

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 1)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 9

2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 6

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν ισχύει $f'(x_0)g'(x_0) + 1 = 0$, τότε οι εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις των f, g στο σημείο x_0 είναι κάθετες.

Μονάδες 2

(β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \square και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \square$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 2

(γ) Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 2

(δ) Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x) = f(g(x))$ είναι ίση με $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Μονάδες 2

(ε) Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$, τη χρονική στιγμή t , τότε η επιτάχυνση του κινητού θα είναι $a(t) = x''(t)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(x+1) = x + 2015 - f(2018) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(2018) = 2016$.

Μονάδες 6

2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι η ευθεία $y = x - 2$.

Μονάδες 7

3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$ στο οποίο η f είναι εφαπτομένη.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2(x-2)$.

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

2. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 4x}{x^2 + 3x - 4}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 2\alpha x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha = \text{σταθερά}$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x να μηδενίζεται για $x_0 = 2$.

Μονάδες 2

β) Για $\alpha = 8$, να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 5

γ) Για $\alpha = 8$, να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, όπου $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 12} - 4}$.

Μονάδες 3

Β. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = e^{8t-2t^2} + 4$ σε m με $t \in [0,12]$, sec,

α) Πότε το υλικό σημείο κινείται στην αρνητική κατεύθυνση και πότε στη θετική κατεύθυνση;

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την επιτάχυνση του υλικού σημείου, όταν αυτό είναι ακίνητο.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 6 δευτερολέπτων.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ