mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Λύσεις
των
θεμάτων

Έκδοση 1η (19/06/2017, 17:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=59025

Συνεργάστηκαν οι:

*Βαρβεράκης Ανδρέας, Βισβίκης Γιώργος, Κακαβάς Βασίλης,
Καλδή Φωτεινή, Καρδαμίτσης Σπύρος, Κατσίπης Νίκος,
Κούτρας Στάθης, Κωστάκος Γρηγόρης, Μπεληγιάννης Αθανάσιος,
Μουρούκος Βαγγέλης, Πρωτοπαπάς Λευτέρης,
Παπαγρηγοράκης Μίλτος, Ρίζος Γιώργος, Στεργίου Μπάμπης,
Στόγιας Σωτήρης, Συννεφακόπουλος Αχιλλέας, Τηλέγραφος Κώστας,
Τσιφάκης Χρήστος, Χασάπης Σωτήρης, Φραγκάκης Νίκος*

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

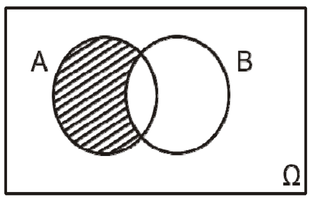
β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$, με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $B-A$.



Μονάδες 10

ΛΥΣΗ:

Α1 . Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 14.

Α3. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 72.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

xi	vi
1	2
3	3
5	4
9	1

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

α. η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)

β. η διάμεσος δ (μονάδες 5)

γ. η διακύμανση s^2 (μονάδες 7)

Μονάδες 18

Β2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Β1.

α. Το μέγεθος v του δείγματος είναι $v = 2+3+4+1 = 10$, επομένως η μέση τιμή $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4}{v} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot 4 + 9\cdot 1}{10} = \frac{40}{10} = 4\,.$$

β. Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε αύξουσα σειρά:

$$1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 9\,.$$

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσος δ είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

$$\delta = \frac{3+5}{2} = 4\,.$$

γ. Η διακύμανση s^2 είναι

$$s^2 = \frac{v_1(x_1-\bar{x})^2 + v_2(x_2-\bar{x})^2 + v_3(x_3-\bar{x})^2 + v_4(x_4-\bar{x})^2}{v} =$$

$$= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Η τυπική απόκλιση s είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής CV είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

mathematica.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x-1$.

Είναι $\begin{cases} f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2} \\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x-1<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Το πρόσημο της $f'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	$-$		$+$
f(x)	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. Άρα, η f έχει ελάχιστο στο $x=\dfrac{1}{2}$ ίσο με $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Γ2. Έστω (ε) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(2, f(2)).

Οπότε η (ε) έχει εξίσωση της μορφής: $y=f'(2)x+\beta$.

Είναι $f'(2)=2\cdot 2-1=3$ και $f(2)=2^2-2+1=3$.

Αφού το σημείο Α ανήκει στην (ε), ισχύει $f(2)=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow 3=6+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι (ε): $y=3x-3$

Γ3. Έστω Β(0, y) το σημείο τομής της ε με τον y'y και Γ(x, 0) το σημείο τομής της ε με τον x'x.
Το σημείο Β ανήκει στην(ε) άρα είναι $y = 3\cdot 0 - 3 = -3 \Leftrightarrow y = -3$ οπότε Β(0, −3).
Το σημείο Γ ανήκει στην(ε) άρα είναι $0 = 3\cdot x - 3 \Leftrightarrow x = 1$ οπότε Γ(1,0).

Γ4. Για $x \neq 1$ είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.
Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μία μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα.

Α: «η δεύτερη μπάλα που θα διεξαχθεί να είναι μαύρη».

Β: «να εξαχθούν δύο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2**.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$A',\ A\cap B,\ A-B,\ B-A$ (μονάδες 8)

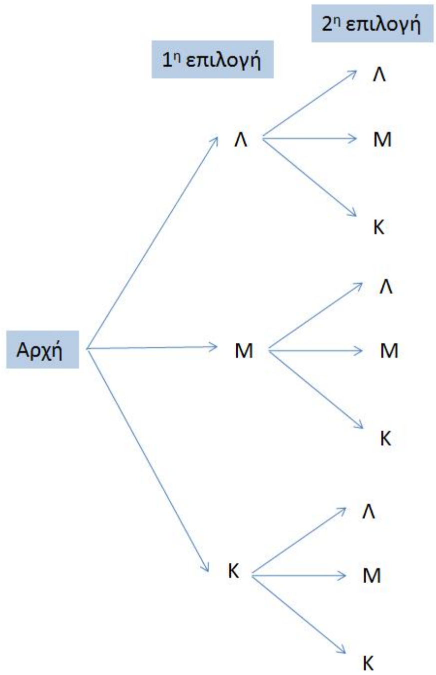
β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο Α όσο και με το ενδεχόμενο Β, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα Ρ(Γ). (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΛΥΣΗ:

Δ1. Έστω τα ενδεχόμενα:

Λ = "Η μπάλα που επιλέχθηκε είναι λευκή",
Μ = "Η μπάλα που επιλέχθηκε είναι μαύρη" και
Κ = "Η μπάλα που επιλέχθηκε είναι κόκκινη".



Τότε: $\Omega=\{ΛΛ,ΛΜ,ΛΚ,ΜΛ,ΜΜ,ΜΚ,ΚΛ,ΚΜ,ΚΚ\}$.

Δ2. Είναι: $A=\{ΛΜ,ΜΜ,ΚΜ\}$

και $B=\{ΛΜ,ΛΚ,ΜΛ,ΜΚ,ΚΛ,ΚΜ\}$.

Δ3.

α. Έχουμε ότι:

$A'=\{ΛΛ,ΛΚ,ΜΛ,ΜΚ,ΚΛ,ΚΚ\}$, με $N(A')=6, N(\Omega)=9$,

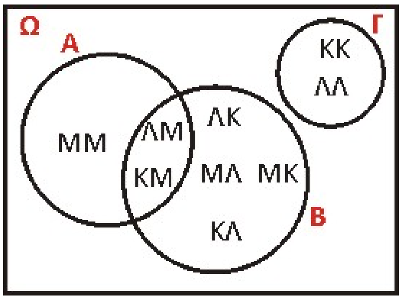
άρα $P(A')=\dfrac{N(A')}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

Επίσης: $A\cap B=\{ΛΜ,ΚΜ\}$, άρα $N(A\cap B)=2$ και $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{9}$.

Επιπλέον: $A-B=\{ΜΜ\}$ με $N(A-B)=1$, άρα $P(A-B)=\dfrac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{9}$.

Τέλος: $B-A=\{ΛΚ,ΜΛ,ΜΚ,ΚΛ\}$ με $N(B-A)=4$, άρα $P(B-A)=\dfrac{N(B-A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{9}$.

β. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το Α είναι ασυμβίβαστο με το Γ, άρα το Γ δεν έχει κοινά στοιχεία με το Α και ότι το Β είναι ασυμβίβαστο με το Γ, άρα το Γ δεν έχει κοινά στοιχεία με το Β, οπότε το Γ δεν έχει κοινά στοιχεία με το $A\cup B$, δηλαδή έχει στοιχεία του $(A\cup B)'=\{ΚΚ,ΛΛ\}$.



Επομένως και αφού τα ενδεχόμενα είναι απλά ισοπίθανα η μέγιστη τιμή της $P(\Gamma)$ είναι το $\dfrac{2}{9}$ και επιτυγχάνεται όταν $\Gamma=(A\cup B)'=\{ΚΚ,ΛΛ\}$.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β1. α και γ

Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης με την βοήθεια πίνακα

x_i	v_i	$v_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i (x_i - \bar{x})^2$
1	**2**	**2**	**-3**	**9**	**18**
3	**3**	**9**	**-1**	**1**	**3**
5	**4**	**20**	**1**	**1**	**4**
9	**1**	**9**	**5**	**25**	**25**
	10	**40**			**50**

Με βάση τις συμπληρωμένες στήλες του παραπάνω πίνακα έχουμε

α. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι $\bar{x} = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{4} v_i x_i = \frac{1}{10} \cdot 40 = 4$

γ. Η διακύμανση s^2 είναι $s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{4} v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \cdot 50 = 5$

Γ1. Είναι $f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ με το "=" αν και μόνο αν $x = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, η f έχει ελάχιστο $\frac{3}{4}$ για $x = \frac{1}{2}$.

Γ1. Εναλλακτικά, η συνάρτηση παρουσιάζει για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{1}{2}$ ελάχιστο ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{3}{4}$.

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στην $y = f(x)$ στο $A(2, f(2))$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2).$$

Είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$ και $f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - 3 = 3(x - 2), \text{ δηλ. } y = 3x - 3.$$

Γ4. Για $x \neq 1$, έχουμε, $\frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{f(x)} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 1}$

Είναι $f(x) - 1 = x^2 - x = x(x - 1)$, οπότε $\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$,

κι έτσι

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{f(1)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Δ3

β. Καταρχήν θα αποδείξουμε ότι αν Χ, Υ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ισχύει η συνεπαγωγή: $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow X \subseteq Y'$.

Απόδειξη

Έστω στοιχείο $w \in X$. Αφού $X \cap Y = \varnothing$, έχουμε ότι $w \notin Y \Rightarrow w \in Y'$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι: $A \cap \Gamma = \varnothing$ και $B \cap \Gamma = \varnothing$, οπότε $\Gamma \subseteq A'$ (Ι), $\Gamma \subseteq B'$ (ΙΙ).

Όμως, $A' = \{\Lambda\Lambda, \Lambda K, M\Lambda, MK, K\Lambda, KK\}$ και $B' = \{\Lambda\Lambda, MM, KK\}$, οπότε $\Gamma \subseteq \{\Lambda\Lambda, KK\}$ (ΙΙΙ),

αφού, αν $\{MM\} \in \Gamma$, τότε λόγω της (Ι) θα ίσχυε $\{MM\} \in A'$, είναι άτοπο.

Συνεπώς από την (ΙΙΙ) έχουμε: $P(\Gamma) \le P(\{\Lambda\Lambda, KK\}) = \frac{2}{9}$ και η μέγιστη τιμή της $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$ αφού επιτυγχάνεται όταν $\Gamma = \{\Lambda\Lambda, KK\}$.