## ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΣΤΟ *Ζ* ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Είναι γνωστή η σχέση ισοδυναμίας ‘’≡’’ στο σύνολο των ακεραίων Ζ η οποία ορίζεται ως εξής: $\alpha\equiv\beta \bmod \nu \Leftrightarrow \nu/\alpha-\beta$. Η σχέση αυτή έχει τη σημαντική ιδιότητα να είναι συμβιβαστή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή ,αν $\alpha\equiv\beta \bmod \nu$ και $\gamma\equiv\delta \bmod \nu$ τότε επίσης θα ισχύει $(\alpha+\gamma)\equiv(\beta+\delta) \bmod \nu$ και $\alpha\gamma\equiv\beta\delta \bmod \nu$.

Αν τώρα ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο Ζ η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης, θα αποδείξουμε ότι η ‘’~’’ είναι ακριβώς η σχέση ισοδυναμίας modν για κάποιον φυσικό αριθμό ν.

Έτσι αν για την σχέση ‘’~’’ ισχύουν οι συνθήκες

1. $\alpha\sim\alpha$
2. $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta\sim\alpha$
3. $\alpha\sim\beta$ & $\beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$
4. $\alpha\sim\beta$ & $\gamma\sim\delta \Rightarrow \alpha+\gamma\sim\beta+\delta$

θα δείξουμε ότι για όλους τους ακεραίους χ,ψ ισχύει:

$\chi\sim\psi\Leftrightarrow\chi\equiv\psi \bmod \nu$ , για κάποιον φυσικό αριθμό ν.

Καταρχήν υποθέτουμε ότι η ‘’~’’ ορίζεται μέσω μιας συναρτησιακής ισότητας τιμών Δηλαδή ότι ισχύει η συνθήκη $\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ για όλους τους $\alpha, \beta \in Z$.

Τότε θα έχουμε:

i. $(\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ & $\varphi(\gamma)=\varphi(\delta)) \Rightarrow \varphi(\alpha+\gamma)=\varphi(\beta+\delta)$

**παρατηρήσεις:α)** Από τις σχέσεις α~β και -β~-β προκύπτει ότι α-β~0, οπότε και $\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(0)$.

**β)** Από την σχέση α~β προκύπτει ότι α-β~0 και αφού –α~-α , θα έχουμε -β~-α ή -α~-β.

- Αν η φ είναι 1-1 τότε η κλάση ισοδυναμίας [χ] του χ περιέχει μόνο το στοιχείο χ.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\chi\sim\psi\Leftrightarrow\chi\equiv\psi \bmod 0$.

- Αν υπάρχουν $\alpha,\beta \in Z$, ώστε $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. Τότε $\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(0)$ και $\varphi(\chi)=\varphi(\chi)$ , άρα $\varphi(\chi+\alpha-\beta)=\varphi(\chi)$. Δηλαδή η φ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο α-β.

Ας είναι Τ η ελάχιστη περίοδος της φ. Θα έχουμε $\varphi(\chi+\kappa T)=\varphi(\chi)$ για κάθε $\chi,\kappa\in Z$.
Αν χ~ψ τότε $\varphi(\chi)=\varphi(\psi)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση των χ,ψ με τον Τ παίρνουμε $\chi=\chi'+\kappa T$ και $\psi=\psi'+\lambda T$ όπου $\kappa,\lambda,\chi',\psi'\in Z$ και $0\le\chi',\psi'<T$.
Θα έχουμε λοιπόν $\varphi(\chi)=\varphi(\psi)\Leftrightarrow\varphi(\chi'+\kappa T)=\varphi(\psi'+\lambda T)\Leftrightarrow\varphi(\chi')=\varphi(\psi')$
Συνεπώς $\chi'=\psi'$ (γιατί διαφορετικά η φ θα είχε περίοδο $|\chi'-\psi'|$ ενώ ισχύει $0<|\chi'-\psi'|<T$, πράγμα άτοπο, αφού Τ είναι η ελάχιστη θετική περίοδος της φ)
Τώρα από την ισότητα $\chi'=\psi'$ προκύπτει ότι $\chi\equiv\psi \bmod T$.

*Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω δείξαμε ότι αν έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας ‘’~’’ οριζόμενη απο την σχέση $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ για κάποια συνάρτηση φ ,και αν η ‘’~’’ είναι συμβιβαστή ως προς την πρόσθεση στο Z, τότε η φ είναι περιοδική και ισχύει $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta \bmod T$, όπου Τ η περίοδος της φ.*

Το πρόβλημα που εγείρεται τώρα ,είναι αν είναι δυνατόν πάντοτε μια σχέση ισοδυναμίας, συμβιβαστή ως προς την πρόσθεση, να οριστεί μέσω μιας συναρτησιακής ισότητας τιμών. Αυτό είναι και το θέμα της επόμενης παραγράφου.

Έστω ‘’~’’ σχέση ισοδυναμίας στο Z συμβιβαστή ως προς την πρόσθεση. Συμβολίζουμε με Ž το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της ‘’~’’. Δηλαδή έχουμε Ž={ [χ] / χ∈Z }.

- Αν [0]={0} , τότε [χ]={χ} (αφού χ~ψ⇔χ-ψ~0⇔χ-ψ=0⇔χ=ψ)

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι χ~ψ⇔φ(χ)=φ(ψ) , όπου φ(χ)=χ για κάθε χ∈Z.

- Αν [0]≠{0} τότε η κλάση [0] περιέχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο α.

Όμως από τις σχέσεις α~0 και -α~-α προκύπτει ότι –α~0. Άρα η [0] περιέχει και φυσικούς αριθμούς. Ας είναι γ ο ελάχιστος θετικός φυσικός που ανήκει στην [0]. Από τις ν σε πλήθος σχέσεις γ~0 & γ~0 &. . . & γ~0 προκύπτει ότι νγ~0 για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Αν τώρα β∈ [χ] τότε αφού χ~β & 0~ν γ θα έχουμε ότι χ~β+ν γ. Αν το ν είναι αρκετά μεγάλος αριθμός ,θα ισχύει β+ν γ>0, δηλαδή κάθε κλάση περιέχει πάντα και φυσικούς αριθμούς.

Ορίζουμε τώρα την εξής συνάρτηση **φ: Z→N**

**φ(χ)=ο ελάχιστος φυσικός που περιέχεται στην κλάση [χ].**

Προφανώς ισχύει χ~φ(χ) για κάθε χ∈Z.

Παρατηρούμε ότι χ~ψ⇔[χ]=[ψ]⇔φ(χ)=φ(ψ), δηλαδή μια σχέση ισοδυναμίας η οποία είναι συμβιβαστή ως προς την πρόσθεση στο Z, μπορεί πάντοτε να οριστεί μέσω συναρτησιακής ισότητας τιμών και έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω ταυτίζεται με μια σχέση ισοδυναμίας modν για κάποιον φυσικό αριθμό ν.