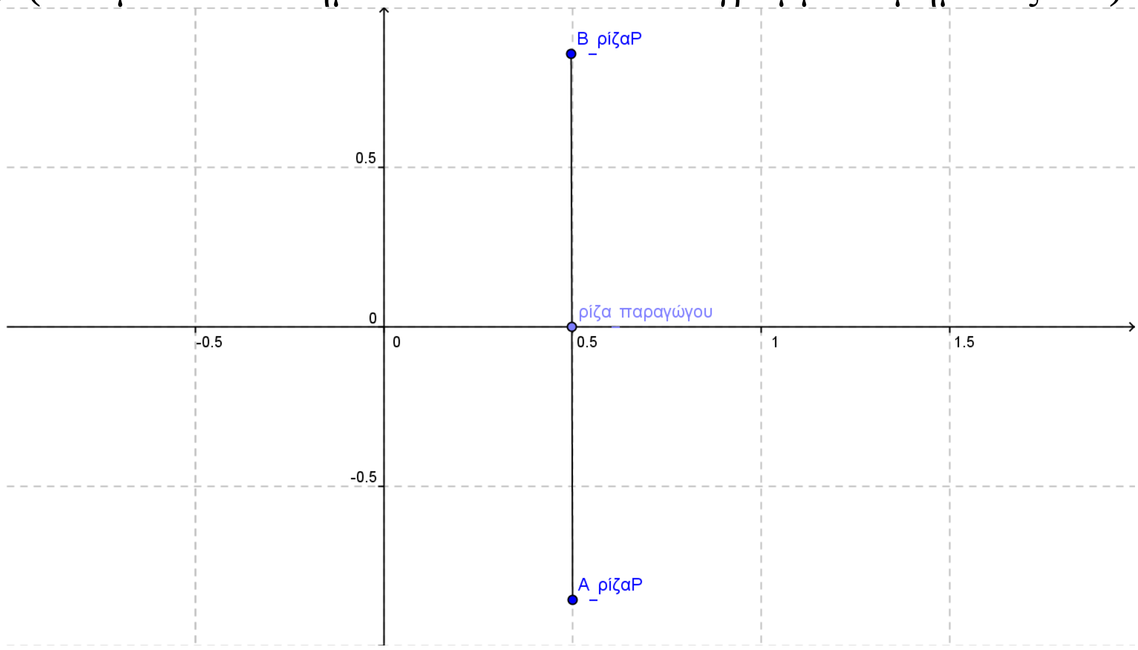
Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS-LUCAS

εισαγωγή

Έστω Ρ(χ) ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό τουλάχιστον 2.Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού, μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών του Ρ υπάρχει πάντοτε μια ρίζα της παραγώγου του Ρ΄. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^2-\chi+1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, ενώ η παράγωγός του $P'(\chi)=2\chi-1$ έχει μια ρίζα $\chi=\frac{1}{2}$. Ωστόσο θεωρώντας τις μιγαδικές ρίζες του Ρ(χ) που είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ και τις εικόνες τους Α,Β στο επίπεδο (σχ.1), μπορούμε να πούμε και πάλι ότι κατά κάποιο τρόπο η ρίζα της παραγώγου είναι ανάμεσα στις ρίζες χ_1,χ_2 του Ρ(χ). (ανάμεσα στα σημεία Α και Β του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ).

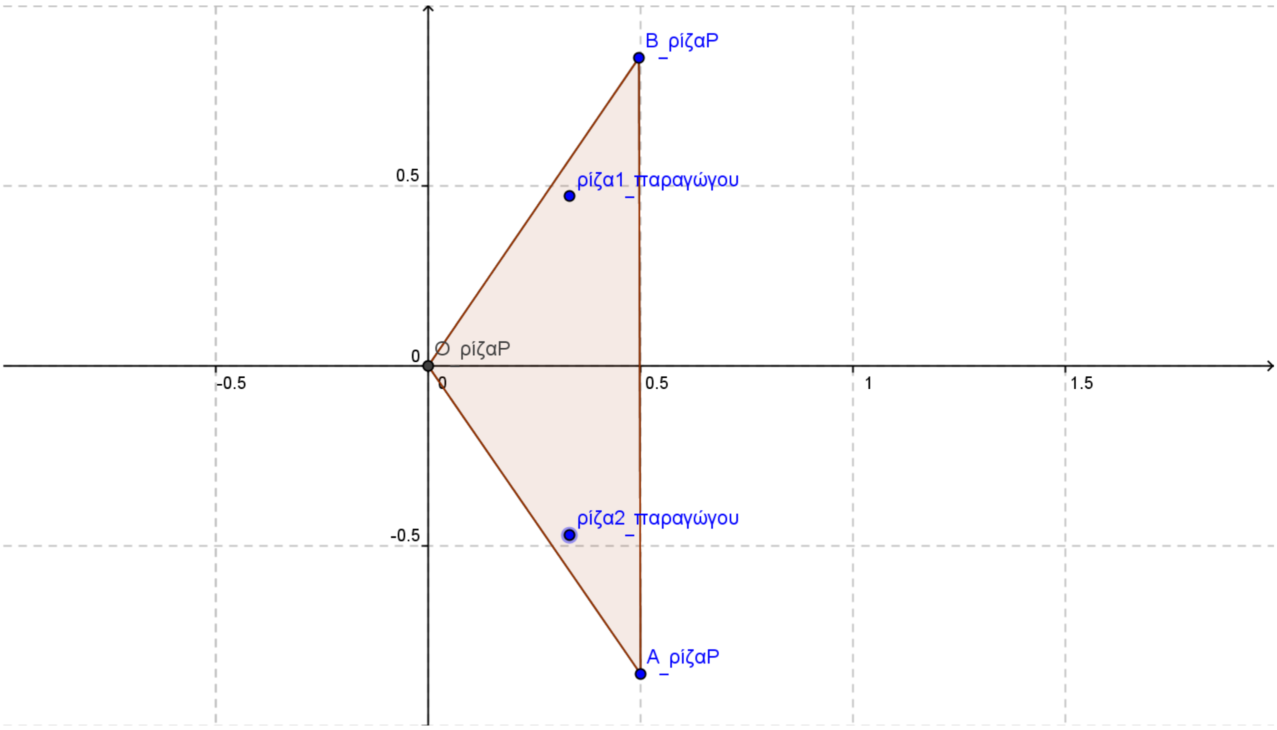


σχήμα 1

Θεωρώντας το πολυώνυμο $P(z)=z^3-z^2+z=z(z^2-z+1)$ παρατηρούμε ότι οι ρίζες του είναι οι αριθμοί $z_1=0$ και $z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ενώ οι ρίζες της παραγώγου $P'(z)=3z^2-2z+1$ είναι οι αριθμοί $r_1=\frac{1+i\sqrt{2}}{3}, r_2=\frac{1-i\sqrt{2}}{3}$

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

αν παραστήσουμε τις ρίζες αυτές στο επίπεδο θα πάρουμε το παρακάτω σχήμα 2.



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή οι ρίζες της παραγώγου βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο που ορίζουν οι ρίζες του πολυωνύμου.

Στην εργασία αυτή θα δούμε ότι γενικά η θέση των (μιγαδικών) ριζών ενός (μιγαδικού) πολυωνύμου P(z) δεσμεύει την θέση των ριζών της παραγώγου του P΄(z). Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι **οι ρίζες της παραγώγου ενός πολυωνύμου, ανήκουν στο κυρτό περίβλημα των ριζών του πολυωνύμου.** Το αποτέλεσμα αυτό στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως θεώρημα των Gauss-Lucas.

Ας ξεκινήσουμε καταρχάς με κάποιες υπενθυμίσεις για τις έννοιες που εμπλέκονται στην παραπάνω διατύπωση του θεωρήματος.

Πρώτα απ' όλα εμφανίζεται η έννοια των ριζών ενός πολυωνύμου. Σύμφωνα με το **θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας** ένα πολυώνυμο του $\mathbb{C}[z]$ με βαθμό ν, δηλαδή ένα πολυώνυμο $\nu^{ου}$ βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές και απροσδιόριστη μεταβλητή z, έχει πάντοτε ν ακριβώς μιγαδικές ρίζες, όπου κάθε ρίζα είναι μετρημένη τόσες φορές, όσος είναι ο βαθμός πολλαπλότητάς της.

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

Έτσι δεδομένου ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(z) αν και μόνο αν το z-ρ είναι παράγοντας του P(z) , αν υποθέσουμε ότι $z_1,z_2,\ldots,z_k$ είναι οι ρίζες του P(z) με πολλαπλότητες $m_1,m_2,\ldots,m_k$ τότε θα ισχύει

$$P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k} \qquad (1)$$

και για την παράγωγο θα έχουμε $P'(z)=$

$$m_1(z-z_1)^{m_1-1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k}+m_2(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2-1}\ldots(z-z_k)^{m_k}+\ldots+$$
$$m_k(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k-1} \qquad (2)$$

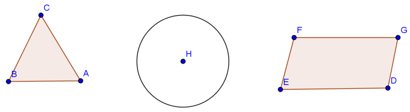
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{m_1}{z-z_1}+\frac{m_2}{z-z_2}+\ldots+\frac{m_k}{z-z_k} \text{ για κάθε } z\neq z_1,z_2,\ldots,z_k \quad (3)$$

Δεύτερον, εμφανίζεται η έννοια του κυρτού περιβλήματος ενός συνόλου σημείων.

Ένα υποσύνολο Μ του επιπέδου λέμε ότι είναι **κυρτό** , αν για κάθε ζεύγος σημείων του Α, Β , το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ περιέχεται στο Μ.

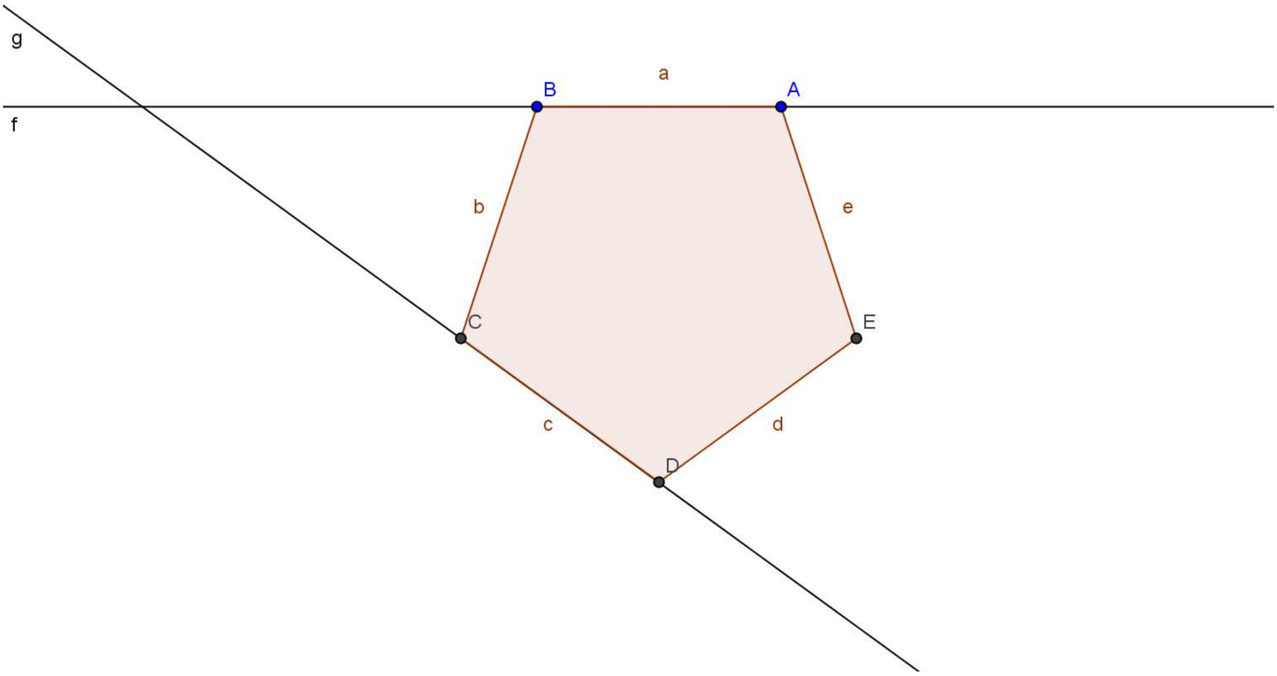
παράδειγμα 1. Το τρίγωνο, ο κύκλος και το παραλληλόγραμμο είναι κυρτά σχήματα. (σχ.3)



σχήμα 3

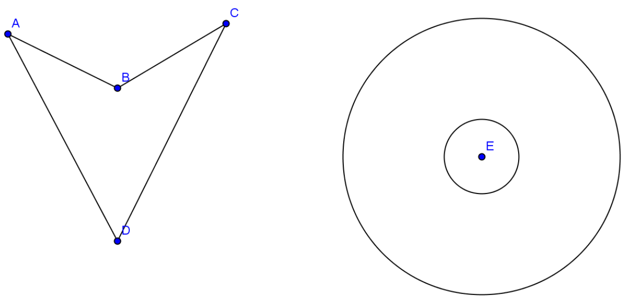
παράδειγμα 2. Κάθε κυρτό πολύγωνο είναι κυρτό σχήμα. (ένα πολύγωνο λέγεται κυρτό όταν η ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του αφήνουν το πολύγωνο στο ίδιο ημιεπίπεδο). σχ. 4

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός



σχήμα 4

παράδειγμα 3. Τα παρακάτω σχήματα δεν είναι κυρτά.(σχ.5)



σχήμα 5

πρόταση 1. Η τομή δυο κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

<u>απόδειξη</u>

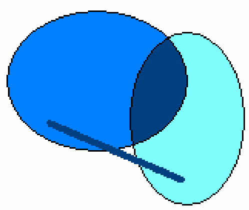
Ας είναι Μ, Ν δυο κυρτά σύνολα και Α, Β δυο σημεία που ανήκουν στην τομή $M \cap N$. Τότε $A \in M$, $A \in N$ και $A \in M$, $B \in N$ οπότε αφού τα Μ, Ν είναι κυρτά θα έχουμε ΑΒ∈Μ και ΑΒ∈Ν δηλαδή ΑΒ∈ Μ∩Ν κι έτσι η τομή Μ∩Ν είναι κυρτό σύνολο.

πρόταση 2. Η τομή $\bigcap_{i\in I} M_i$ μιας οικογένειας συνόλων $\{M_i\}$ i∈I κυρτών συνόλων M_i είναι κυρτό σύνολο. (Το σύνολο δεικτών I μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο)

<u>απόδειξη</u>

Αν $M=\bigcap_{i\in I} M_i$ και A, B∈M τότε A, B $\in M_i$ για κάθε i∈I. Τότε όμως $AB\in M_i$ για κάθε i∈I, άρα AB∈M κι έτσι το M είναι κυρτό.

παρατήρηση 2.1: Η ένωση δυο κυρτών συνόλων δεν είναι γενικά κυρτό σύνολο όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα 6



σχήμα 6

Αν Μ είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του επιπέδου , τότε υπάρχουν πάντοτε κυρτά σύνολα του επιπέδου που περιέχουν το Μ. (πχ ολόκληρο το επίπεδο είναι ένα τέτοιο σύνολο). Η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το Μ, καλείται **κυρτό περίβλημα του Μ** και συμβολίζεται με conv(M).

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

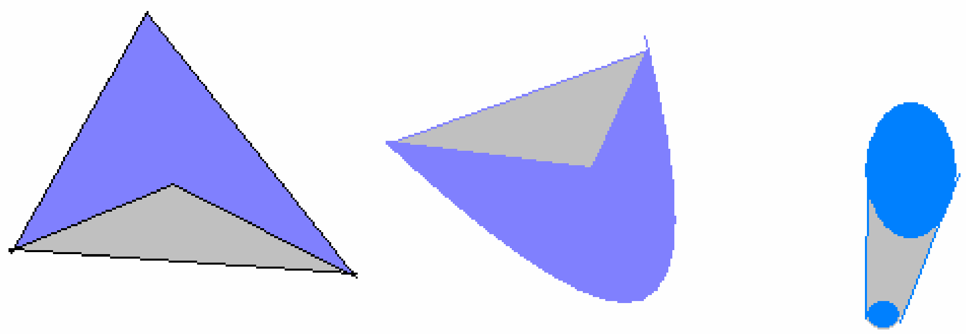
Οι παρακάτω ιδιότητες του κυρτού περιβλήματος είναι προφανείς

α) $M \subset \mathrm{conv}(M)$

β) $M=\mathrm{conv}(M) \Leftrightarrow M$ κυρτό.

γ) το conv(M) είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο του επιπέδου που περιέχει το M.

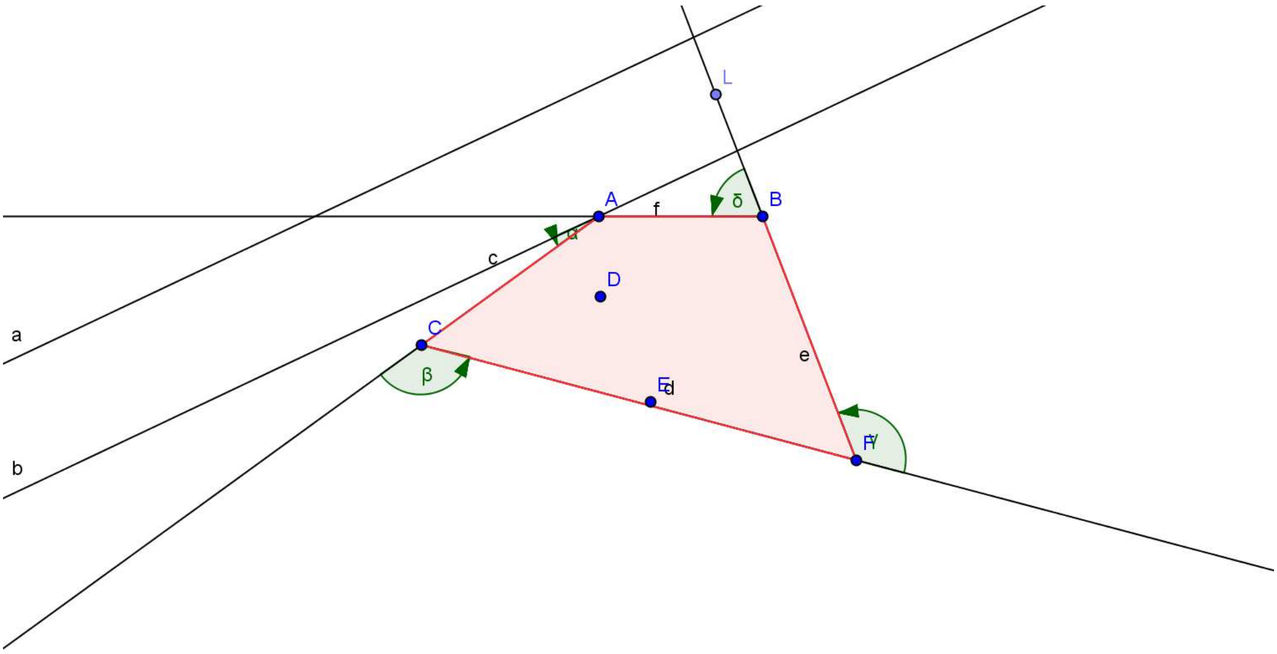
Στα παρακάτω σχήματα (σχ.6) βλέπουμε το conv(M) για κάποια σύνολα M



σχήμα 7

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

Το κυρτό περίβλημα ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων του επιπέδου, που είναι και η περίπτωση που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία**, είναι ένα κυρτό πολύγωνο με κορυφές κάποια από τα εν λόγω σημεία**.



σχήμα 8

Θα περιγράψουμε τώρα μια μέθοδο για την κατασκευή του κυρτού περιβλήματος όταν το σύνολο Μ είναι πεπερασμένο σύνολο σημείων. Έστω ότι Μ={A,B,C,D,E,F}. Επειδή το σύνολο Μ είναι πεπερασμένο, θα υπάρχει μια ευθεία a η οποία αφήνει όλα τα σημεία στο ίδιο ημιεπίπεδο. (σχ.8). Θεωρούμε το πλησιέστερο σημείο A προς την a και φέρνουμε παράλληλη b προς αυτήν. Και αυτή η ευθεία αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο όλα τα σημεία του Μ εκτός του Α και κάποιων άλλων ενδεχομένως σημείων του Μ που απέχουν από την a την ίδια απόσταση με το Α. Στρέφουμε τώρα την ημιευθεία Ab περί το Α κατά την θετική φορά μέχρι να συναντήσουμε το πρώτο από τα υπόλοιπα σημεία του Μ. Η γωνία στροφής προφανώς είναι μικρότερη ή ίση από 180^0 και άρα είναι κυρτή. Ας είναι C το σημείο του παραπάνω βήματος. Το τμήμα AC είναι τμήμα του συνόρου του κυρτού περιβλήματος. Στρίβουμε στην συνέχεια κατά την θετική φορά την ημιευθεία Cc μέχρι να εντοπίσουμε το πρώτο σημείο F από τα εναπομείναντα σημεία του M. Το τμήμα CF είναι το επόμενο τμήμα στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία στροφών μέχρις εξαντλήσεως των σημείων του M, οπότε μετά από κάποιο βήμα στην στροφή που θα κάνουμε θα συναντήσουμε το αρχικό σημείο A (ή ένα άλλο ενδεχομένως σημείο του M πάνω στην a). Προφανώς το πολύγωνο που προκύπτει με τον τρόπο αυτό είναι κυρτό και περιέχει στο εσωτερικό του ή στο σύνορό του όλα τα σημεία του M. Επομένως αυτό θα είναι το κυρτό του περίβλημα.

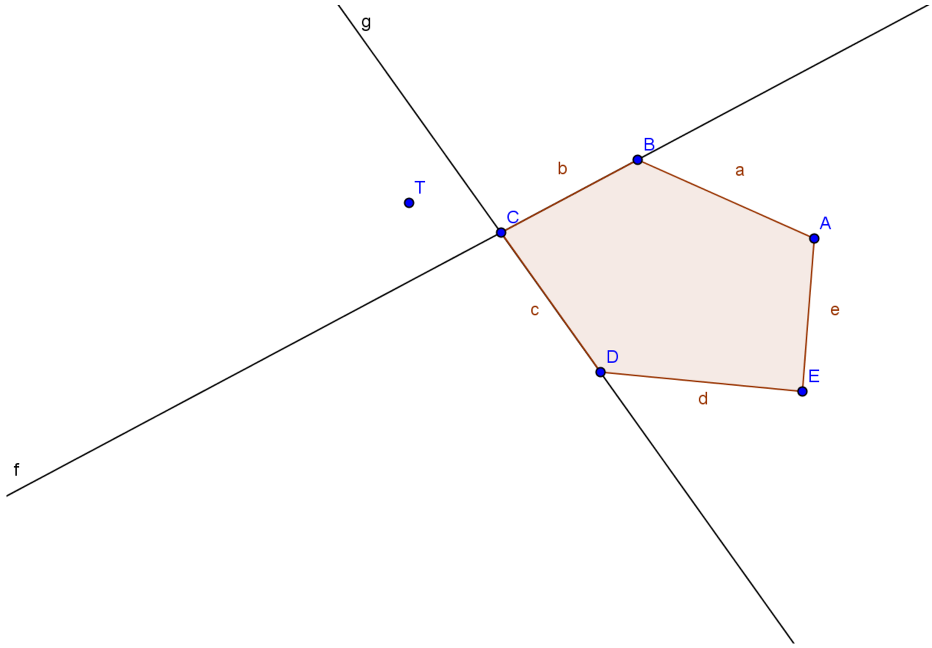
παρατήρηση 2.2: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ είναι ένα σύνολο M κ σημείων του επιπέδου τότε το κυρτό τους περίβλημα μπορεί να περιγραφεί και ως το σύνολο των σημείων A για τα οποία ισχύει $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i$ όπου $\lambda_i \geq 0$ και $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\kappa=1$.(όπου τα A_i θεωρούνται ως σημεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$).

Η παρακάτω πρόταση είναι βασική για την εργασία μας.

<u>πρόταση 3.</u> Αν Τ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κυρτού πολυγώνου Π του επιπέδου, τότε υπάρχει ευθεία που διέρχεται από το Α και δεν έχει κοινά σημεία με το Π.

<u>απόδειξη</u>

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός



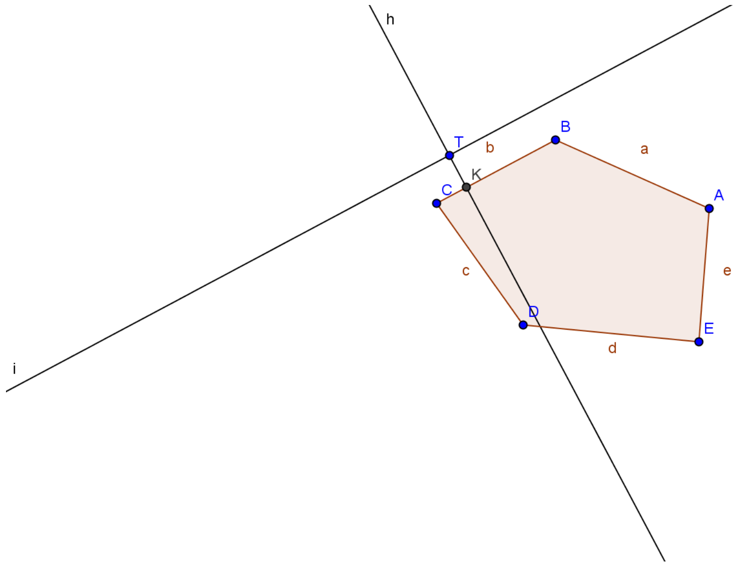
σχήμα 9

Έστω C η πλησιέστερη προς το T κορυφή του πολυγώνου. Στο C συναντώνται οι πλευρές CA ,CD που ορίζουν τις ευθείες f, g. Αυτές οι ευθείες ορίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες με κορυφή το C. Αφού το C είναι το πλησιέστερο σημείο του T, το T δεν μπορεί να ανήκει στην γωνιακή περιοχή BCD. Αν T∈Cf τότε η παράλληλη από το T προς την CD είναι η ζητούμενη ευθεία. Αν T∈Cg τότε η παράλληλη από το T προς την BC είναι η ζητούμενη. Αν T∈gCf τότε η παράλληλη προς BC ή CD είναι η ζητούμενη. Αν T∈ fCD τότε η παράλληλη προς CD είναι η ζητούμενη, και τέλος αν T∈ gCB η παράλληλη προς την CB είναι η ζητούμενη ευθεία.

παρατήρηση 3.1: Ένας άλλος τρόπος για να δικαιολογήσουμε την πρόταση 3 είναι να θεωρήσουμε το πλησιέστερο σημείο K του Π προς το σημείοT. Η κάθετος προς το KT στο T είναι η ζητούμενη ευθεία.

(σχ.10)

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός



παρατήρηση 3.2: Η πρόταση 3 ισχύει όχι μόνο για κυρτά πολύγωνα αλλά και για κάθε κυρτό σχήμα Μ του επιπέδου.

<u>**Λήμμα 1**</u> Αν οι εικόνες των μιγαδικών $z_1,z_2,\ldots,z_k$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από το Ο(0,0) τότε

α) $z_1+z_2+\ldots+z_k\neq 0$

β) αν επιπλέον $m_1,\ldots,m_k>0$ τότε και οι εικόνες των $m_1z_1^{-1},\ldots,m_kz_k^{-1}$ βρίσκονται επίσης πάνω στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από το Ο, και συνεπώς $m_1z_1^{-1}+\ldots+m_kz_k^{-1}\neq 0$.

<u>απόδειξη</u>

Ας είναι $\psi=\lambda\chi$ η εξίσωση της ευθείας (ε) της υπόθεσης του λήμματος.(υποθέτουμε αρχικά ότι η ε δεν είναι κατακόρυφη). Αν P_1 και P_2 τα ημιεπίπεδα που ορίζει η (ε) , ως γνωστό τα σημεία του P_1-(ε) ικανοποιούν την ανίσωση $\psi<\lambda\chi$, ενώ τα σημεία του P_2-(ε) ικανοποιούν την ανίσωση $\psi>\lambda\chi$. Έστω $A_1(\chi_1,\psi_1),\ldots,A_\kappa(\chi_\kappa,\psi_\kappa)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1,z_2,\ldots,z_k$ στο επίπεδο. Αν τα παραπάνω σημεία ανήκουν στο P_1-(ε) τότε $\psi_i<\lambda\chi_i$ για κάθε $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $\psi_1+\ldots+\psi_\kappa<\lambda(\chi_1+\ldots+\chi_\kappa) \Rightarrow \mathrm{Im}(z_1+z_2+\ldots+z_k)<\mathrm{Re}(z_1+z_2+\ldots+z_k)$ πράγμα που σημαίνει ότι $z_1+z_2+\ldots+z_k\neq 0$ (διαφορετικά θα ήταν 0<0).

Αν η (ε) είναι η κατακόρυφη χ=0, τότε δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για τις συντεταγμένες των A_i ισχύει $\chi_i<0$ για κάθε $i\in\{1,2,\ldots,k\}$. Άρα $\mathrm{Re}(z_1+z_2+\ldots+z_k)<0$ δηλαδή και πάλι $z_1+z_2+\ldots+z_k\neq 0$.

β) Έστω $z_n=x_n+iy_n$ $n\in\{1,2,\ldots,k\}$, τότε $z_n^{-1}=\frac{1}{z_n}=\frac{1}{x_n+iy_n}=\frac{x_n-iy_n}{x_n^2+y_n^2}=\frac{x_n}{x_n^2+y_n^2}-\frac{y_n}{x_n^2+y_n^2}i$

Αν τα σημεία $A_1,\ldots,A_\kappa$ ανήκουν όλα στο ημιεπίπεδο P_1-(ε) στο οποίο ψ<λχ τότε εικόνες των $m_n z_n^{-1}$ είναι τα σημεία $B_n\left(\frac{m_n x_n}{x_n^2+y_n^2},-\frac{m_n y_n}{x_n^2+y_n^2}\right)$ ανήκουν στο ημιεπίπεδο Q_1 που ορίζεται από την δ: ψ=-λχ και την ανίσωση ψ>-λχ. Πράγματι για τα $A_n(x_n,y_n)$ ισχύει $y_n<\lambda x_n \Leftrightarrow - y_n>-\lambda x_n \Leftrightarrow$

$$\frac{-y_n}{x_n^2+y_n^2}>\frac{-\lambda x_n}{x_n^2+y_n^2}\Leftrightarrow\frac{-m_n y_n}{x_n^2+y_n^2}>\frac{-\lambda m_n x_n}{x_n^2+y_n^2}.$$

Στην περίπτωση που η (ε) είναι η κατακόρυφη χ=0 και τα $A_1,A_2,\ldots,A_\kappa$ ανήκουν στο ημιεπίπεδο χ<0 τότε $\chi_n<0 \Rightarrow \frac{m_n x_n}{x_n^2+y_n^2}<0$ δηλαδή τα σημεία B_n ανήκουν όλα στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Σύμφωνα με το α) αφού οι εικόνες των $m_1 z_1^{-1},\ldots,m_k z_k^{-1}$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από το Ο θα έχουμε $m_1 z_1^{-1}+\ldots+m_k z_k^{-1}\neq 0$.

<u>πόρισμα 1.</u> Αν οι εικόνες των μιγαδικών $z_1,z_2,\ldots,z_k$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την εικόνα του z τότε ο αριθμός $w=(z-z_1)+(z-z_2)+\ldots+(z-z_k)$ είναι μη μηδενικός.

πράγματι. Αν z=α+bi και υποθέσουμε ότι οι εικόνες των $z_1,z_2,\ldots,z_k$ βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την y-b=λ(x-α) τότε ισχύει

$y_n-b<\lambda(x_n-a) \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}(y_n-b)<\lambda\sum_{n=1}^{k}(\chi_n-a) \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}(b-y_n)>\lambda\sum_{n=1}^{k}(a-\chi_n)$

άρα Im(w)>λRe(w) κι έτσι θα είναι $w\neq 0$. Αν η υποτιθέμενη ευθεία έχει εξίσωση χ=α και οι εικόνες των $z_1,z_2,\ldots,z_k$ βρίσκονται στο ημιεπίπεδο

χ-α<0 τότε $\alpha-\chi_n>0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}(a-x_n)>0 \Rightarrow$ Re(w)>0 και συνεπώς $w\neq 0$.

παρατήρηση 4. Το συμπέρασμα του πορίσματος μπορεί να εξαχθεί και κατευθείαν από το λήμμα ως εξής: Αν $w_1=z-z_1,\ldots,w_k=z-z_k$ και θεωρήσουμε ένα σύστημα αξόνων με άξονες παράλληλους προς τους αρχικούς και αρχή στο σημείο Z(α,b), τότε όλες οι εικόνες των w_n , βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή του νέου συστήματος και επομένως $w_1+\ldots+w_k\neq 0$.

Αν $A_1,A_2,\ldots,A_\kappa$ είναι οι εικόνες των ριζών $z_1,z_2,\ldots,z_k$ ενός πολυωνύμου P(z) αντιστοίχως, τότε το κυρτό περίβλημα του συνόλου $\{A_1,A_2,\ldots,A_\kappa\}$ είναι όπως προαναφέραμε ένα κυρτό πολύγωνο με κορυφές κάποια από τα παραπάνω σημεία το οποία περιέχει φυσικά όλα τα σημεία A_n.

<u>πρόταση 4</u> Έστω $P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k}$ ένα πολυώνυμο βαθμού ν γραμμένο σε παραγοντοποιημένη μορφή συναρτήσει των ριζών του $z_1,z_2,\ldots,z_k$ όπου $m_1+m_2+\ldots+m_k=\nu$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

α) $\dfrac{P'(z)}{P(z)}=\dfrac{m_1}{z-z_1}+\dfrac{m_2}{z-z_2}+\ldots+\dfrac{m_k}{z-z_k}$ για κάθε $z\neq z_1,z_2,\ldots,z_k$

β) Αν $Q(z)=\dfrac{m_1}{z-z_1}+\dfrac{m_2}{z-z_2}+\ldots+\dfrac{m_k}{z-z_k}$ και Q(z)=0 για κάποιο z, τότε οι εικόνες των $z_1,z_2,\ldots,z_k$ στο επίπεδο δεν μπορούν να βρίσκονται όλες στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την εικόνα του z.

<u>απόδειξη</u>

α) Είναι ο τύπος (3) που αποδείξαμε παραπάνω.

β) Έχουμε Q(z)=0 για κάποιο z. Αν όλες οι εικόνες των $z_1,z_2,\ldots,z_k$ βρίσκονταν στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την εικόνα του z, τότε σύμφωνα με την πόρισμα 1 θα ήταν $Q(z)\neq 0$ άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ (GAUSS-LUCAS): ***Έστω πολυώνυμο P(z) (με μιγαδικούς συντελεστές) βαθμού≥2. Τότε οι ρίζες της παραγώγου P΄(z), ανήκουν στο κυρτό περίβλημα των ριζών του P(z).***

απόδειξη

Αν $P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k}$

τότε $P'(z)=P(z)Q(z)$ για κάθε $z\neq z_1,z_2,\ldots,z_k$ (5)

Αν η εξίσωση P΄(z)=0 έχει ρίζες κάποιους από τους $z_1,z_2,\ldots,z_k$ τότε η πρόταση είναι φανερή.

Ας είναι λοιπόν z μια ρίζα της P΄(z)=0 που η εικόνα της Τ δεν ανήκει στο κυρτό περίβλημα του συνόλου $\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$.

Τότε το Τ θα είναι εξωτερικό σημείο του κυρτού περιβλήματος και συνεπώς σύμφωνα με την πρόταση 3, θα υπάρχει ευθεία διερχόμενη από το Τ τέτοια ώστε το κυρτό περίβλημα να βρίσκεται εξολοκλήρου σε ένα από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία αυτή. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα θα ισχύει $Q(z)\neq 0$.

Όμως $P'(z)=0 \Leftrightarrow P(z)Q(z)=0 \Leftrightarrow Q(z)=0$ αφού το z δεν ανήκει στο κυρτό περίβλημα του $\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Θα πρέπει λοιπόν το z να ανήκει στο κυρτό περίβλημα του $\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ κι έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.

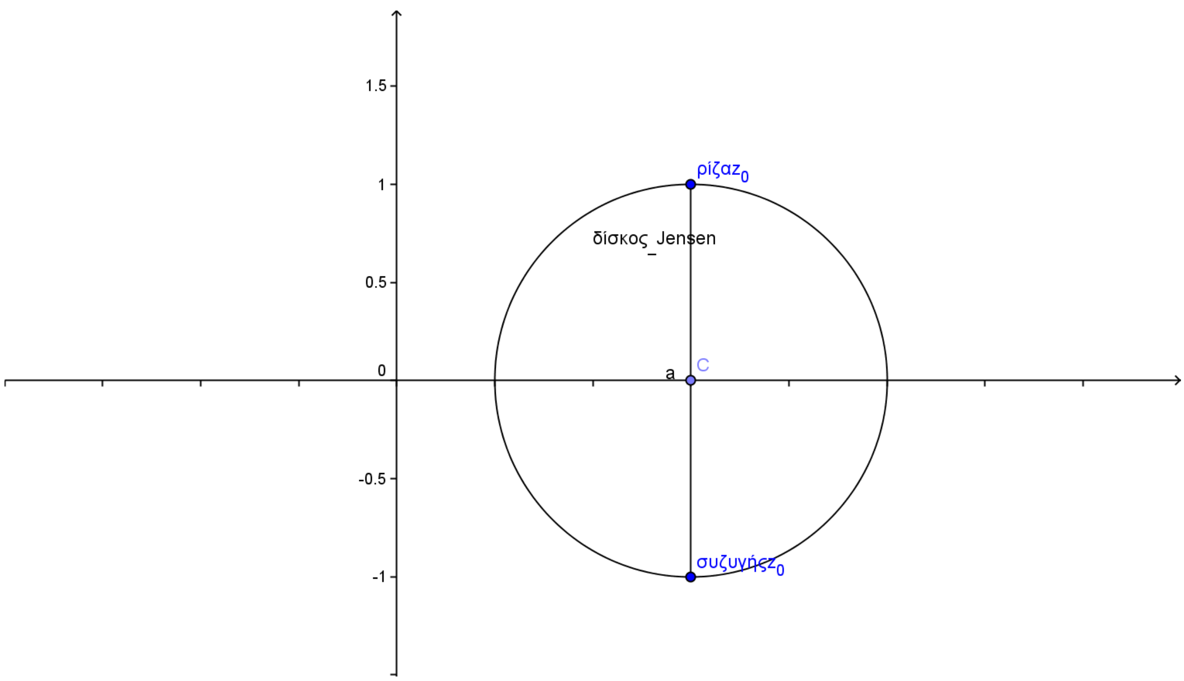
Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

<u>παράρτημα</u>

Θα δούμε τώρα και άλλο ένα δεδομένο που αφορά την θέση των ριζών της παραγώγου ενός πολυωνύμου (κρίσιμα σημεία του πολυωνύμου) αναφορικά προς την θέση των ριζών του πολυωνύμου, όταν αυτό έχει πραγματικούς συντελεστές.

Στην περίπτωση αυτή όπως είναι γνωστό αν z_0 είναι ρίζα του P(z) τότε ο συζυγής αριθμός $\overline{z_0}$ του z_0 είναι επίσης ρίζα του P.

Θεωρούμε ρίζες z_0 για τις οποίες ισχύει $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Τότε $z_0 \neq \overline{z_0}$. Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{Re}(z_0)$ και ακτίνα $|\mathrm{Im}(z_0)|$ δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο τις εικόνες των z_0 , $\overline{z_0}$ καλείται **δίσκος Jensen** του P. (σχήμα 11)



<u>Θεώρημα 2 (Jensen)</u> ***Έστω P πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Τότε τα μη πραγματικά κρίσιμα σημεία του P βρίσκονται μέσα ή πάνω στο σύνορο κάποιου δίσκου Jensen του P.***

<u>απόδειξη</u>

Έστω n ο βαθμός του πολυωνύμου P και $z_1, z_2, \ldots, z_n$ οι μιγαδικές του ρίζες, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους.

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

Υποθέτουμε ότι w είναι μια μη πραγματική ρίζα της παραγώγου P΄, δηλαδή P΄(w)=0. Αν P(w)=0 τότε w=z_k για κάποιο k και το w ανήκει πάνω στο σύνορο του δίσκου Jensen που ορίζεται από το w= z_i.

Έτσι ας υποθέσουμε ότι P(w)≠0. Θέτουμε w=u+iv , v≠0.

Για μια μη πραγματική ρίζα z_k=α+bi , α,b∈$\mathbb{R}$ έχουμε για την συζυγή ρίζα $\overline{z_k}$=α-ib. Θα έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{w-a-bi}+\frac{1}{w-a+bi}=\frac{2w-2a}{(w-a)^2+b^2}$$

όμως $\overline{(w-a)^2+b^2}=(\overline{w}-a)^2+b^2$ κι έτσι

$$\frac{2w-2a}{(w-a)^2+b^2}=\frac{(2w-2a)((\overline{w}-a)^2+b^2)}{|(w-a)^2+b^2|^2}.$$

Θα εκτιμήσουμε το πρόσημο του φανταστικού μέρους της παραπάνω έκφρασης. Αφού ο παρονομαστής είναι θετικός είναι αρκετό να εκτιμήσουμε το πρόσημο του φανταστικού μέρους του αριθμητή.

Όμως

$$(2w-2a)((\overline{w}-a)^2+b^2))=2(|w-a|^2(u-iv-a)+b^2(u+iv-a)),$$

και το φανταστικό μέρος είναι $2(-v\,||\,w-a\,|^2+b^2v)=2v(-|\,w-a\,|^2+b^2)$.

Αυτή η παράσταση έχει το πρόσημο του –v , όταν w είναι έξω από τον δίσκο Jensen του z=α+ib (αφού τότε $|w-\alpha|^2>b^2$).

Αν ο z_k=α∈$\mathbb{R}$ τότε για την έκφραση $\dfrac{1}{w-z_k}$ θα έχουμε

$$\frac{1}{w-z_k}=\frac{1}{w-a}=\frac{1}{w-a}\frac{\overline{w}-a}{\overline{w}-a}=\frac{u-a-iv}{|w-a|^2}$$ και το φανταστικό μέρος της έχει ακριβώς το πρόσημο του –v. Τώρα στο άθροισμα

Κασαπίδης Γεώργιος
Μαθηματικός

$0=\dfrac{P'(w)}{P(w)}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{w-z_k}$ εμφανίζονται δυο ειδών ρίζες: Μη πραγματικές μιγαδικές οι οποίες μπορούν να χωριστούν σε ζευγάρια με φανταστικό μέρος ομόσημο του –v , και όροι που αντιστοιχούν σε πραγματικές ρίζες οι οποίοι επίσης έχουν το πρόσημο του –v. Συνεπώς το παραπάνω άθροισμα έχει φανταστικό μέρος ομόσημο του –v≠0 κι έτσι δεν μπορεί να είναι ίσο με μηδέν. Στο άτοπο καταλήξαμε γιατί υποθέσαμε ότι ο w δεν ανήκει σε κανένα δίσκο Jensen του P.

Άρα ο w οφείλει να βρίσκεται μέσα σε κάποιον δίσκο Jensen και το θεώρημα 2 αποδείχτηκε.

Βιβλιογραφία

1. Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός M. Spivac
2. Μαθηματικές ολυμπιάδες (Γεωμετρία) Δ. Κοντογιάννης
3. Γενική τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση Σ. Νεγρεπόντης
4. http://planetmath.org/encyclopedia/ZeroesOfDerivativeOfComplexPolynomial.html
5. http://www2.gsu.edu/~matfxe/fall2010/lec9-polyn-2010.pdf
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Lucas_theorem