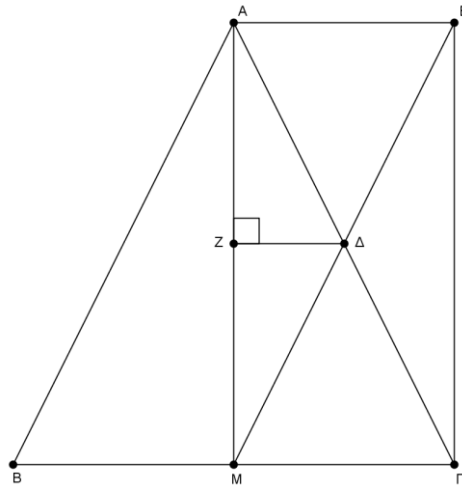
Αν το σημείο Z είναι το ίχνος του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3414)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$.

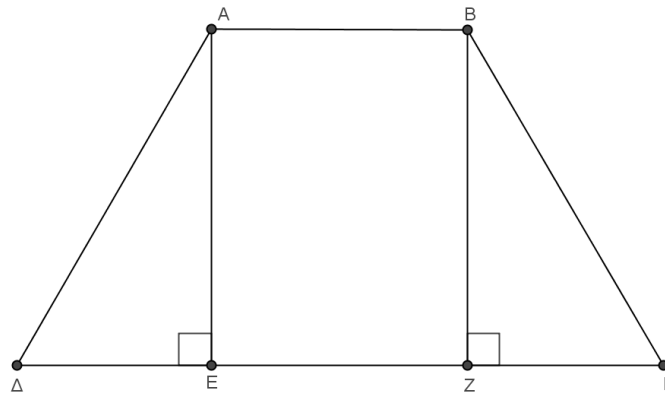
Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ.

α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπέζιου.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3415)

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$). Φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ.

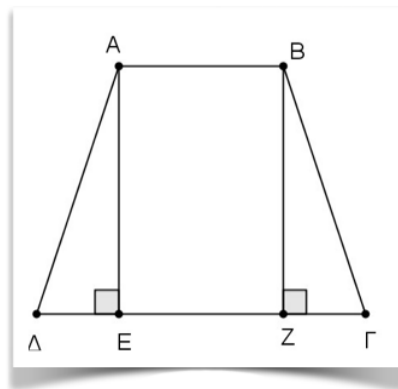
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$

Μονάδες 12

β) $AZ = BE$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3416)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

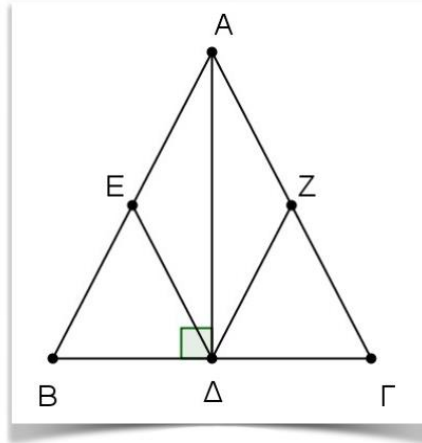
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα

Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3418)**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_3419)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE .

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}.$$

Μονάδες 12

β) Το τρίγωνο $A\hat{\Gamma}E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3422)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3427)

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$

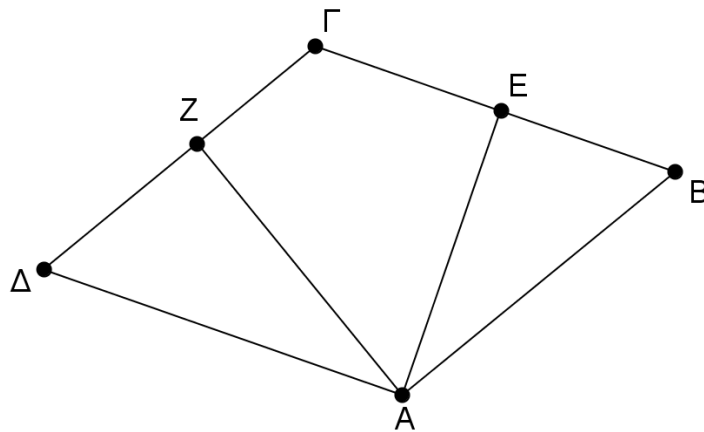
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

Μονάδες 12

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

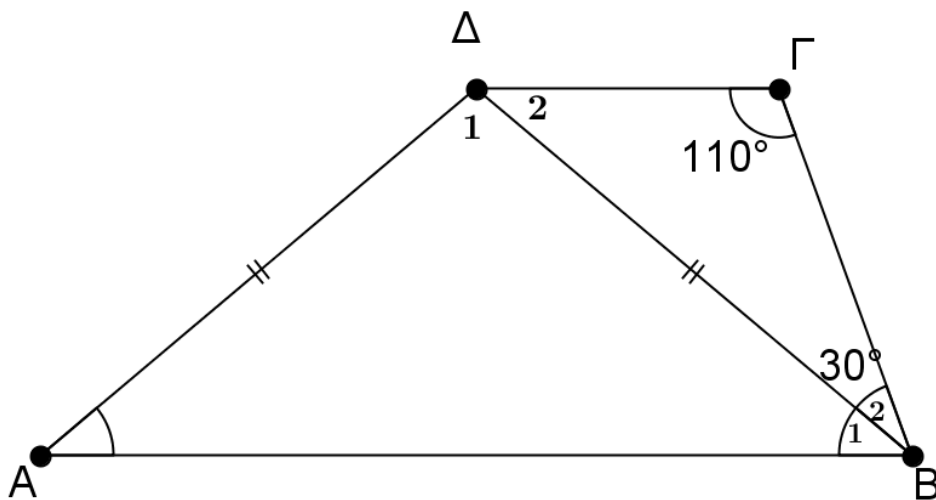
Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_4973)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\Gamma = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta B\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΒ.

Μονάδες 25



ΑΣΚΗΣΗ (2_5007)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ.

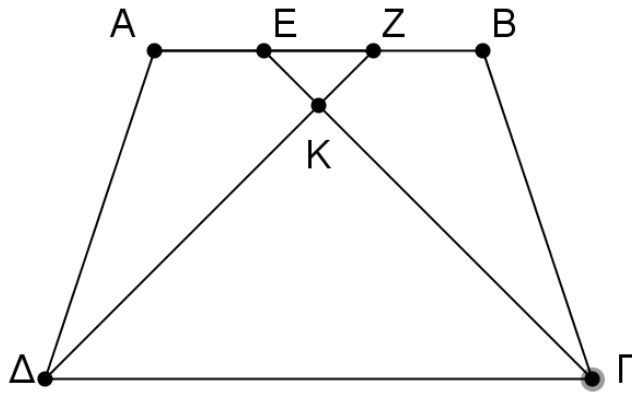
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5021)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ο$ είναι το κέντρο του. Έστω $Ε, Ζ, Η, Θ$ τα μέσα των $ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ$ και $ΟΓ$ αντίστοιχα

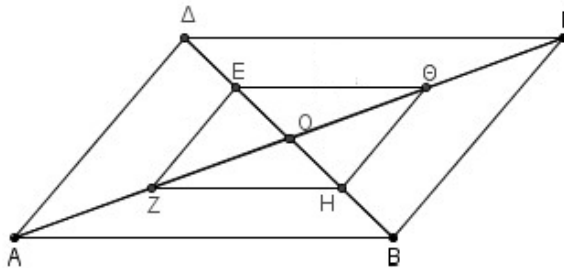
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $ΕΖΗΘ$

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5024)

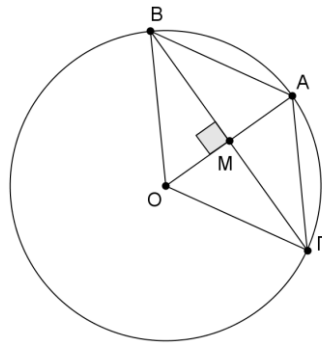
Σε κύκλο κέντρου $Ο$, έστω $ΟΑ$ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της $ΟΑ$ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία $Β$ και $Γ$. Να αποδείξετε ότι

α) Το τρίγωνο $ΟΒΑ$ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο $ΟΒΑΓ$ είναι ρόμβος

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5033)

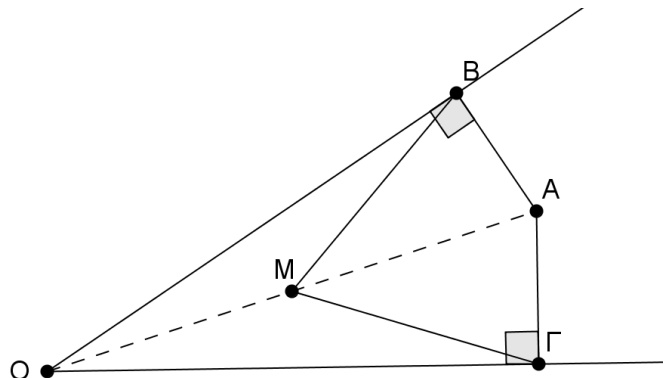
Δίνεται γωνία $\hat{x}Oy$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AΓ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BΜΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $\hat{BMΓ} = 2x \hat{Oy}$

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5039)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB, BΓ και ΓA αντίστοιχα.

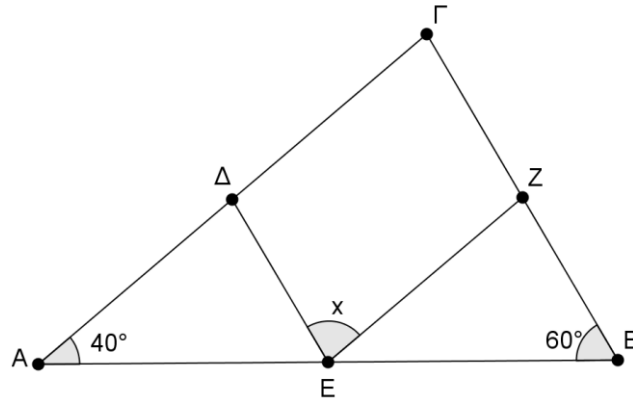
α) Να υπολογίσετε τη γωνία \hat{A} του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{BΔE} = \hat{EΖΓ} = 80^\circ$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία \hat{DEZ} (Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5059)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς AG τέτοιο

ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $\hat{A}\Delta B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

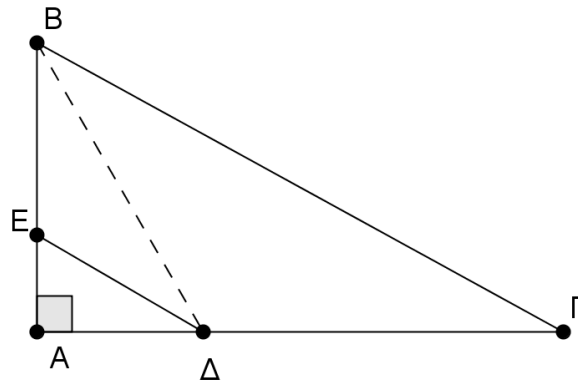
β) Αν $\hat{A}\Delta B = 60^\circ$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

II. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5069)

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η προέκτασή της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου ΔAE .

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5071)

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5073)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

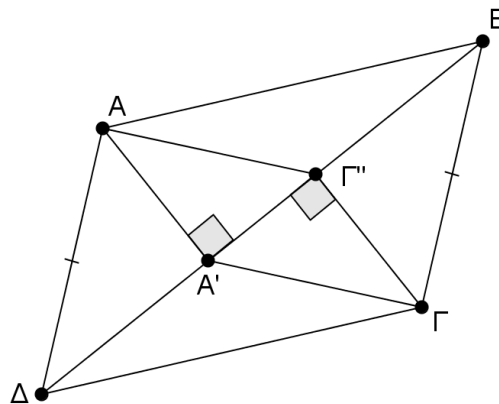
(Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5096)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της

$B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ .

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

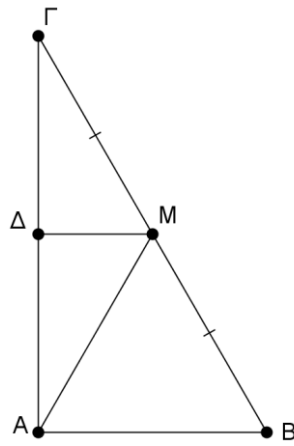
(Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5103)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 40^\circ$ και $B = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ = 9$ και $ΕΓ = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

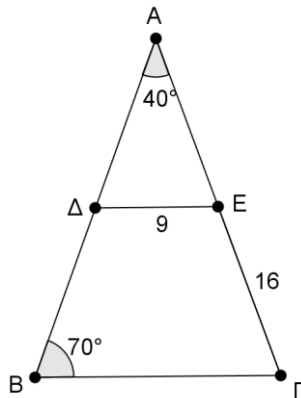
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 18$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5104)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5108)

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΓΖ$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{ΗΒΖ} = \hat{ΕΔΘ}$

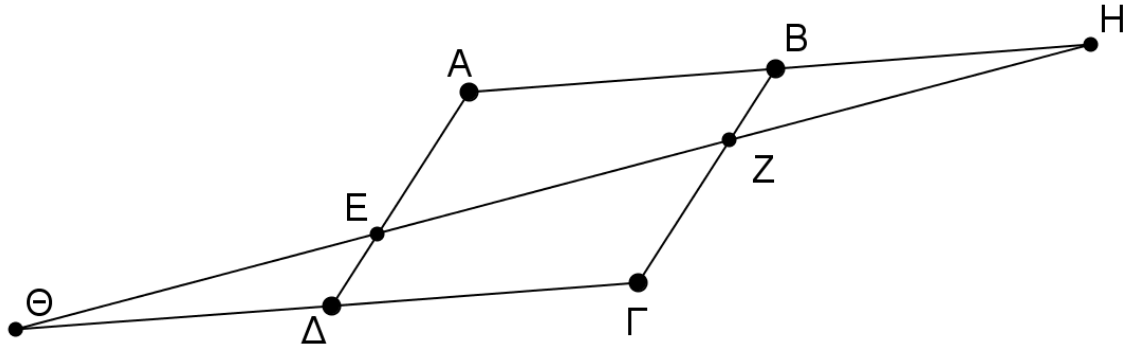
(Μονάδες 8)

β) $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$

(Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5111)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta E\Gamma = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$

(Μονάδες 8)

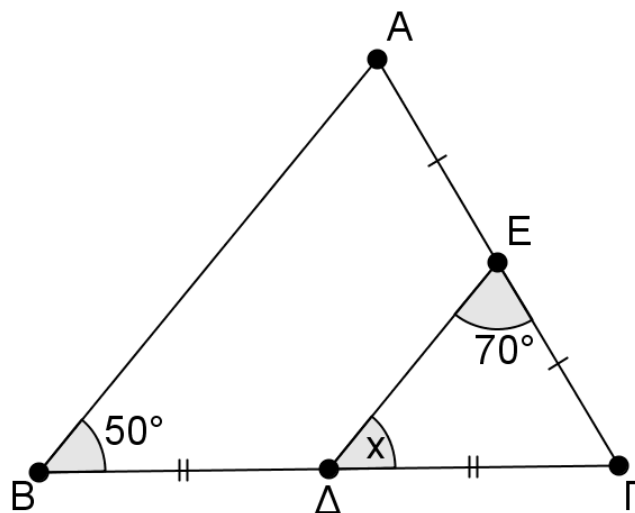
β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία x

(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5113)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta=9$, $E\Gamma=10$ και $B\Gamma=30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

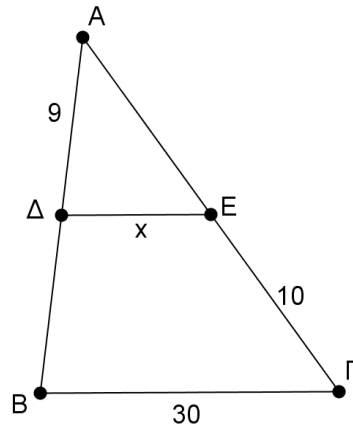
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5114)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΕ=8$, $ΕΔ=9$ και $ΔΒ=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

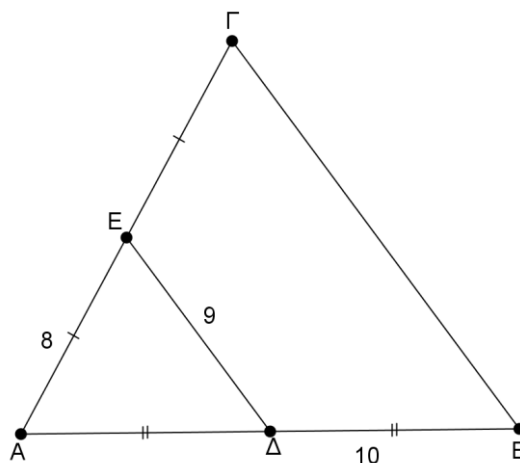
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετράπλευρου ΔΕΓΒ.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5117)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

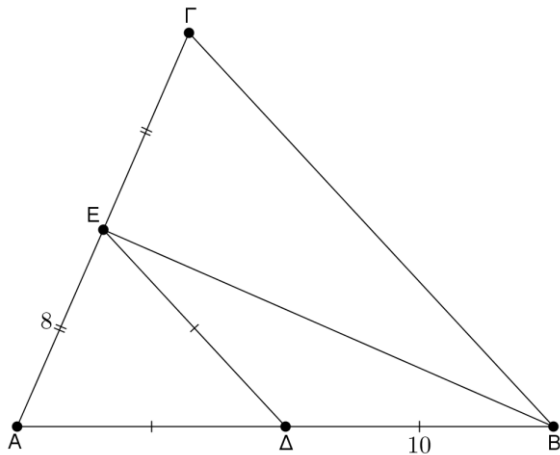
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 20$.

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5118)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

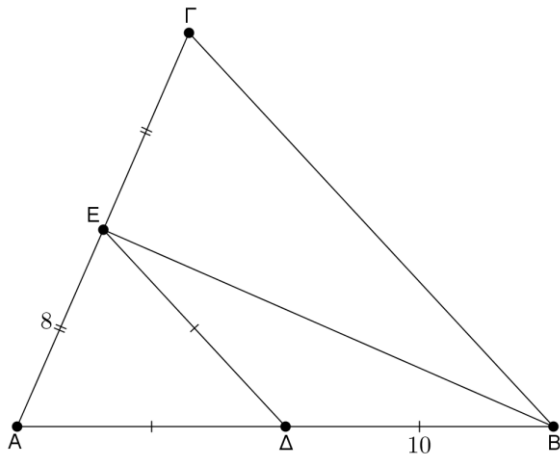
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5124)

Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E = 5$, $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

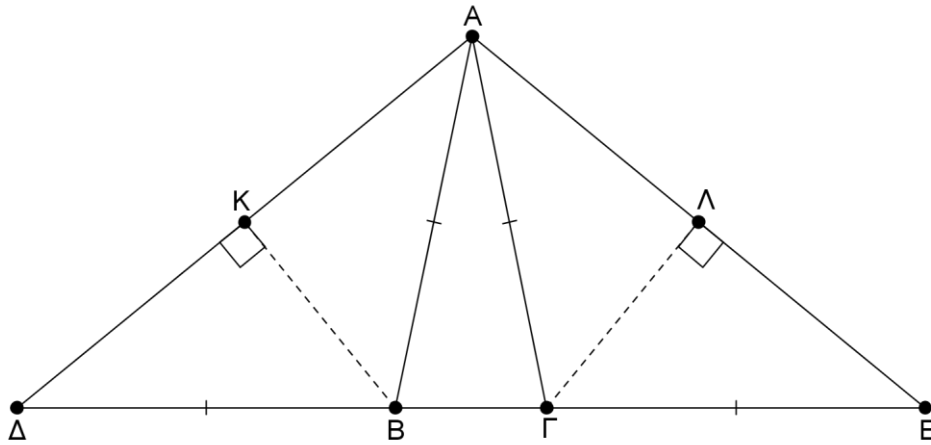
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και AE .

Μονάδες 10

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12 , να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5129)

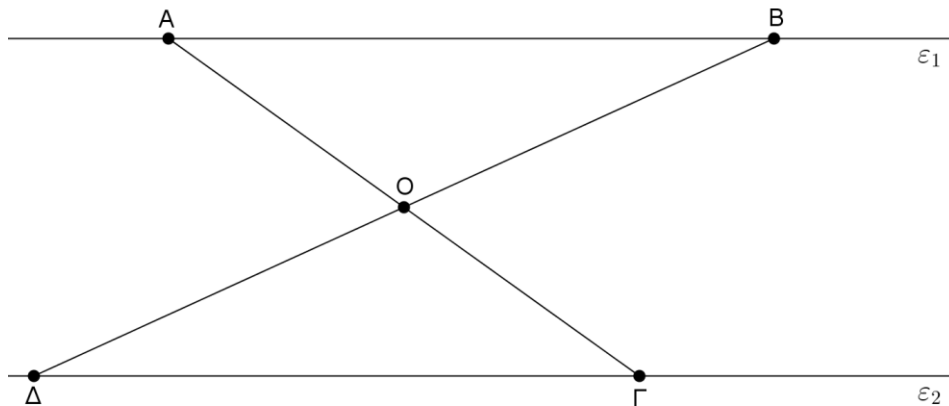
Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της BD . Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα στοιχεία τους .

Μονάδες 12

β) το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο .

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5132)

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

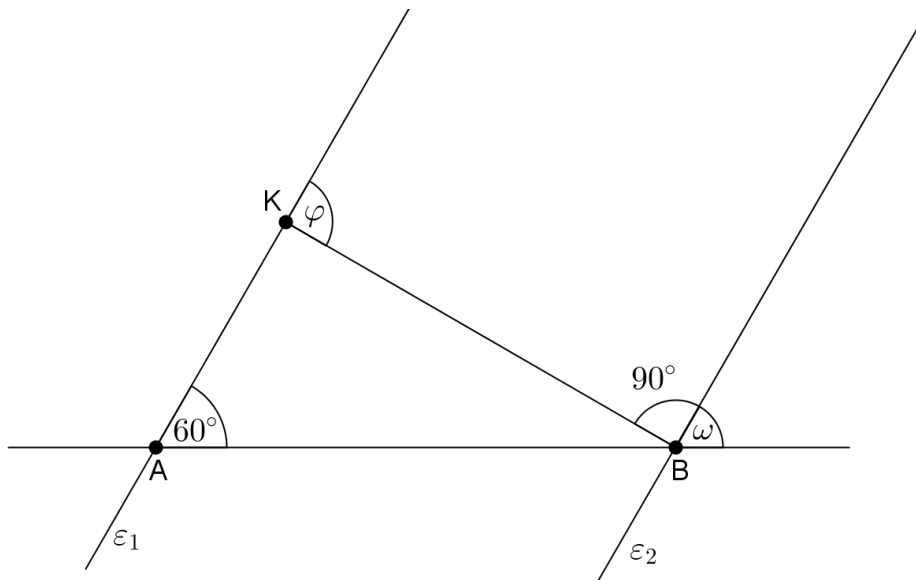
Μονάδες 10

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή της.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5142)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

α) να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ .

Μονάδες 12

β) Φέρουμε από το D ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες ADE και $ED\Gamma$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5149)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας \hat{A} και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα.

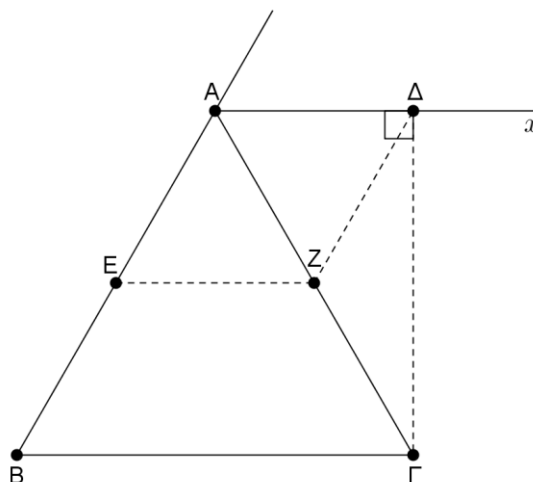
Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 12

β) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5162)

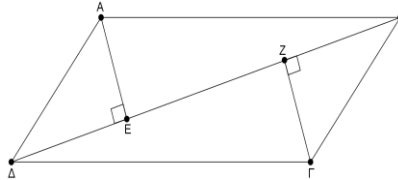
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ κάθετους στην διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $AE = \Gamma Z$.

Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5167)**

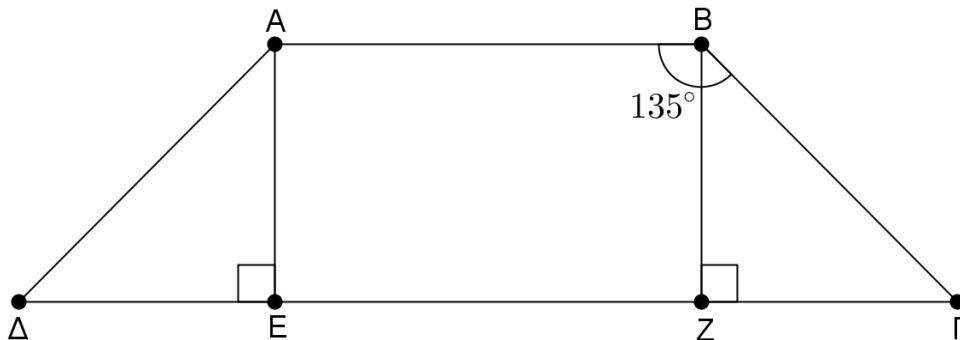
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5557)**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2 \text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5569)

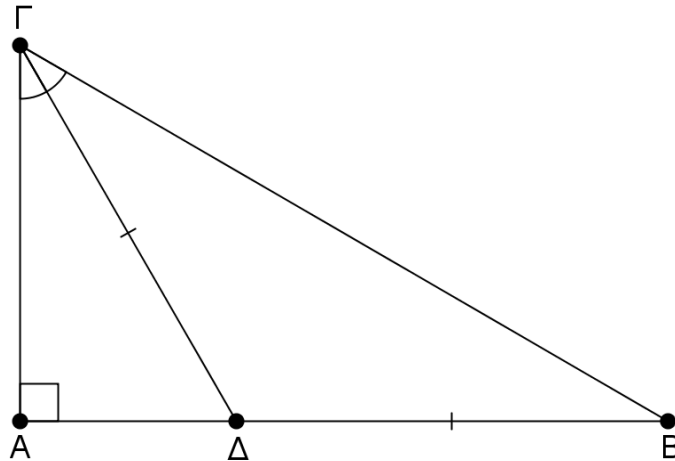
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

Μονάδες 12

β) $AB = 3 \text{ cm}$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5574)

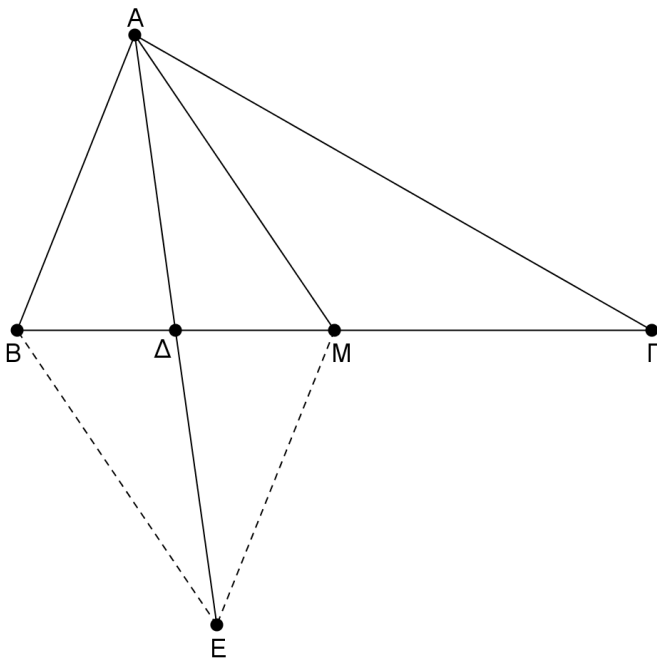
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) $ME = M\Gamma$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_554)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ϵ) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

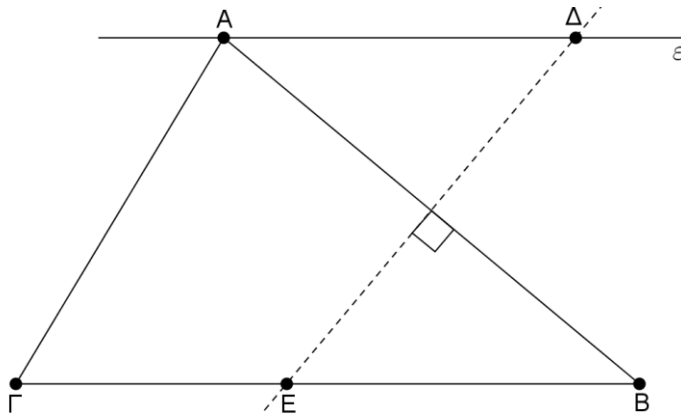
Μονάδες 6

β) Αν M είναι το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5565)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // ΓΔ$) με $AB = 6$, $BΓ = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
 Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα .

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου ΑΒΓΔ .

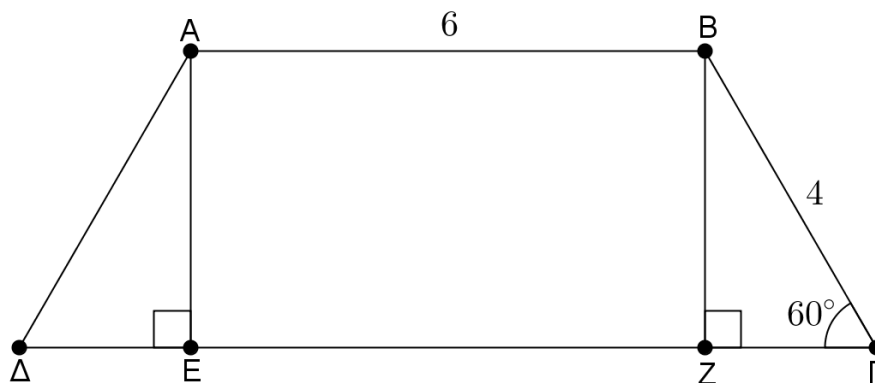
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ , ΒΖΓ είναι ίσα .

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ .

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5566)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // ΓΔ$) με $AB = BΓ = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπέζιου ΑΒΓΔ .

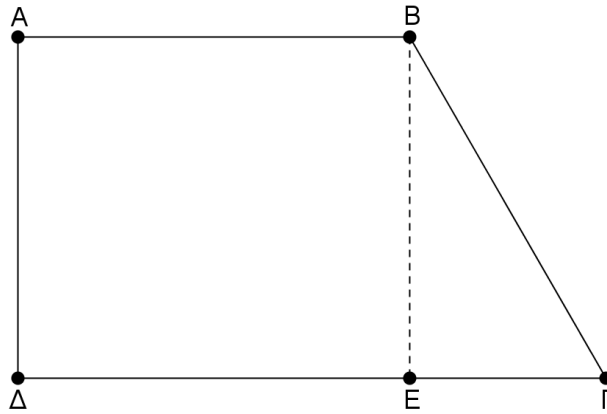
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = BΓ$.

Μονάδες 9

γ) Αν Μ , Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ , ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5568)

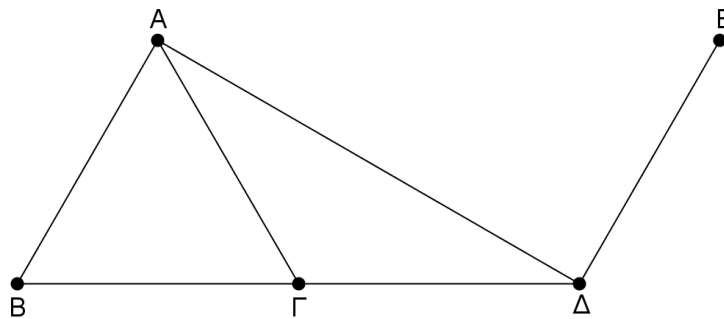
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$ (A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5575)

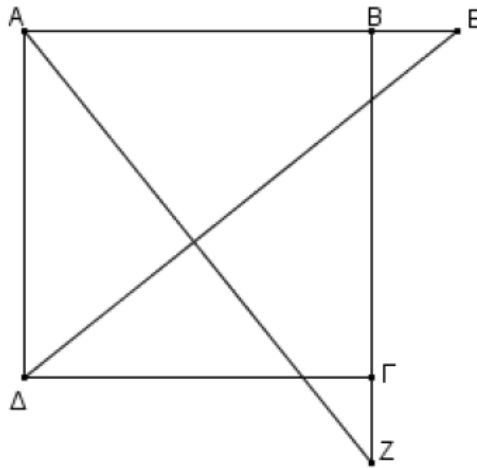
Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5577)

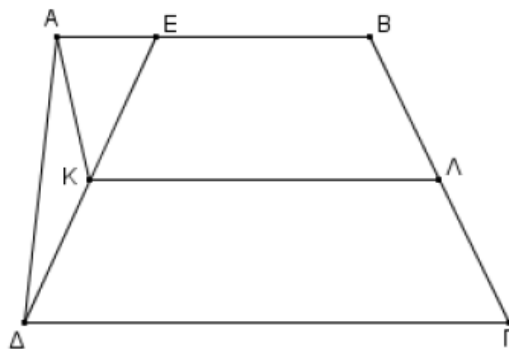
Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) με AB=3, ΓΔ=4. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε AE=1. Στο τραπέζιο EBΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπέζιου EBΓΔ.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5581)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ (2_5583)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$), $2\Gamma = B$ και ΑΔ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ABΓ.

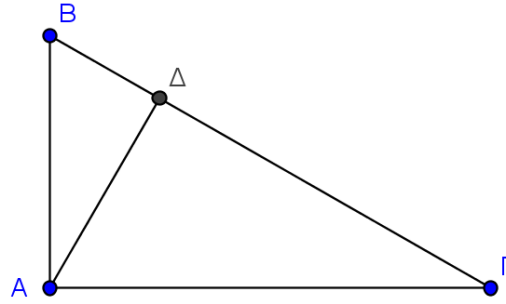
Μονάδες 9

β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ.

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5585)

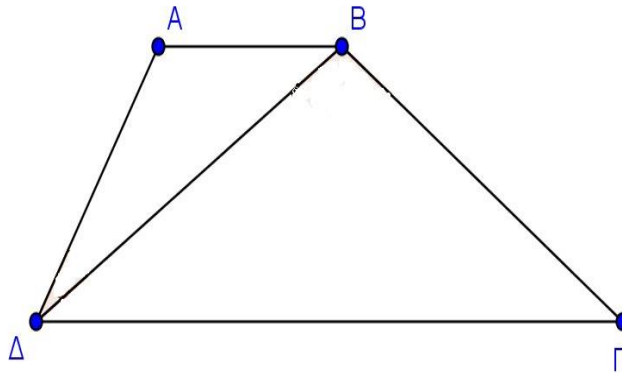
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\Delta B\Gamma = 110^\circ$ και $A\Delta B = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ .

Μονάδες 11

β) Τη γωνία A .

Μονάδες 14



ΑΣΚΗΣΗ (2_5586)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i) ABE

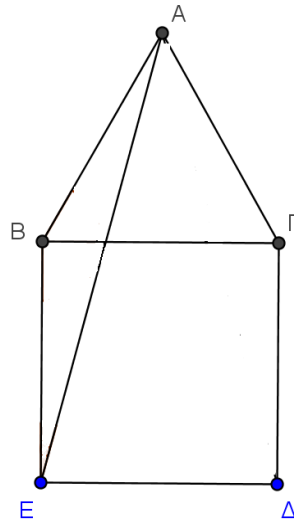
Μονάδες 8

ii) BEA

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5587)

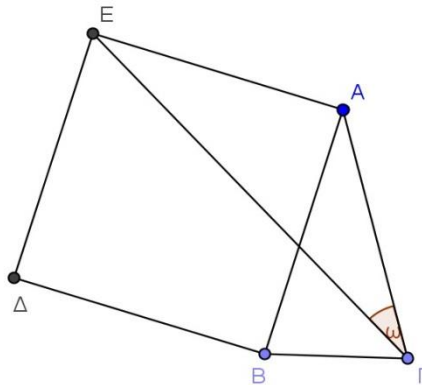
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AG\epsilon$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) $2\epsilon GA = 90^\circ - \text{BA}\Gamma$

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5588)

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $AG\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

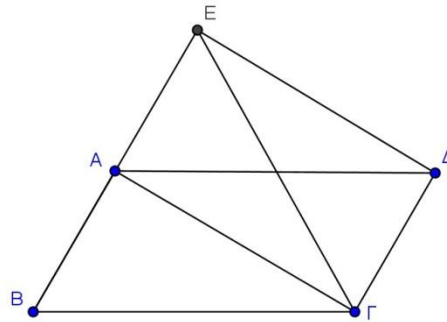
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) $\text{B}\Gamma A = \text{A}\Delta E$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_5589)

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

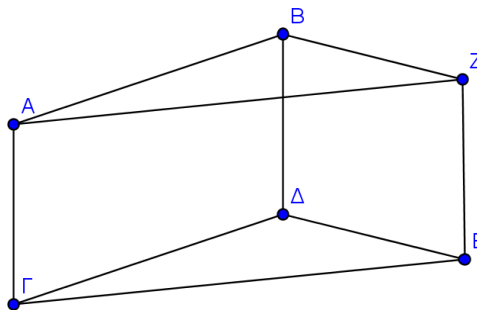
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

β) $ABZ = \Gamma\Delta E$.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5590)

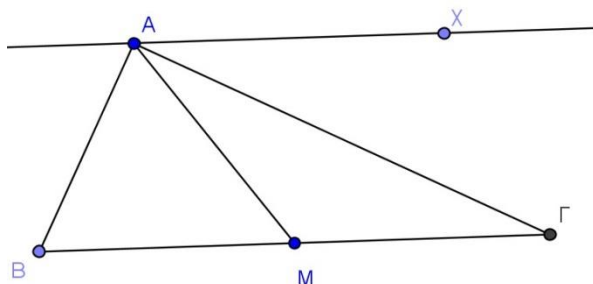
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $MA\Gamma = M\Gamma A$

Μονάδες 12

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5593)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$ τότε:

i) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

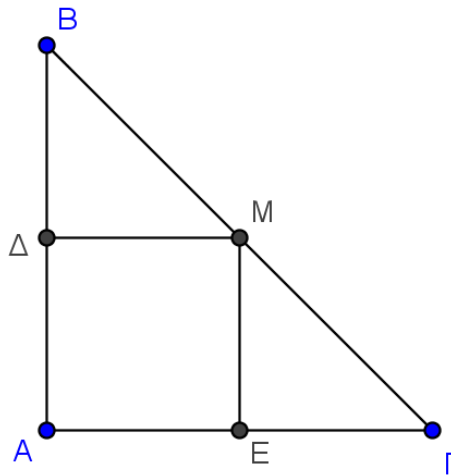
Μονάδες 8

ii) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5601)**

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 13

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_5612)

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

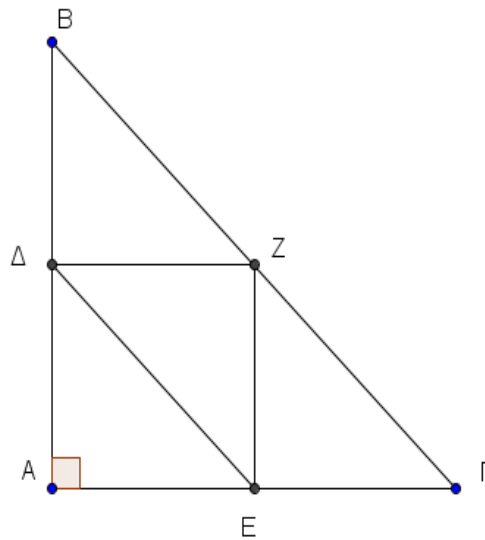
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5615)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

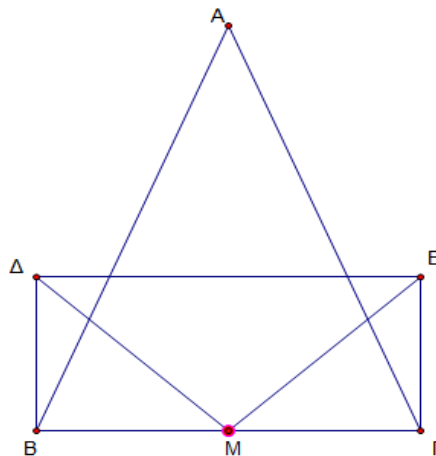
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5617)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

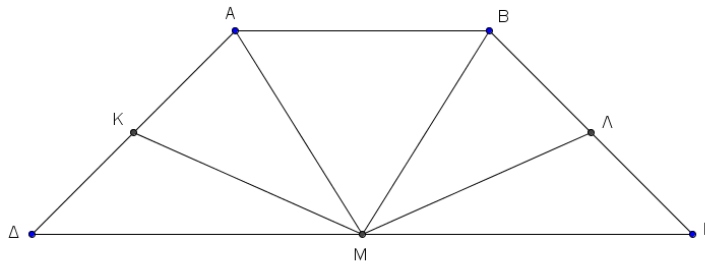
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5621)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $ΕΔ = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $ΑΓ = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

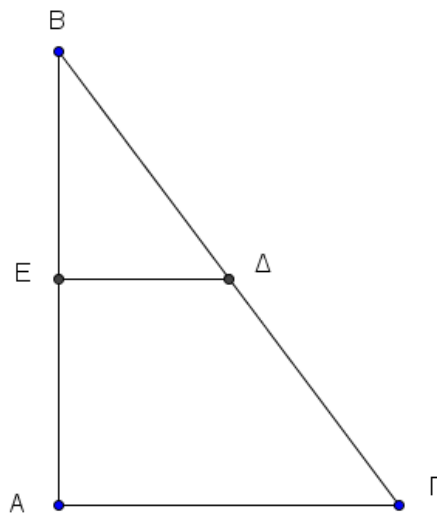
β) $ΒΓ = \dots\dots\dots$

Μονάδες 9

γ) $ΑΔ = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



ΑΣΚΗΣΗ (2_5635)

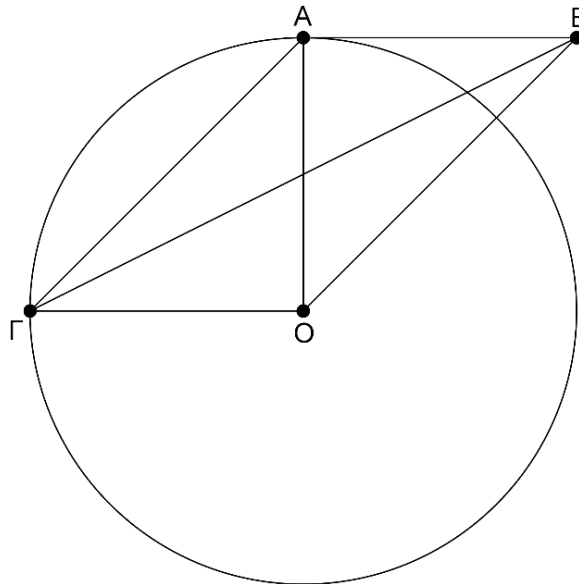
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με $ΑΒ = ΟΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΟΓ.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5637)

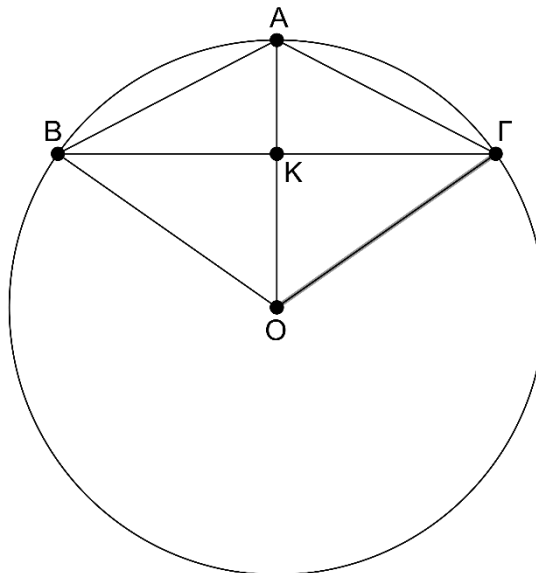
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma O B$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Gamma O B$.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5638)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma = (AB = A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$

Μονάδες 10

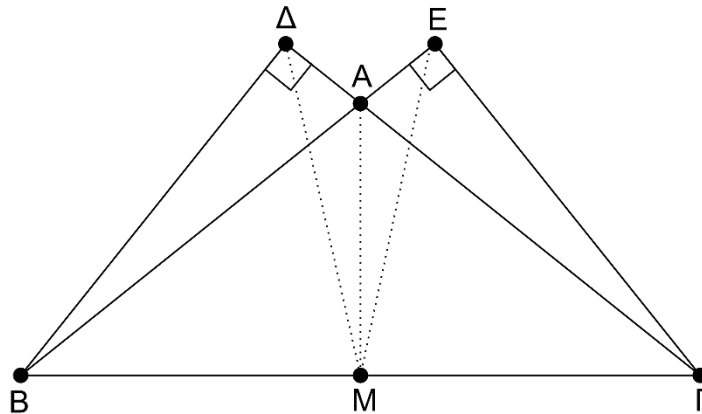
β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

Μονάδες 8

ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (2_5641)

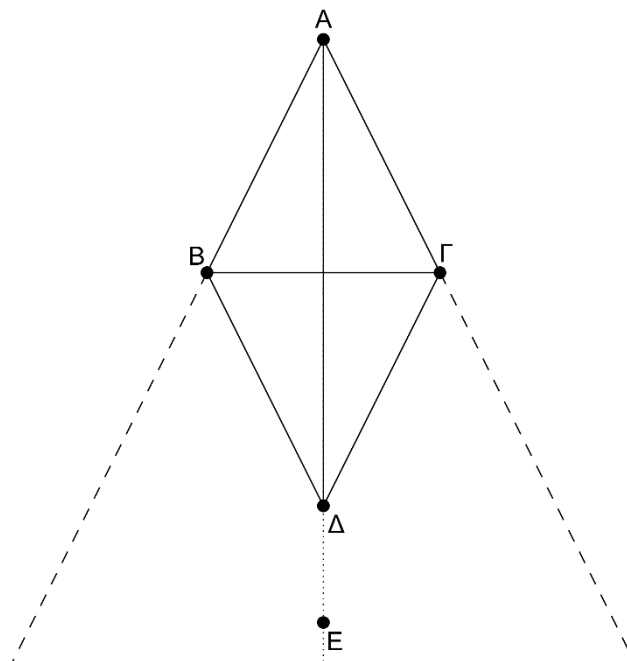
Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).

Μονάδες 10

β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5644)

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $A = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα AEB και $AZ\Delta$.

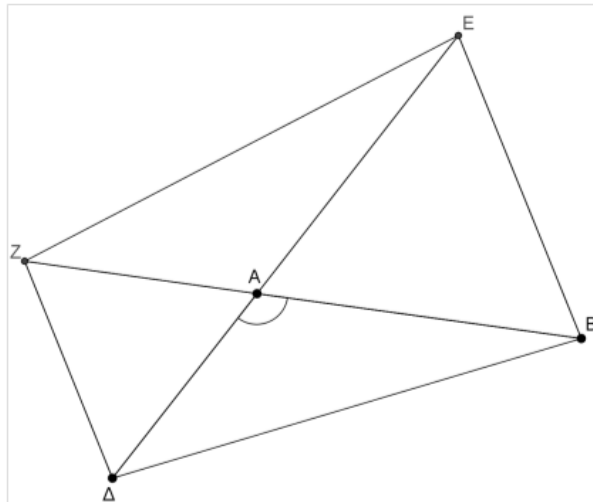
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5646)

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

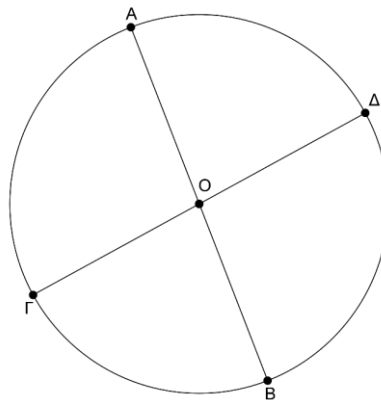
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες.

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5653)

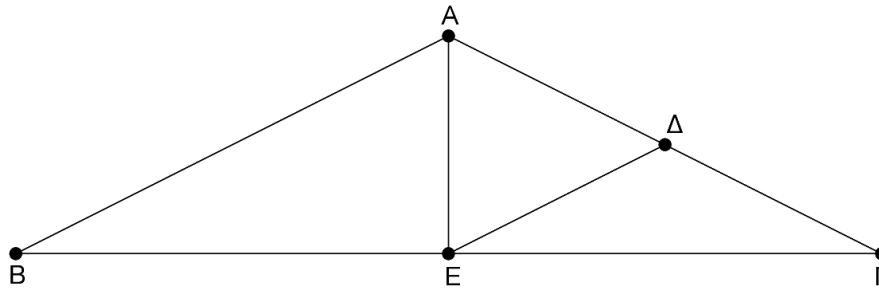
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = ΑΓ$, και γωνία $B = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα τν ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (2_5654)

Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

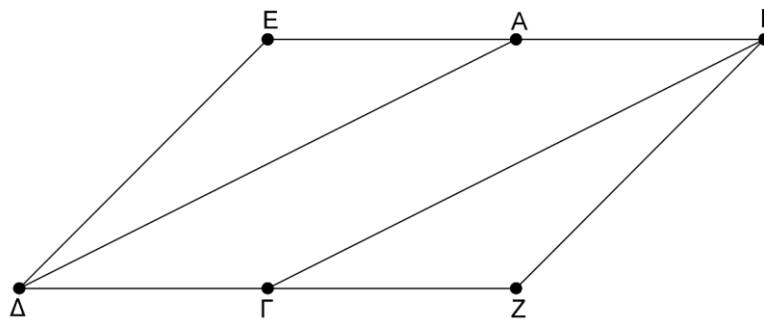
Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = E\Delta$

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο EBZΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_6580)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$ και $B > \Gamma$ φέρουμε το ύψος του AΔ και την διάμεσο AM στην πλευρά BΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες B και ΓAΔ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $AM\Delta = 2 \cdot \Gamma$

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_6582)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$.

Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο AΔE είναι ίσο με το τρίγωνο BΓZ

Μονάδες 9

γ) Το τετράπλευρο ABZE είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ (2_6583)

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,

Μονάδες 8

ii) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 8

β) Αν E και Z είναι τα μέσα των $N\Delta$ και ΔK αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $NKZE$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (2_6585)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου,

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου..

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_6590)

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\Delta = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

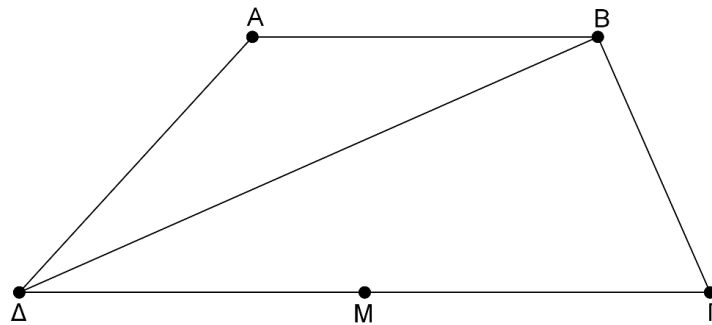
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες 9

β) Η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6882)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_6885)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ

τέτοιο ώστε $AD = AG$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι :

α) $ΔΓ \perp ΕΓ$

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $ΕΑΓ$ είναι διπλάσια της γωνίας $ΑΔΓ$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_7452)

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{B}=120^{\circ}$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω $ΕΖ$ η διάμεσος του τριγώνου $ΔΕΓ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 8)

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZΓ$.

(Μονάδες 8)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 6ο

Εγγεγραμμένα σχήματα



ΑΣΚΗΣΗ (2_3413)

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ.

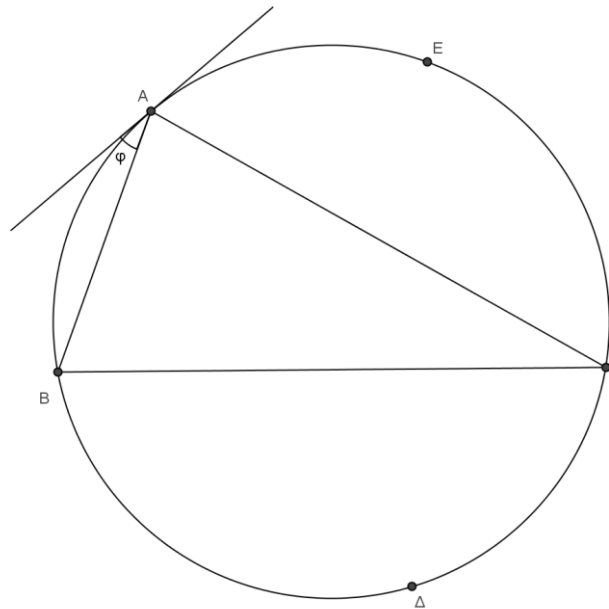
Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 18

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (2_5009)

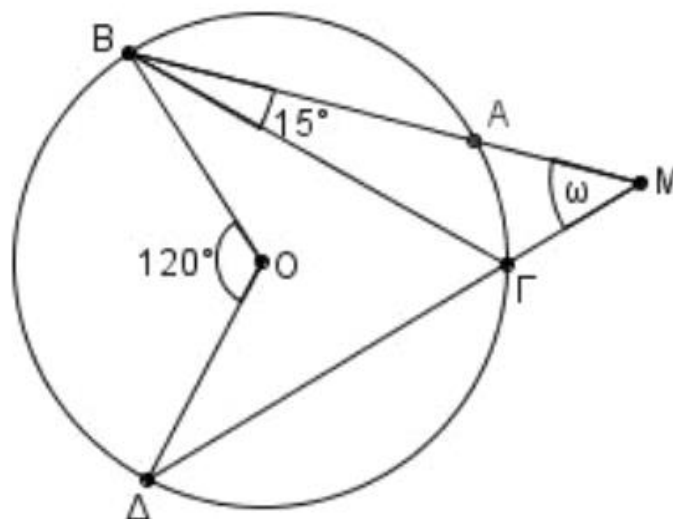
Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15°

α) Να υπολογίσετε την γωνία ΒΓΔ

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5012)

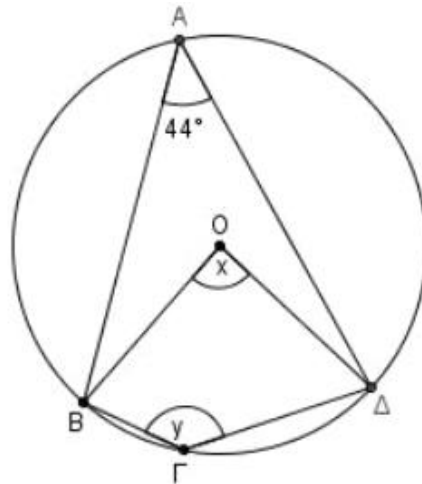
Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία BAD να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$

α) Να υπολογίσετε την γωνία x

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5037)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , $BO\Gamma$ και $\Gamma O A$.

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $BO\Gamma$.

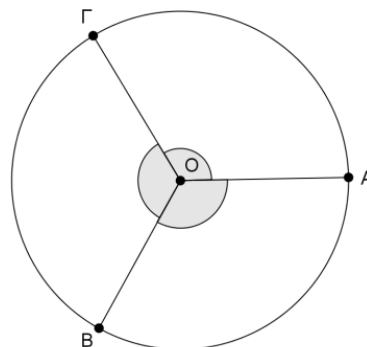
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

(Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $O\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5153)

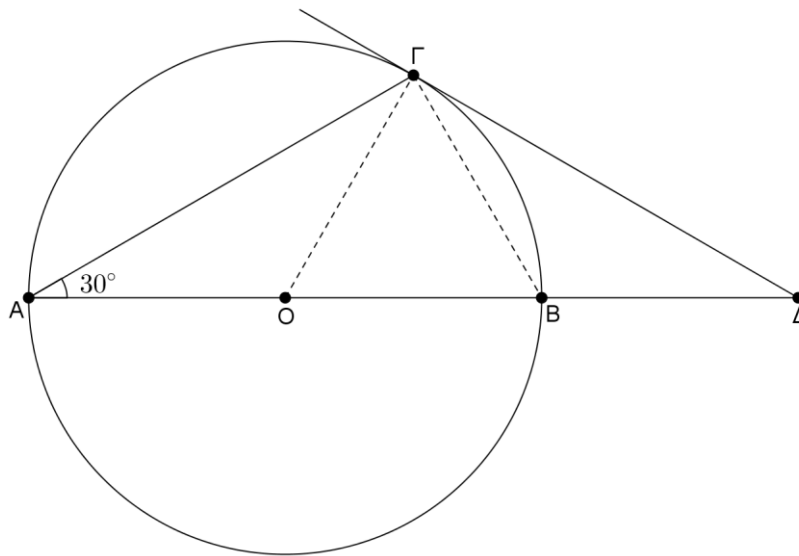
Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , χορδή $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5608)

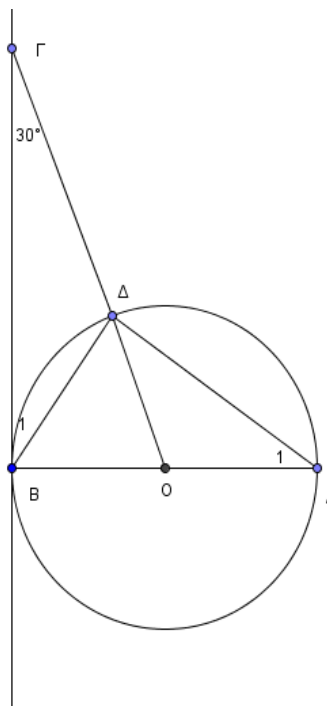
Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρο του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία $B\Gamma O$ να είναι ίση με 30° . αν η $O\Gamma$ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $O\Gamma = 2OA$

Μονάδες 12

β) $B\Gamma = A\Delta$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5623)

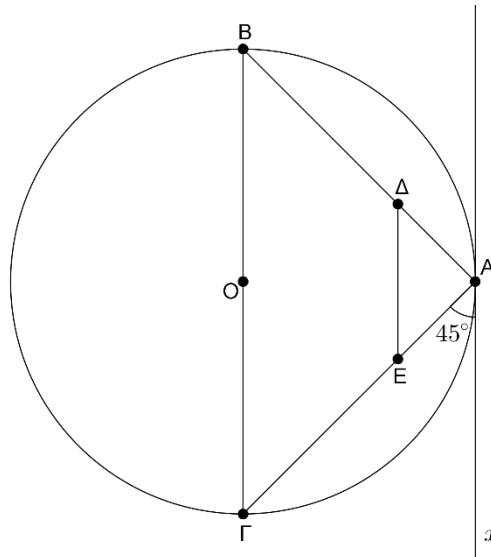
Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45° . φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_6587)

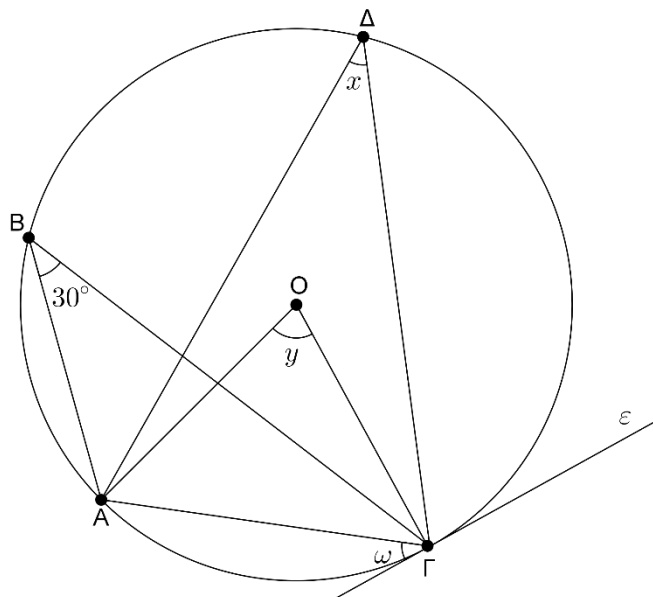
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας .

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_6588)

Έστω κύκλος κέντρου K , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ ,

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta A$.

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9

