

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1, 2)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω t_1, t_2, \dots, t_n οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n που έχουν μέση τιμή \bar{x} .

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών

$$t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$$

είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

2. Πώς ορίζεται η διακύμανση (ή διασπορά) των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n που έχουν μέση τιμή \bar{x} και πώς η τυπική απόκλισή τους; Να γράψετε ένα μειονέκτημα της διακύμανσης έναντι της τυπικής απόκλισης.

Μονάδες 5

3. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου μίας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το A στο $x_1 \in A$.

Μονάδες 3

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο πραγματικό αριθμό, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, όπου l_1 θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$, όπου n φυσικός αριθμός.

Μονάδες 2

β) Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα στον άξονα κίνησής του και εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι πάντοτε $f(t_0) = v'(t_0)$, όπου $v(t_0)$ η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 2

γ) Σε οποιαδήποτε καμπύλη συχνοτήτων μίας συνεχούς μεταβλητής, ο αριθμός των κλάσεων είναι αρκετά μικρός (τείνει στο μηδέν) και το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μεγάλο (τείνει στο άπειρο).

Μονάδες 2

δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό και παριστάνει ένα μέτρο σχετικής διασποράς των τιμών.

Μονάδες 2

ε) Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν πάντοτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x-3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 675x + 2016}{e^x} f(x)$.

Μονάδες 6

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f .

Μονάδες 10

4. Να αποδείξετε ότι $e^{x-4} \geq x-3$, για κάθε $x \in (3, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 16 \cdot s - 2 \cdot \bar{x}, & x = 3 \end{cases}$ όπου $\bar{x} \neq 0$ είναι η μέση

τιμή και s η τυπική απόκλιση, των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n ενός δείγματος μεγέθους n .
Θεωρούμε ότι το σημείο $M(4, 3s)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

α) Αποδείξτε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

β) Αποδείξτε ότι $\bar{x} = 24$ και $s = 3$.

Μονάδες 5

γ) Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε κανονική ή περίπου κανονική κατανομή και 5 παρατηρήσεις έχουν τιμή μικρότερη του 18 να βρείτε:

i. Το μέγεθος του δείγματος n .

Μονάδες 5

ii. Το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(21, 30)$.

Μονάδες 5

δ) Προσθέτουμε σε κάθε μια από τις παρατηρήσεις t_1, t_2, \dots, t_n την ίδια θετική ακέραια ποσότητα c . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c ώστε το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτει να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2\lambda - 3)x + \lambda + 2$, όπου $\lambda > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι η $y = 2\lambda x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

Μονάδες 7

Β) Αν x_1, x_2, \dots, x_n οι τετμημένες των σημείων της παραπάνω εφραπτομένης με μέση τιμή $\bar{x} = 2$ και y_1, y_2, \dots, y_n οι αντίστοιχες τεταγμένες τότε:

i. Να βρείτε το λόγο $\frac{s_x}{s_y}$ όπου s_x, s_y οι τυπικές αποκλίσεις των τετμημένων και τεταγμένων αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ii. Αν CV_x, CV_y οι συντελεστές μεταβολής των τετμημένων και τεταγμένων αντίστοιχα, να συγκρίνετε την ομοιογένεια των δύο αυτών δειγμάτων.

Μονάδες 8

iii. Αν $s_x = 5 \cdot s_y$, να βρείτε τη μέση τιμή \bar{y} των τεταγμένων.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Α επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος**, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Το θέμα Β επιμελήθηκε ο **Βρυώνης Δημήτριος**, Μαθηματικός του 4^{ου} Γενικού Λυκείου Καλαμάτας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο**, **Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Έλενα**.