## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2000

### ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι:

Α). Η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Β). Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Γ). Υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

### ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$ ,$t \geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Α). Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

Β). Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001

### ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

Α). Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Β). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f στο σημείο Α(4,f(4)).

Γ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

### ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι:

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in R$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

Α). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ). Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i)$f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$ , για κάθε $x \in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$ , για κάθε $x \in R$.

Α). Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

Β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Γ). Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ .

Δ). Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2002

### ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^\nu z$, $\nu \in N^*$.

Α). Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0 .

Β). Αν $|z| = \rho$ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Γ). Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

### ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

Α). Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Β). Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

### ΘΕΜΑ 4ο

Α). Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Β). Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in R$ και f(0) = 0 .

i) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

ii) Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ , για κάθε x > 0.

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$$ .

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α,β∈IR και w= $3z - i\bar{z} + 4$ , όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

Α). Να αποδείξετε ότι ;Re(w)=3α-β+4, Im(w)=3β-α.

Β). Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2.

Γ). Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

### ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$ .

Α). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Β). Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε x∈R

Γ). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της $f^{-1}$.

Δ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f^{-1}$, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

Α). Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).

Β). Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

Γ). Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$ .

Α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Β). Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Γ). Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο IR και $f(0)=f(\frac{3}{2}) = 0$.

Α). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Β). Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx$ , α∈R

Γ). Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:R→R τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε x∈IR , ισχύει

$$g(x) = \int_{1}^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$$

όπου z=α+βi∈C, με α, β∈ R*, τότε:

Α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR και να βρείτε τη g΄.

Β). Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

Γ). Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$

Δ). Αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2005

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$, $z_2$, $z_3$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

Α). Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$

Β). Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

Γ). Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, λ > 0.

Α). Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Β). Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda ex$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Γ). Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Δ). Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$ .

## ΘΕΜΑ 4°

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=0$.

Α). Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .

Β). Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}$.

Γ).Δίδονται οι συναρτήσεις:

$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$ .

Δ). Δείξτε ότι η εξίσωση

$\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

# ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2006

## ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

Α). Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ της f και να βρείτε τον τύπο της.

Γ).

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $f^{-1}$ με την ευθεία y=x.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $f^{-1}$.

## ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Α). Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $Re(z_1\bar{z}_2) \geq -1$

Β). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $z_1, z_2, z_3$ στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

## ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

Α). Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Β). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Γ). Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο A(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με β ∈ IR ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

Δ). Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

# ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2007

## ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με $\alpha \in R$.

Α). Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ =1.

Β). Έστω $z_1, z_2$ οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i) Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z_1$ και $z_2$ .

ii) Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

## ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in R$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ , $\kappa \in Z$ .

Α). Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Β). Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Γ). Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και $x_3$ η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Δ). Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία
$y = -2x - 2ημ^2θ$.

### ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε x ε [0, 1].
Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$, $x \in [0, 1]$,

$G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in [0, 1]$.

Α). Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1].
Β). Να αποδειχθεί ότι:
$f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].
Γ). Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Δ). Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} ημt^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

### ΘΕΜΑ 2°

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6$ και $|w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$ τότε να βρείτε:
Α).το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .
Β). το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .
Γ). την ελάχιστη τιμή του $|w|$
Δ). την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

### ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
Β). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
Γ). Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{α}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Δ). Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ , για κάθε $x > 0$ .

### ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$

Α). Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$
Β). Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
$g''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$
Γ). Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει
ότι $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και
$g(0)=g'(0)=1$, τότε
 i) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$
 ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2009

### ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς
$z=(2λ+1)+(2λ-1)i$ , $λ \in R$
Α).
α.Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $λ \in R$.
β.Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.
Β).Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ όπου $z_0$ ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

### ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α^x - \ln(x+1)$ , $x > -1$ όπου $α > 0$ και $α \neq 1$
Α). Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ , να αποδείξετε ότι α=e
Β). Για α=e,
 i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
 ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$
 iii) αν β, γ $\in (-1, 0)\cup(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(β)-1}{x-1} + \frac{f(γ)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2)

## ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$,

$x \in [0, 2]$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

Α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα
[0, 2].

Β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$

Γ). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

Δ). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^{\xi} tf(t)dt = \xi^2\int_0^{\alpha} f(t)dt$$

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in C$ με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες $z_1$ και $z_2$ της εξίσωσης.

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx$.

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) \neq x$ και $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)= (f(x))^2-2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2011

### ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}.$$

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

ii) Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$.

iii) Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$.

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$

ii) $\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο ℝ και ότι f(x)=g(x) για κάθε x∈ℝ.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, x∈ℝ.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \int_1^x f\left(t^2\right)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

## ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1) και $|w-5\overline{w}| = 12$ (2)

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα
ρ = 1

**Β2.** Αν $z_1$, $z_2$ είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$ .

**Β3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

**Β4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z-w| \le 4$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = (x - 1) ℓnx - 1, x>0

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1$=(0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2$=[1,+∞). Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Γ3.** Αν $x_1$, $x_1$ με $x_1$< $x_1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0$∈( $x_1$, $x_2$) τέτοιο, ώστε f΄( $x_0$) + f($x_0$) = 2012

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = f(x) + 1 με x>0, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=e.

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:(0,+∞)⟶ℝ, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

- f(x) ≠ 0
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \ge \frac{x-x^2}{e}$
- $\ell nx - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot|f(t)|$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell nx - x)$, x>0, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$$

**Δ3.** Με τη βοήθεια της ανισότητας ℓnx ≤x-1, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ , x>0 όπου α>0, είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:
F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x>0

**Δ4.** Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈ (β,2β) τέτοιο ώστε: F(β) + F(3β) = 2F(ξ) .