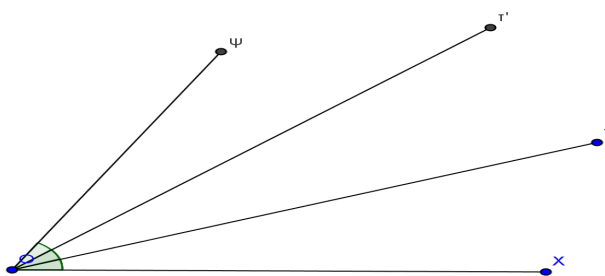


ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY

Ένα από τα πιο εκπληκτικά θεωρήματα της στοιχειώδους Γεωμετρίας ανακαλύφθηκε γύρω στο 1899 από τον Morley, ο οποίος το ανέφερε στους φίλους του κι εκείνοι το διέδωσαν σ' όλο τον κόσμο με την μορφή «μαθηματικού κουτσομπολιού».

Μετά από δέκα μια τριγωνομετρική απόδειξη δόθηκε από τον M Satyanarayana και μια στοιχειώδης απόδειξη από τον M.T. Naraniengar.

Ορισμός 1. Έστω γωνία $\chi O\psi$. Ονομάζουμε **τριχοτόμο** προσκείμενη στην πλευρά $O\chi$, την εσωτερική ημιευθεία $O\tau$ της $\chi O\psi$ για την οποία ισχύει $\widehat{xO\tau} = \frac{1}{3}\widehat{\chi O\psi}$ (σχ.1)



Σχ.1

Όμοια ορίζεται και η τριχοτόμος $O\tau'$ που είναι προσκείμενη στην γωνία $O\psi$.

Παρατήρηση 1: Κάθε γωνία έχει δυο τριχοτόμους, μια προσκείμενη στην μια πλευρά της και μια προσκείμενη στην άλλη.

Γενικά οι τριχοτόμοι δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, μπορούν όμως να κατασκευαστούν με άλλους τρόπους (π.χ. με νεύση)

Το θεώρημα Morley Οι τριχοτόμοι που είναι προσκείμενες στις πλευρές ενός τριγώνου, τέμνονται ανά δυο, ορίζοντας ισόπλευρο τρίγωνο.

Απόδειξη 1^η (τριγωνομετρική)

Λήμμα 1: Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $4\eta\mu\frac{\chi}{3}\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3} = \eta\mu\chi$

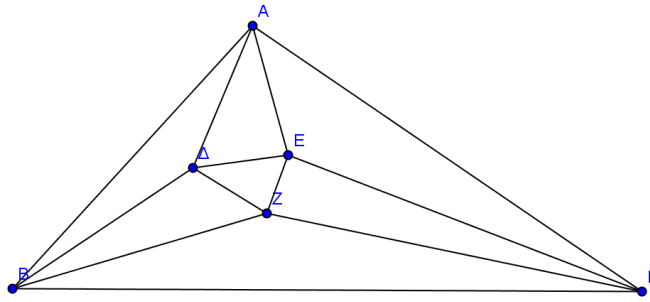
Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 4\eta\mu\frac{\chi}{3}\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3} &= 2\eta\mu\frac{\chi}{3}(2\eta\mu\frac{\pi+\chi}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\chi}{3}) = \\
 2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+\chi-2\pi-\chi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi+\chi+2\pi+\chi}{3}] &= \\
 2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu(\pi+\frac{2\chi}{3})] &= 2\eta\mu\frac{\chi}{3}[\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{2\chi}{3}] = \\
 \eta\mu\frac{\chi}{3} + 2\eta\mu\frac{\chi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{2\chi}{3} &= \eta\mu\frac{\chi}{3} + \eta\mu\frac{\chi+2\chi}{3} + \eta\mu\frac{\chi-2\chi}{3} = \\
 \eta\mu\frac{\chi}{3} + \eta\mu\chi - \eta\mu\frac{\chi}{3} &= \eta\mu\chi.
 \end{aligned}$$

Λήμμα 2: Αν $A+B+\Gamma=\pi$ τότε $\eta\mu^2\frac{\pi+B}{3} + \eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} - 2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} = \eta\mu^2\frac{A}{3}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 \eta\mu^2\frac{\pi+B}{3} + \eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} - 2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} &= \\
 \frac{1}{2}[1 - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3} + 1 - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+\Gamma}{3}] - 2\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} &= \\
 \frac{1}{2}[2 - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi-2\Gamma}{3}] - [\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+B+\Gamma}{3}]\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} &= \\
 1 - \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2B}{3} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+2\Gamma}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi+B+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}] &= \\
 1 - \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma+A}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma-A}{3}] + \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{A}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} &= \\
 1 - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi+2B}{3}) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi+2\Gamma}{3}) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi-2\Gamma}{3}) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(\frac{2B-\pi}{3}) + \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{A}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} &= \\
 1 + \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{A}{3}) + \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{2A}{3})] = 1 + \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{A}{3})\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{3} = \eta\mu^2\frac{A}{3}. &
 \end{aligned}$$



Περνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος
 Στο τρίγωνο ΑΒΔ από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\eta\mu\frac{B}{3}} = \frac{AB}{\eta\mu(\pi - \frac{A+B}{3})} \Rightarrow A\Delta = \frac{AB\eta\mu\frac{B}{3}}{\eta\mu(\frac{2\pi+\Gamma}{3})} \Rightarrow A\Delta = \frac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu\frac{B}{3}}{\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}}$$

$$\text{Άρα } A\Delta = \frac{8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{B}{3}}{\eta\mu\frac{2\pi+\Gamma}{3}} \text{ και τελικά } A\Delta = 8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{B}{3}$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$AΕ = 8R\eta\mu\frac{B}{3}\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\Gamma}{3}$$

$$B\Delta = 8R\eta\mu\frac{A}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\Gamma}{3}$$

$$\Gamma Ζ = 8R\eta\mu\frac{B}{3}\eta\mu\frac{\pi+A}{3}\eta\mu\frac{A}{3}$$

$$BΖ = 8R\eta\mu\frac{\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+A}{3}\eta\mu\frac{A}{3}$$

$$\Gamma Ε = 8R\eta\mu\frac{A}{3}\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{B}{3}$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta E^2 = A\Delta^2 + AΕ^2 - 2A\Delta \cdot AΕ \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{B}{3}\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} + 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{B}{3}\eta\mu^2\frac{\pi+B}{3} - 128R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{B}{3}\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3} \\ &= 64R^2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2\frac{B}{3}[\eta\mu^2\frac{\pi+\Gamma}{3} + \eta\mu^2\frac{\pi+B}{3} - 2\eta\mu\frac{\pi+\Gamma}{3}\eta\mu\frac{\pi+B}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}] \end{aligned}$$

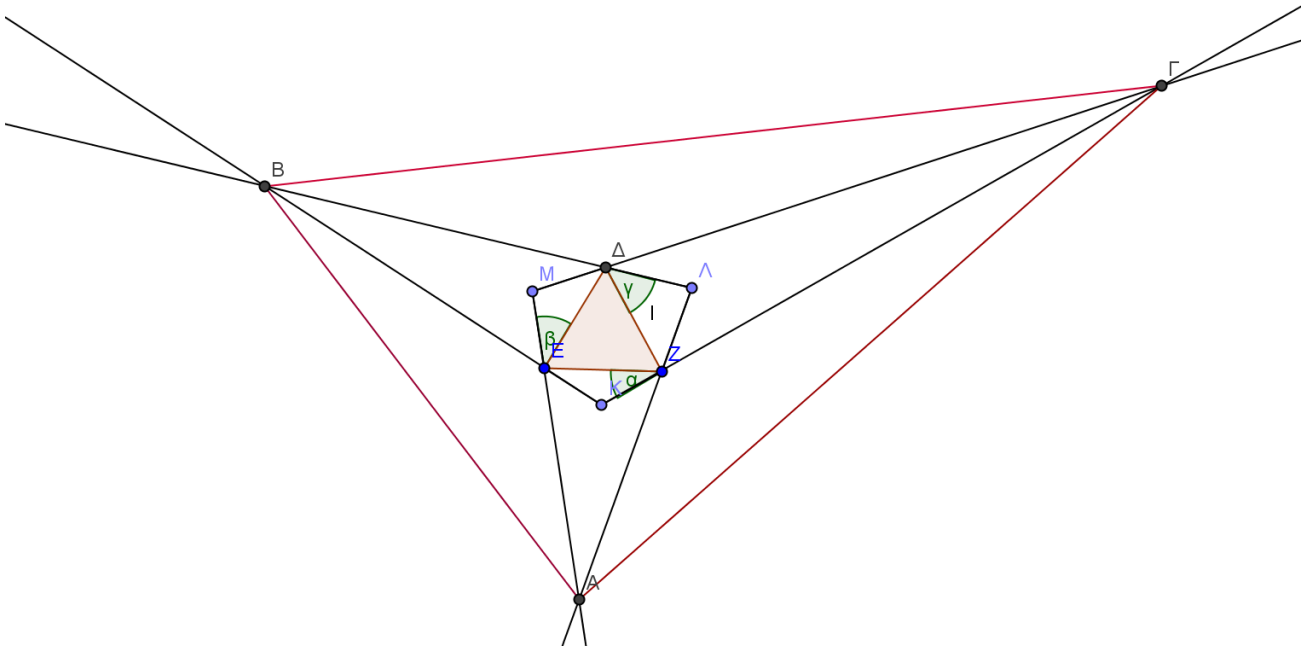
$$= 64R^2\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{3}\eta\mu^2 \frac{B}{3}\eta\mu^2 \frac{A}{3} \text{ κι έτσι τελικά θα έχουμε:}$$

$$\Delta E = 8R\eta\mu \frac{\Gamma}{3}\eta\mu \frac{B}{3}\eta\mu \frac{A}{3}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι συμμετρική ως προς Α,Β,Γ άρα μένει αμετάβλητη κατά τον υπολογισμό των ΔΖ και ΕΔ . Συνεπώς το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

Πολλές μαθηματικές αποδείξεις (όπως η παραπάνω) είναι μακροσκελείς και πολύπλοκες. Άλλες πάλι είναι μικρές αλλά πολύ έξυπνα κατασκευασμένες. Τέτοιου είδους είναι η δεύτερη απόδειξη που θα δώσουμε για το θεώρημα Morley.

Η βασική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε αντίστροφα από ένα ισόπλευρο τρίγωνο και να κατασκευάσουμε ένα άλλο τρίγωνο όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.



Πάνω στις πλευρές ΕΖ,ΕΔ,ΔΖ κατασκευάζουμε ισοσκελή τρίγωνα ΚΕΖ,ΜΕΔ ,ΛΖΔ ώστε οι γωνίες των βάσεών τους να ικανοποιούν τις σχέσεις $\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$ και $\alpha < 60^\circ, \beta < 60^\circ, \gamma < 60^\circ$.

Προεκτείνουμε τις πλευρές αυτών των ισοσκελών κάτω από τις βάσεις τους μέχρι να συναντηθούν στα σημεία Α,Β,Γ.

Αφού $\alpha + \beta + \gamma + 60^\circ = 180^\circ$ αναφερόμενοι στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες γωνίες ακόμη όπως πχ $\widehat{ΚΕΑ} = \gamma$, $\widehat{ΕΑΖ} = 60^\circ - \alpha$, $\widehat{ΔΓΖ} = 60^\circ - \gamma$, $\widehat{ΕΒΔ} = 60^\circ - \beta$.

Επίσης $\widehat{AZ\Gamma} = 180^\circ - \beta = 90^\circ + 90^\circ - \beta = 90^\circ + \frac{\widehat{AM\Gamma}}{2}$. Η ΜΖ (ως διάμεσος των ΜΕΔ, ΕΔΖ)

είναι διχοτόμος της $\widehat{AM\Gamma}$ και αφού $\widehat{AZ\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{AM\Gamma}}{2}$ το Ζ θα έγγεντρο του τριγώνου ΑΜΓ. Όμοια τα σημεία Ε, Δ είναι τα έγγεντρα των τριγώνων ΒΛΑ και ΒΓΚ. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μια απο τις κορυφές Α, Β, Γ οι τρεις μικρές γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες μεταξύ τους.

$$\text{Έτσι } \widehat{EAB} = \frac{1}{3}\widehat{A} = 60^\circ - \alpha = \widehat{EAZ} = \widehat{EZA}$$

$$\widehat{AZ\Gamma} = \frac{1}{3}\widehat{\Gamma} = \widehat{Z\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma B}, \quad \widehat{\Delta B\Gamma} = \frac{1}{3}\widehat{B} = \widehat{\Delta B E} = \widehat{E B A}$$

$$\text{Άρα } \alpha = 60^\circ - \frac{1}{3}\widehat{A}, \quad \beta = 60^\circ - \frac{1}{3}\widehat{B}, \quad \gamma = 60^\circ - \frac{1}{3}\widehat{\Gamma}$$

Διαλέγοντας για τις α, β, γ τις παραπάνω τιμές και κάνοντας την παραπάνω κατασκευή, καταλήγουμε σε τρίγωνο προφανώς όμοιο με το δοσμένο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ.