ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 1)

ΘΕΜΑ Α

1. Σχολικό βιβλίο σελ. 28-29

2. Σχολικό βιβλίο σελ. 13

3. **(α)** Σωστό,

(β) Σωστό,

(γ) Σωστό,

(δ) Λάθος,

(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

1. Η σχέση $f(x+1)=x+2015-f(2018)$ για $x=2017$ γίνεται:

$$f(2017+1)=2017+2015-f(2018)\Rightarrow f(2018)=4032-f(2018)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(2018)=4032\Rightarrow f(2018)=2016$$

2. Στη σχέση $f(x+1)=x+2015-f(2018)$ αν θέσουμε όπου $f(2018)=2016$ θα έχουμε: $f(x+1)=x+2015-2016\Rightarrow f(x+1)=x-1$ **(1).**

Στην **(1)** θέτουμε όπου $x+1=y\Rightarrow x=y-1$ και αυτή γίνεται: $f(y)=y-1-1\Rightarrow f(y)=y-2$. Άρα $f(x)=x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ο τύπος της f είναι η ευθεία $y=x-2$.

3. Για να βρούμε το κοινό σημείο των f,g θα λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c} f(x)=x-2 \\ g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x-2 \\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x-2 \\ x-2=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x-2 \\ 2x-4=x^2-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x-2 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=x-2 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y=-1 \\ x=1 \end{array}\right\}$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $M(1,-1)$.

Η εφαπτομένη της g στο Μ θα έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha=g'(1)=1$, αφού $g'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)'=x$. Επειδή το $M(1,-1)\in(\varepsilon)$ θα ισχύει: $-1=1+\beta \Leftrightarrow \beta=-2$, οπότε η εφαπτομένη θα είναι (ε): $y=x-2$, άρα ταυτίζεται με την f.

ΘΕΜΑ Γ

1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left[(x+1)^2(x-2)\right]'=\left[(x+1)^2\right]'(x-2)+(x+1)^2(x-2)'=$$
$$=2(x+1)(x-2)+(x+1)^2=(x+1)\left[2(x-2)+(x+1)\right]=(x+1)[2x-4+x+1]=$$
$$=(x+1)(3x-3)=3\left(x^2-1\right)$$

Άρα $f'(x)=3\left(x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1$
- Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		τ.μ.		τ.ε.	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.
- Παρουσιάζει τ.μ το $f(-1)=(-1+1)^2(-1-2)=0$ και τ.ε το $f(1)=(1+1)^2(1-2)=-4$.

2. Αναζητούμε το x_0 στο οποίο έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης η συνάρτηση: $f'(x)=3(x^2-1),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $f''(x)=6x,\ x\in R$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 6x>0 \Leftrightarrow x>0$ και
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow 6x<0 \Leftrightarrow x<0$
- Η μονοτονία και τα ακρότατα της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘	ο.ε	↗

Άρα η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$. Είναι $f(0)=(0+1)^2(0-2)=-2$, οπότε το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $M(0,-2)$.

3. Είναι $f(1)=-4$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))=(1,-4)$ έχει εξίσωση (ε): $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha=f'(1)=0$ και αφού $A(1,-4)\in(\varepsilon)$:
$-4=0\cdot1+\beta \Leftrightarrow \beta=-4$.

Άρα η εφαπτομένη είναι: $y=-4$.

4. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+4x}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2(x-2)+4x}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2(x-2)+4x}{x^2+3x-4}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+4}=\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ Δ

1. α) Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x είναι

$f'(x)=3x^2+2x-2\alpha$, έτσι έχουμε $f'(2)=0 \Leftrightarrow 16-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=8$

β) Θα μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Για $\alpha=8$ έχουμε $f'(x)=3x^2+2x-16 \Rightarrow f''(x)=6x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-1/3$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘	min	↗

Άρα η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\dfrac{1}{3}$ και $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{49}{3}$

γ) $g(x)=\dfrac{3x^2+2x-16}{\sqrt{x^2+12}-4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x-16}{\sqrt{x^2+12}-4}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x^2+2x-16)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+8)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}{(x-2)(x+2)}=28$$

2. α) Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ενός κινητού είναι η στιγμιαία ταχύτητα

$x'(t) = (8-4t)e^{8t-2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	0		2		12
$x'(t)$		+	○	-	
		Θετική κατεύθυνση		Αρνητική κατεύθυνση	

β) τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$ η ταχύτητα είναι μηδέν, άρα το υλικό σημείο είναι ακίνητο.

Έχουμε $\alpha(t) = x''(t) = 4(3-2t)(5-2t)e^{8t-2t^2}$.

Για $t_0 = 2$, έχουμε $\alpha(2) = -4e^8$.

γ) Η απόσταση που διανύθηκε στη διάρκεια των $2\sec$ είναι

$S_1 = |s(2)-s(0)| = |e^8 - 1| = e^8 - 1$ και η απόσταση που διανύθηκε από το $2\sec$ έως το $6\sec$ είναι $S_2 = |s(6)-s(2)| = |e^{-24} - e^8| = e^8 - e^{-24}$

Άρα το ολικό διάστημα είναι $S_1 + S_2 = 2e^8 - e^{-24} - 1$.