ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Πολλές φορές στα μαθηματικά πρέπει να αποδείξουμε προτάσεις της μορφής **“Για όλους τους θετικούς ακέραιους ν, ισχύει Ρ(ν)”**, ή προτάσεις της μορφής “**Για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς ν που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του φυσικού αριθμούς ν_0 ισχύει Ρ(ν)”** όπου Ρ(ν) είναι ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους αριθμούς.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια ειδική μέθοδο για την απόδειξη προτάσεων της παραπάνω μορφής, τη μέθοδο της **μαθηματικής** (ή πλήρους ή τέλειας) **επαγωγής** όπως συνηθίζεται να αναφέρεται στην βιβλιογραφία.

Αν λοιπόν ν είναι μια μεταβλητή που παίρνει τιμές από το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών (ή αλλιώς το σύνολο των φυσικών αριθμών) η μαθηματική επαγωγή είναι μια μέθοδος απόδειξης προτάσεων της μορφής :

- $\forall \nu \, P(\nu)$ (για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν αληθεύει ότι Ρ(ν))
- $\forall \nu \geqslant \nu_0 \, P(\nu)$ (για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του ν_0 ισχύει Ρ(ν))
  (Το σύμβολο $\forall$ λέγεται καθολικός ποσοδείκτης και ερμηνεύεται ως συντομογραφία της έκφρασης “για κάθε” ή “για όλους”)

παραδείγματα

1. $2^\nu > \nu$ για κάθε θετικό φυσικό αριθμό. (εδώ Ρ(ν) είναι ο ισχυρισμός $2^\nu > \nu$)
2. Το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές, $\nu \geqslant 3$ είναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ (εδώ Ρ(ν) είναι ο ισχυρισμός ότι το πλήθος των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου είναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$)
3. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών περιττών αριθμών είναι πάντα ίσο με το τετράγωνο του ν. Δηλαδή $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.
4. Για κάθε θετικό φυσικό αριθμό ν ισχύει $1+2+3+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$
5. Δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος μήκους 1, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{\nu}$ για κάθε θετικό φυσικό αριθμό ν.