ΘΕΩΡΗΜΑ GODEL

Παρουσίαση:

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ

Εισαγωγή

- Οι Bourbaki ξεκινούν το βιβλίο τους Θεμέλια των Μαθηματικών με τα εξής λόγια: «Από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων, το να λές «**μαθηματικά**» ισοδυναμεί με το να λές «**απόδειξη**»».
- Τι ακριβώς είναι όμως αυτό που αποκαλούμε απόδειξη; Είναι δυνατόν να έχουμε εδραιωμένη την «**αλήθεια**» μιας μαθηματικής πρότασης δίχως να είναι δυνατό να διαθέτουμε κάποια απόδειξη γι ΄αυτήν;
- Δοθείσας μιας πρότασης φ μπορούμε πάντοτε να αποδείξουμε την ισχύ της φ ή της άρνησης ~φ αυτής;
- Οι έννοιες της «αλήθειας» και της «απόδειξης» είναι ισοδύναμες;

Ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα

- Παρακολουθήστε την επιχειρηματολογία

- Εντοπίστε πιθανά κενά στους συλλογισμούς

Αρίθμηση Godel

- Αριθμούμε όλους τους τύπους μιας ελεύθερης μεταβλητής χ , της αριθμητικής Πεανό PA , και ας είναι $\varphi_1(\chi),\varphi_2(\chi),\varphi_3(\chi),\ldots,\varphi_\nu(\chi),\ldots$ η αρίθμησή τους.

Η πρόταση $φ_ν(κ)$

- Η έκφραση $φ_ν(κ)$ δηλώνει την αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής του τύπου $φ_ν(χ)$,από το αριθμητικό του κ. Φυσικά στην περίπτωση αυτή η έκφραση $φ_ν(κ)$ είναι ένας «κλειστός» τύπος, δηλαδή μια πρόταση της PA.

Αναπαράσταση αποδειξιμότητας

- Αποδ(χ) σημαίνει το γεγονός ότι ο τύπος χ είναι αποδείξιμος.

Ορισμός του συνόλου Κ

- Ορίζουμε ένα σύνολο Κ ως εξής:

  $$\nu \in K \Leftrightarrow \sim Αποδ(\varphi_{\nu}(\nu))$$

  δηλαδή ο αριθμός ν ανήκει στο Κ αν και μόνο αν η πρόταση που προκύπτει από τον ν-οστό τύπο με αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής του ,από το αριθμητικό του ν, είναι μη αποδείξιμος.

Το K είναι ορίσιμο στην PA

- Οι έννοιες που εμπλέκονται στο δεξιό μέρος του παραπάνω ορισμού, είναι ορίσιμες στην PA ,άρα και το σύνολο K θα είναι ορίσιμο στην PA. Δηλαδή θα υπάρχει τύπος Σ(χ) έτσι ώστε η πρόταση Σ(ν) να ερμηνεύεται ως το γεγονός ότι $\nu \in$ K.

$Σ(χ)=φ_ρ(χ)$

- Ο τύπος $Σ(χ)$ οφείλει να εμφανίζεται ανάμεσα στους τύπους της αρχικής αρίθμησης, δηλαδή θα υπάρχει κάποιος αριθμός ρ έτσι ώστε $Σ(χ)=φ_ρ(χ)$.

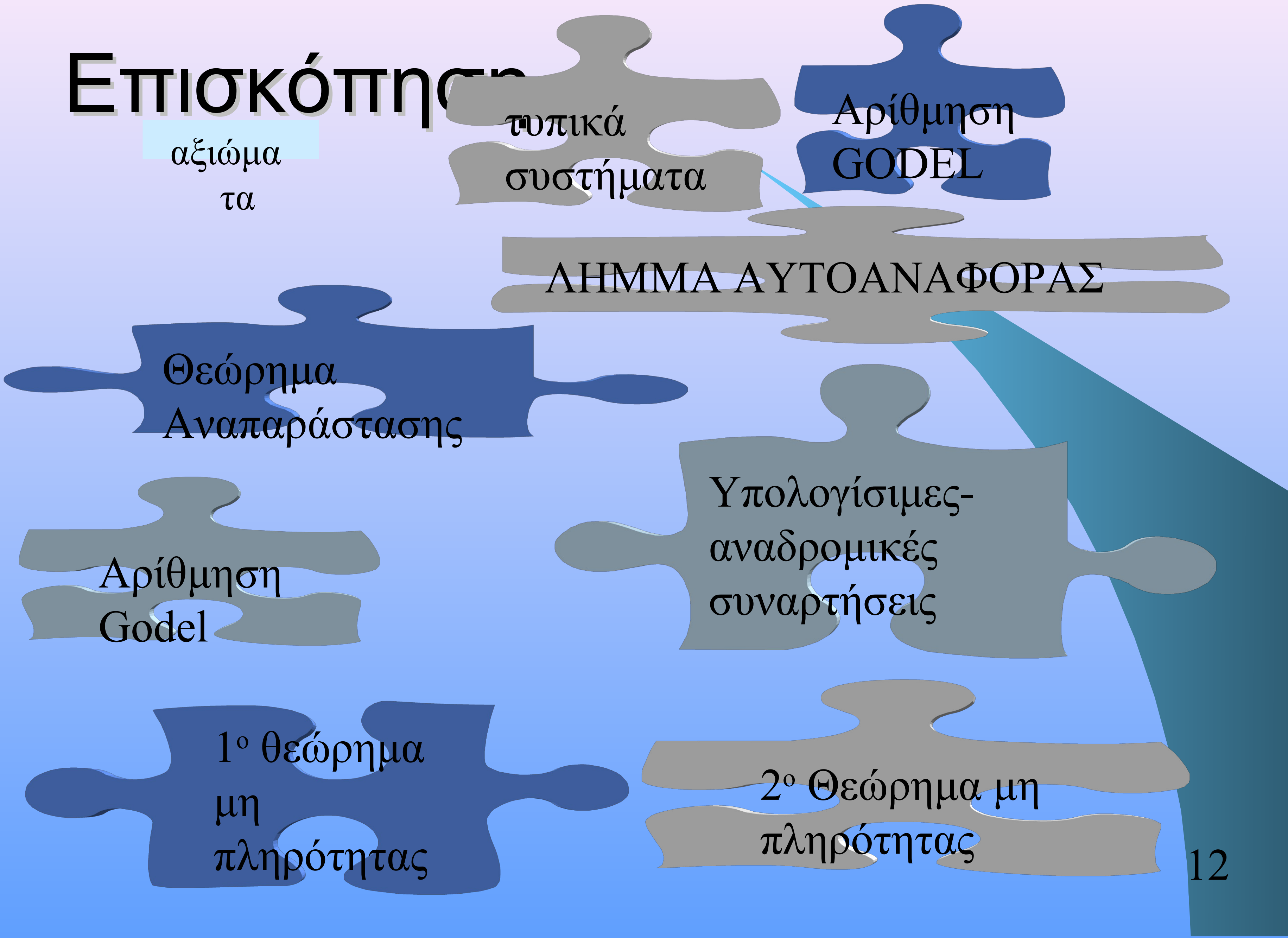
Η $\varphi_\rho(\rho)$ είναι μη απαντήσιμη

- Θεωρούμε τον «κλειστό» τύπο $\varphi_\rho(\rho)$. Θα δείξουμε ότι η «διαγώνια » πρόταση $\varphi_\rho(\rho)$ είναι μη απαντήσιμη στην PA.
- Αν $\varphi_\rho(\rho)$ είναι αποδείξιμη στην PA τότε οφείλει να είναι ορθή ,δηλαδή $\rho \in K$ άρα ~Αποδ($\varphi_\rho(\rho)$) αληθής, οπότε $\varphi_\rho(\rho)$ δεν είναι αποδείξιμη, άτοπο.
- Αν ~$\varphi_\rho(\rho)$ είναι αποδείξιμη τότε ~($\varphi_\rho(\rho)$) αληθής, δηλαδή ρ δεν ανήκει στο K, συνεπώς Αποδ($\varphi_\rho(\rho)$) ισχύει , μ’ άλλα λόγια η πρόταση $\varphi_\rho(\rho)$ είναι αποδείξιμη, άτοπο.

Υπάρχουν αληθείς και μη απαντήσιμες προτάσεις (GODEL)

- Έχουμε εντοπίσει λοιπόν μια πρόταση της PA που δεν είναι απαντήσιμη στην PA.
- Ωστόσο σε σημασιολογικό επίπεδο η πρόταση $\varphi_\rho(\rho)$ είναι αληθής, αφού αυτό που εκφράζει (το γεγονός δηλαδή ότι αυτή είναι μη αποδείξιμη) ισχύει.

Επισκόπηση


αξιώματα
τυπικά συστήματα
Αρίθμηση GODEL
ΛΗΜΜΑ ΑΥΤΟΑΝΑΦΟΡΑΣ
Θεώρημα Αναπαράστασης
Υπολογίσιμες-αναδρομικές συναρτήσεις
Αρίθμηση Godel
1ο θεώρημα μη πληρότητας
2ο Θεώρημα μη πληρότητας

ΤΥΠΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Γενικά μιλώντας ένα τυπικό σύστημα είναι ένα σύνολο συμβόλων μαζί με τους κανόνες χρήσης τους. Ειδικότερα ένα τυπικό σύστημα περιέχει:
- Ένα βασικό «**αλφάβητο**» συμβόλων προς χρήση. Μια ακολουθία συμβόλων από το αλφάβητο αυτό λέγεται **έκφραση.**
- Ένα κριτήριο με το οποίο καθορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι «γραμματικά ορθές».Αυτές οι εκφράσεις είναι εκείνες που αποτελούν φορείς νοήματος και λέγονται **τύποι**.
- Ένα ορισμένο σύνολο τύπων το οποίο είναι το σύνολο των **αξιωμάτων** του συστήματος.
- Ορισμένους **κανόνες συμπερασμού** που περιγράφουν τους τρόπους με τους επιτρέπεται να συνδυάζονται τα αξιώματα στις αποδείξεις άλλων τύπων. Ακριβέστερα, **απόδειξη** βάσει του τυπικού συστήματος Τ, λέμε μια ακολουθία από τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$ τέτοια ώστε κάθε φ_κ είτε είναι αξίωμα του Τ,είτε προκύπτει από προηγούμενους τύπους της ακολουθίας με χρήση κάποιων από τους κανόνες συμπερασμού.
  Λέμε ότι ο τύπος φ αποδεικνύεται από το Τ, εάν υπάρχει μια απόδειξη από το Τ, της οποίας ο τελευταίος όρος είναι ο φ.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
η Αριθμητική ως τυπικό σύστημα

- Η γλώσσα L της αριθμητικής περιέχει:

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
❑ σταθεράς 0	μηδέν
❑ συνάρτησης S	συνάρτηση διαδοχής
❑ κατηγορήματος ‘=’	ισότητα
❑ διμελούς πράξης ‘+’	πρόσθεση
❑ διμελούς πράξης ‘*’	πολλαπλασιασμός
❑ μεταβλητών χ_i (αριθμησίμου πλήθους)	μεταβλητή
❑ τα λογικά σύμβολα $(,),\sim,\vee,\wedge,\rightarrow,\exists,\forall$	παρενθέσεις άρνηση,ή,και αν…τότε,υπάρχει για κάθε.

Κανόνες σχηματισμού «ορθών» εκφράσεων

- Το 0 , οι μεταβλητές και τα S(0),S(x) είναι **όροι**
- Αν τ_1 και τ_2 είναι όροι, τότε και οι εκφράσεις $S(\tau_1),\tau_1+\tau_2$ και $\tau_1*\tau_2$ είναι όροι

  π.χ. $S(0)+0$, $S(S(0)+S(0))*S(\chi)$, $S(\chi_1)*S(\chi_2)+S(0)$
- **Ατομικοί τύποι** είναι οι εκφράσεις της μορφής $\tau_1=\tau_2$, όπου τ_1,τ_2 όροι. Δηλαδή οι ατομικοί τύποι είναι οι συνήθεις Διοφαντικές εξισώσεις.

  π.χ. $\chi_1+(S(x_1)+x_2*x_1)=S(x_3)*x_2$
- Οι **Σύνθετοι τύποι** προκύπτουν από τους ατομικούς με εφαρμογή των συνδέσμων $\wedge,\vee,\rightarrow$, ανάμεσα σε δυο ατομικούς τύπους ή εφαρμογή της άρνησης ~ ,ή των ποσοδεικτών $\exists,\forall$,μπροστά από έναν ατομικό τύπο.

  π.χ. $\forall\chi_1\exists\chi_2(\chi_1=\chi_2+\chi_2)$, $\forall\chi\ \exists y((x=y+y)\vee x=y+S(y))$, $(x_1+y=x_2+y)\rightarrow x_1=x2$, $\forall\chi(\sim S(x)=0)$

Τα Λογικά αξιώματα

- 1. $\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
- 2. $(\varphi \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \tau) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
- 3. $(\sim\varphi \rightarrow \sim\tau) \rightarrow (\tau \rightarrow \varphi)$
- 4. $(\forall\chi)\varphi \rightarrow \varphi(\chi/t)$,όπου t όρος ελεύθερος για τη μεταβλητή χ στον τύπο φ.
- 5. $(\forall\chi)(\varphi \rightarrow \tau) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall\chi)\tau)$,όπου η μεταβλητή χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο φ.
- 6. $x=x$
- 7. $x=y \rightarrow y=x$
- 8. $x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$
- 9. $x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \rightarrow t(x_1,\ldots,x_n)=t(y_1,\ldots,y_n)$
- 10. $x_1=y_1 \wedge \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \rightarrow (\varphi(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow \varphi(y_1,\ldots,y_n))$ για κάθε όρο t και κάθε τύπο φ της γλώσσας L.

Τα Αξιώματα PEANO για την αριθμητική

- P1)$\forall x \sim(0=S(x))$
- P2) $\forall x\ \forall y \sim(\chi=y)\rightarrow\sim(S(x)=S(y))$
- P3) $\forall x(x+0=x)$
- P4) $\forall x\ \forall y(x+S(y)=S(x+y))$
- P5) $\forall x\ (x*0=0)$
- P6) $\forall x\ \forall y\ (x*S(y)=S(x*y)+x)$
- P7) $B(0)\wedge\forall x(B(x) \rightarrow B(S(x))) \rightarrow \forall x B(x)$

Οι κανόνες συμπερασμού

- I) **Κανόνας της απόσπασης** (Modus Ponens) από τους τύπους φ,φ→τ, παράγεται ο τύπος τ

- II) **Κανόνας της γενίκευσης** (Generalization) από τον τύπο φ παράγεται ο τύπος (∀χ)φ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω Σ ένα σύνολο τύπων της γλώσσας L. **Απόδειξη** του τύπου φ από το Σ λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων $φ_1,\dots,φ_ν$ τέτοια ώστε $φ_ν=φ$ και για κάθε $ι=1,\dots,ν$ ο $φ_ι$ είναι:
- ή αξίωμα
- ή τύπος του Σ
- ή προκύπτει από δυο προηγούμενους τύπους με εφαρμογή του Μ.Ρ.,δηλαδή υπάρχουν j,k<i,έτσι ώστε $φ_j=φ_κ\rightarrowφ_i$
- ή προκύπτει από έναν προηγούμενο τύπο με τον Κ.Γ.,δηλαδή υπάρχει j<i τέτοιο ώστε $φ_i= \forall χφ_j$ με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή χ δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο Σ. Θα λέμε ότι ο φ **παράγεται ή αποδεικνύεται** από το Σ, με σύμβολα Σ|— φ, αν υπάρχει μια απόδειξη του φ από το Σ. Αν η φ παράγεται μόνο από τα αξιώματα, θα λέγεται θεώρημα και συμβολίζεται|—φ

Αλγόριθμος

- **Τι είναι ένας αλγόριθμος;**

- Πρόκειται για ένα **σύνολο εντολών**,το οποίο, δεδομένης μιας **εισόδου** (που καλείται επίσης και αρχικό δεδομένο ή όρισμα) μέσα από κάποιο σύνολο δυνατών εισόδων (ορισμάτων, για δεδομένο αλγόριθμο), μας δίνει την δυνατότητα να λάβουμε μια **έξοδο** (αποτέλεσμα) αν υφίσταται μια έξοδος, ή να μην λάβουμε αν δεν υπάρχει καμία έξοδος για την συγκεκριμένη είσοδο. Παρατηρήστε ότι το σύνολο των δυνατών εισόδων συνίσταται από όλες τις εισόδους στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος και όχι μόνο από τις οποίες ο αλγόριθμος δίνει μια έξοδο. Αν υπάρχει μια έξοδος για μια συγκεκριμένη είσοδο, λέμε ότι ο αλγόριθμος μπορεί να **εφαρμοστεί** σε αυτήν την είσοδο, και την **επεξεργάζεται**, ώστε να δώσει την αντίστοιχη έξοδο.

  Το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων που μπορεί να τύχει επεξεργασίας από δεδομένο αλγόριθμο, καλείται **πεδίο** ε**φαρμοσιμότητας** του αλγορίθμου.

Υπολογίσιμες συναρτήσεις

- Ας είναι A(χ) η έξοδος που λαμβάνεται με την εφαρμογή του αλγορίθμου A στην είσοδο χ. Θα λέμε ότι ο αλγόριθμος A υπολογίζει τη συνάρτηση φ αν έχουμε $A(\chi) \cong \varphi(\chi)$,για όλα τα χ. [Εδώ το σύμβολο $\cong$ είναι η «ισότητα υπό συνθήκες», που ορίζεται ως εξής: Θα λέμε ότι $A \cong B$, είτε αν, τα A και B δεν είναι ορισμένα, είτε αν αμφότερα τα A και B είναι ορισμένα και ίσα.]
- Μια συνάρτηση που μπορεί να υπολογιστεί από κάποιον αλγόριθμο καλείται **υπολογίσιμη**

Κωδικοποίηση Godel

- Η γλώσσα της αριθμητικής

  $L=\{+,*,S,0,=,\sim,\rightarrow,\exists,(,),\}\cup\{\chi_\nu : \chi_\nu \in N\}$

  Σε καθένα από τα σύμβολα της L απονέμουμε έναν αριθμό ως εξής:

Σύμβολο	Αριθμός	Σύμβολο	Αριθμός
0	0	$\rightarrow$	6
+	1	$\exists$	7
*	2	(	8
S	3		
=	4	)	9
~	5	X_ν	10+ν

Τον αριθμό που αντιστοιχεί στο σύμβολο α θα τον συμβολίζουμε με α# . Πχ $\exists\# =7$

Κωδικοποίηση Godel

- Σε κάθε ακολουθία $<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu>$ στοιχείων της L, αντιστοιχούμε τον αριθμό $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu\$=2^{\alpha 1\#+1}3^{\alpha 2\#+1}\ldots P_\nu^{\alpha\nu\#+1}$ όπου P_ν παριστάνει τον ν-οστό πρώτο αριθμό. Με τον τρόπο αυτό κάθε όρος τ και κάθε τύπος φ της PA αποκτούν έναν κώδικα τ\$,φ\$ που λέγεται αριθμός Godel του όρου ή του τύπου. Για το μεμονωμένο σύμβολο α της γλώσσας $\alpha\$=2^{\alpha\#+1}$.
- Η παραπάνω αντιστοιχία μπορεί να επεκταθεί και σε ακολουθίες τύπων ως εξής: Αν $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_\nu$ είναι μια ακολουθία τύπων τότε σ' αυτήν αντιστοιχούμε τον αριθμό $\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_\nu\ \$=2^{\varphi 1\$+1}\ 3^{\varphi 2\$+1}\ \ldots\ P_\nu^{\varphi\nu\$+1}$
- Έτσι σε κάθε απόδειξη A μέσα στην PA (νοούμενη ως ακολουθία τύπων υποκείμενη σε κάποιους περιορισμούς) αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένας φυσικός αριθμός A\$=**A.**

Κωδικοποίηση Godel

- Λόγω της μοναδικότητας της ανάλυσης φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων η παραπάνω αντιστοιχία είναι μια **ένα προς ένα** συνάρτηση $ από το σύνολο των εκφράσεων και των ακολουθιών εκφράσεων της γλώσσας L στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς **υπολογίσιμη** με επίσης υπολογίσιμη την αντίστοφή της $^-1 [Μ άλλα λόγια υπάρχει αλγόριθμος ώστε δοθείσας κάποιας έκφρασης α της L να υπολογίζει τον κώδικά της α$ και επίσης δοθέντος φυσικού αριθμού ν υπάρχει αλγόριθμος που να ελέγχει αν ο αριθμός αυτός είναι κώδικας κάποιας έκφρασης της γλώσσας και στην περίπτωση που είναι να καθορίζει την έκφραση αυτή.]

Κωδικοποίηση Godel

Τα σύνολα:

- Var ={ x_n\$: n $\in$ N }
- Num={ $\underline{n}$\$: n $\in$ N }
- Sent={f\$: f πρόταση της PA}
- Term={ t\$: t όρος }
- Fml= { φ\$: φ τύπος }
- Αχ= { φ\$: φ αξίωμα της PA }
- Proof= { <A\$,φ\$> : η A είναι απόδειξη της φ στο PA }

είναι όλα **αναδρομικά (αλγοριθμικά) υποσύνολα του N**

Το θεώρημα της αναπαράστασης

- Ορισμός: Θα λέμε ότι ο τύπος F(χ,y,z) **αναπαριστά** στην PA τη συνάρτηση f(x,y),ανν F έχει ακριβώς τρεις ελεύθερες μεταβλητές χ,y,z και για όλους τους φυσικούς αριθμούς k,m,n για τους οποίους ισχύει f(k,m)=n:

A) PA αποδεικνύει F(**k,m,n**)

B) PA αποδεικνύει $\forall$z(~(z=**n**)$\rightarrow$~F(**k,m**,z))

(Αν αντί για την Β θεωρήσουμε την B_1 :Αν όχι f(k,m)=n τότε PA αποδ. ~F(**k,m,n**) τότε μιλάμε για απλή εκφρασιμότητα του κατηγορήματος f(x,y)=z)

- Θα λέμε ότι το κατηγόρημα λ(χ,ψ) μπορεί να αναπαρασταθεί στην PA όταν υπάρχει τύπος Λ(χ,ψ) τέτοιος ώστε:

α) Αν ισχύει λ(κ,ν), τότε PA αποδεικνύει Λ(κ,ν)

β) Αν δεν ισχύει λ(κ,ν), τότε PA αποδεικνύει ~Λ(κ,ν)

Το θεώρημα της αναπαράστασης

- **<u>Representation Theorem</u>**.
  - Κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί μέσα στην PA
  - Κάθε υπολογίσιμο κατηγόρημα μπορεί να παρασταθεί στην PA.
    - Ένα κατηγόρημα είναι αναπαραστάσιμο αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι αναπαραστάσιμη.

ΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΑΥΤΟΑΝΑΦΟΡΑΣ

Αν ο τύπος C(χ) της PA, περιέχει μια ακριβώς ελεύθερη μεταβλητή χ, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κλειστό τύπο Β της PA, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

PA αποδεικνύει: B$\leftrightarrow$C(**B**)

όπου **B** είναι ο αριθμητικός κώδικας του τύπου Β της PA.

Απόδειξη

Εισάγουμε την αποκαλούμενη **συνάρτηση αντικατάστασης** **sub(x,y).**

Ορίζουμε την τιμή sub(x,y) ως εξής: Αν χ είναι ο αριθμός Godel κάποιου τύπου Φ(u,v,w,…) τότε αντικαθιστούμε τον αριθμητικό όρο y στην θέση όλων των ελεύθερων μεταβλητών του τύπου Φ, αποκτώντας τον τύπο Φ(y,y,y,…). Τότε υπολογίζουμε τον αριθμό Godel n ,αυτού του τύπου, και θέτουμε sub(x,y)=n. Αν χ δεν είναι αριθμός Godel κάποιου τύπου, τότε θέτουμε sub(x,y)=0.

Χωρίς αμφιβολία η sub(x,y) είναι υπολογίσιμη συνάρτηση. Πράγματι δοθέντων χ και y καθορίζουμε πρώτα αν ο χ είναι αριθμός κάποιου τύπου ή όχι. Αν όχι τότε sub(x,y)=0. Αν ναι ανασκευάζουμε τον τύπο, αντικαθιστούμε με y όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του και υπολογίζουμε τον αριθμό Godel n ,του προκύπτοντος τύπου και θέτουμε sub(x,y)=n. Δεν υπάρχει πρόβλημα όλες οι παραπάνω εντολές να κωδικοποιηθούν με κατάλληλο πρόγραμμα,πχ σε Pascal. Συχνά είναι ποιο κουραστική η κωδικοποίηση με μια **μηχανή Turing**. Σύμφωνα πάντως με τη **θέση του Churths** , κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση μπορεί να κωδικοποιηθεί με κατάλληλη **μηχανή Turing.**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη μια Turing μηχανή που υπολογίζει την sub(x,y). Σύμφωνα με το **θεώρημα της αναπαράστασης** ,μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν PA-τύπο SUB(x,y,z) τέτοιον ώστε για όλους τους k,m,n: Αν sub(k,m)=n τότε

A) PA αποδεικνύει : SUB(**k**,**m**,**n**)

B) PA αποδεικνύει : $\forall z(\sim(z=\mathbf{n})\rightarrow\sim SUB(\mathbf{k},\mathbf{m},z))$

Εισάγουμε τώρα τον τύπο $\mathbf{C_1(x) : \forall z(SUB(x,x,z) \rightarrow C(z))}$ [ο τύπος $C_1(x)$ είναι το τυπικό αντίστοιχο στην PA της έκφρασης C(sub(x,x))]

Ας είναι **κ** ο αριθμός Godel του τύπου $C_1(x)$. Θεωρούμε τον τύπο $C_1(\mathbf{k})$ τον οποίο συμβολίζουμε απλά ως B.[O B δηλώνει; « έχω την ιδιότητα C »!]

Τώρα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη θα δείξουμε ότι :

PA αποδεικνύει $B\leftrightarrow C(\mathbf{B})$

Πρώτα δείχνουμε ότι PA αποδεικνύει B$\rightarrow$ C(**B**)

Έστω λοιπόν PA αποδ. B δηλ. C_1(**k**) ή $\forall$**z(SUB(k,k,z) $\rightarrow$ C(z))** (1)

Αφού sub(k,k)=**B** τότε:

PA αποδ: SUB(**k,k,B**) και PA αποδ: (~(z**=B)**$\rightarrow$~SUB(**k,k,**z)) (2)

Από την (1) προκύπτει ότι PA αποδ. SUB(**k,k,B**)$\rightarrow$C(**B**)

Από τον modus ponens τότε προκύπτει ότι PA αποδ. C(**B**). Σύμφωνα με το θεώρημα παραγωγής λοιπόν θα έχουμε PA αποδεικνύει B$\rightarrow$ C(**B**).

Έστω τώρα ότι PA αποδ. C(**B**). Τότε PA αποδ. SUB(**k,k,B**)$\rightarrow$C(**B**) (3)

Από τις (2),(3) προκύπτει ότι PA αποδ. $\forall$**z(SUB(k,k,z) $\rightarrow$ C(z))** δηλαδή PA αποδεικνύει την B, οπότε από το θεώρημα παραγωγής προκύπτει ότι PA αποδ. C(**B**) $\rightarrow$B.

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- Ορίζουμε το κατηγόρημα:

  prf(x,y)="y είναι ο αριθμός απόδειξης του τύπου με αριθμό χ, (όταν αυτός είναι αποδείξιμος) "

Προφανώς το παραπάνω κατηγόρημα είναι υπολογίσιμο. Δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος ώστε δοθέντος y να ελέγχει αν ο y είναι ο αριθμός Godel κάποιας απόδειξης από το PA και αν ναι, ο αλγόριθμος μπορεί να ανακατασκευάσει την ακολουθία της απόδειξης , να τσεκάρει τον τελευταίο τύπο της απόδειξης και να υπολογίσει τον κώδικα του. Αν αυτός είναι ο χ τότε ο αλγόριθμος θα βεβαιώνει στην έξοδό του ότι το κατηγόρημα prf ισχύει, και σε διαφορετική περίπτωση ότι δεν ισχύει. Επίσης η έξοδος του αλγορίθμου θα βεβαιώνει ότι το κατηγόρημα δεν ισχύει αν ο y δεν είναι κωδικός κάποιας απόδειξης από το PA.

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- Μετά από τα παραπάνω και αφού το κατηγόρημα prf(x,y) είναι υπολογίσιμο σύμφωνα με το θεώρημα της αναπαράστασης μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν τύπο PRF(x,y) της PA ο οποίος να εκφράζει το prf(x,y) στην PA.
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο τύπος $\exists y PRF(x,y)$ εκφράζει το γεγονός ότι "ο τύπος με αριθμό χ είναι αποδείξιμος". Ο τύπος $\sim \exists y PRF(x,y)$ θα εκφράζει το γεγονός ότι ο τύπος με κώδικα χ δεν είναι αποδείξιμος.
- Εφαρμόζοντας το λήμμα της αυτοαναφοράς στον τελευταίο τύπο προκύπτει ότι υπάρχει κάποιος «κλειστός» τύπος G για τον οποίο θα έχουμε:

PA αποδεικνύει $G \leftrightarrow \sim \exists y PRF(G\$,y)$ (1)

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- Ας δοκιμάσουμε τώρα να ελέγξουμε αν η δήλωση της G είναι αληθής ή ψευδής.
- 1. Έστω ότι η G είναι αποδείξιμη και ας είναι A $ ο αριθμός Γκέντελ της απόδειξης. Τότε το κατηγόρημα prf(G $,A$) είναι αληθές οπότε κατά το θεώρημα αναπαράστασης PA αποδεικνύει PRF(G $,A$) άρα θα έχουμε ότι PA αποδεικνύει ∃yPRF(G $,y) (2)

Δηλαδή η PA οφείλει να είναι ασυνεπής.

Αν λοιπόν η PA είναι συνεπής τότε από τις (1),(2) οδηγούμαστε σε αντίφαση και άρα **η G δεν μπορεί να είναι αποδείξιμη**. [είναι η PA συνεπής; Δεν το γνωρίζουμε. Αν πάντως είναι τότε η G σίγουρα δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στην PA.]

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- 2. Έστω η ~G είναι αποδείξιμη. Από την την (1) θα έχουμε ότι αποδείξιμη είναι και η ∃yPRF(G$,y). Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει απόδειξη της G. Οδηγεί όμως αυτό ευθέως στο ότι η PA είναι ασυνεπής; Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ως εξής: Αφού διαθέτουμε απόδειξη της ∃yPRF(G$,y) αυτήν μπορώ να την εντοπίσω παίρνοντας τους αριθμούς 1,2,3,4… με τη σειρά μέχρι να βρω το κατάλληλο ψ για το οποίο το prf(G$,ψ) είναι αληθές. Έτσι θα σκεφτόμασταν φυσιολογικά έστω κι αν δεν μπορούσαμε να δικαιολογήσουμε αυστηρά αυτόν τον τρόπο σκέψης.

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- Όμως τι θα συνέβαινε αν ποτέ δεν εντοπιζόταν το κατάλληλο ψ της απόδειξης; Τότε θα ήμασταν μπροστά στην εξής δυσάρεστη κατάσταση:
  1) PA αποδεικνύει ∃yPRF(G$,y).
  2) για κάθε κ , PA αποδεικνύει ~PRF(G$,k)
- Στην παραπάνω κατάσταση λέμε ότι η PA είναι **ω-ασυνεπής** και τότε σίγουρα δεν έχουμε ευθεία αντίφαση με την ~ G .Τέτοια αντίφαση θα είχαμε αν μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε όλες τις ξεχωριστές αποδείξεις για κάθε κ, PA αποδεικνύει ~PRF(G$,k) με μια πεπερασμένη απόδειξη της πρότασης ∀ y(~PRF(G$,y))

  Ας σημειωθεί ότι αν η PA είναι ασυνεπής τότε θα είναι και ω-ασυνεπής. Έτσι στην περίπτωση που η ~G είναι αποδείξιμη η PA θα είναι ω-ασυνεπής.

Θεώρημα μη πληρότητας GODEL

- Καταλήγουμε έτσι στο περίφημο θεώρημα μη πληρότητας του Godel:
- ***Αν η PA αποδεικνύει την πρόταση G τότε η PA είναι ασυνεπής.***
- ***Αν η PA αποδεικνύει την πρόταση ~ G τότε η PA είναι ω-ασυνεπής.***
- Μ' άλλα λόγια, αν η PA δεν είναι ω-ασυνεπής τότε υπάρχουν στην PA προτάσεις μη απαντήσιμες (αν και είναι αληθείς όταν ερμηνεύονται με τον κανονικό τρόπο)
- Δηλαδή τα συντακτικά μέσα είναι ανεπαρκή για να παράγουν όλες τις αριθμητικές αλήθειες .

απόδειξη

B(x) συμβολίζει τον τύπο

=ο αριθμός Γκέντελ του τύπου f

Cns(PA) δηλώνει τον τύπο όπου α μια αντίφαση πχ 0=1. Η Cns(PA) δηλώνει το γεγονός ότι η αριθμητική PA είναι συνεπής.

Δεχόμαστε την ισχύ των παρακάτω δεδομένων

1) PA ├ φ PA ├
2) PA ├
3) PA ├ [1]

Θα δείξουμε ότι αν G είναι η πρόταση Γκέντελ για την οποία

PA ├ G τότε PA ├ Cns(PA) G

Η τελευταία συνθήκη δείχνει ότι η πρόταση Cns(PA) όντας ισοδύναμη με την G δεν μπορεί να είναι απαντήσιμη μέσα στην αριθμητική PA.

---

[1] Οι συνθήκες 1,2,3 αποκαλούνται και συνθήκες Hilbert-Bernays.

PA├ (5) (από την 3)

PA├ (από την 4)

PA ├ (6) (από 1)

PA├ (7) (από 6,2,2΄)

PA├ (8) (από 7,5)

├ (9)

PA├ (10) (από 9,2)

├ άρα PA├

PA├ (11)

PA├ (από 8,10,11)

PA├ δηλαδή PA├Cns(PA)→G.

PA ├ α→G (από Κ.Λ.) άρα PA ├

Επομένως από την 2 θα έχουμε PA ├

PA ├ δηλαδή

PA ├

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι PA ├ G↔Cns(PA).

Οι συνθήκες 1,2,3 Hilbert Berneys μπορούν να αποδειχθούν στα πλαίσια της αριθμητικής Πεανό PA.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

Η συνέπεια της αριθμητικής PA , δεν μπορεί να αποδειχτεί μέσα στα πλαίσια της ίδιας της αριθμητικής. (Β΄ θεώρημα μη πληρότητας)

Συνέπειες των θεωρημάτων μη πληρότητας

<u>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ HILBERT</u>

Την Τετάρτη 8 Αυγούστου του 1900 ο Ντάβιντ Χίλμπερτ έδωσε μια διάλεξη στα πλαίσια του Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών στο Παρίσι. Εκεί παρουσίασε 23 προβλήματα των οποίων η λύση, κατά την γνώμη του , θα σημάδευε την εξέλιξη των μαθηματικών.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΙΛΜΠΕΡΤ

Η ΜΗ ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Όταν διερευνούμε τα θεμέλια μιας επιστήμης, οφείλουμε να διατυπώσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων που να περιέχει μια ακριβή και πλήρη περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των στοιχειωδών εννοιών αυτής της επιστήμης. Αυτά τα αξιώματα είναι ταυτόχρονα οι ορισμοί αυτών των στοιχειωδών εννοιών. Κανένας ισχυρισμός σχετικά προς την επιστήμη της οποίας εξετάζουμε τις αρχές δεν θα γίνεται δεκτός ως ακριβής, εάν δεν προκύπτει ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων από τα αξιώματα.

Η ΜΗ ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

…Ωστόσο, πριν από όλα, μεταξύ όλων των ερωτημάτων που τίθενται από την εξέταση των αξιωμάτων, θεωρώ σημαντικότερο το ακόλουθο: ***Να αποδειχθεί ότι τα αξιώματα δεν είναι αντιφατικά.*** *Δηλαδή να αποδειχτεί ότι βασιζόμενοι σε αυτά τα αξιώματα δεν θα μπορέσουμε ποτέ να καταλήξουμε σε αντιφατικά αποτελέσματα μέσα από ένα* ***πεπερασμένο πλήθος λογικών συνεπαγωγών.***

Η ΜΗ ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

…η μη αντιφατικότητα των γεωμετρικών αξιωμάτων ανάγεται στην απόδειξη της μη αντιφατικότητας των αξιωμάτων της αριθμητικής.

Όσο για την απόδειξη της μη αντιφατικότητας των αξιωμάτων της αριθμητικής, αυτή **πρέπει να πραγματοποιηθεί ευθέως …**με μεθόδους συλλογισμού τις οποίες χρησιμοποιούμε στη θεωρία των άρρητων αριθμών, αφού τις επεξεργαστούμε κατάλληλα.

Η ΜΗ ΑΝΤΙΦΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

…Αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ιδιότητες που δόθηκαν σε μια έννοια δεν θα μπορέσουν ποτέ, με την εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους λογικών συναγωγών, να οδηγήσουν σε αντίφαση, θα έλεγα ότι με τον τρόπο αυτό **έχουμε αποδείξει τη μαθηματική ύπαρξη της εν λόγω έννοιας.** …Για αξιώματα σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, η απόδειξη της μη αντιφατικότητά τους θα ήταν ταυτόχρονα και απόδειξη της μαθηματικής ύπαρξης του συνόλου των πραγματικών αριθμών, δηλαδή του συνεχούς.

Πρέπει να μάθουμε Θα μάθουμε

Το 1931 ο Hilbert κλείνει μια διάλεξη που έδωσε στο Κένιγκσμπεργκ με τη συγκινητική διακήρυξη της βαθύτερης πεποίθησής του για τα μαθηματικά: «**Δεν υπάρχουν καθόλου μη επιλύσιμα προβλήματα.** Αντί για το παράλογο ignorabimus, απάντησή μας αντίθετα είναι: **Πρέπει να μάθουμε, Θα μάθουμε».**

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΧΙΛΜΠΕΡΤ

Το 1900 ο Χίλμπερτ ξεκινά από την αντίληψη κοινής λογικής του μαθηματικού για τα μαθηματικά, που είναι βέβαιος ότι τα στοιχειώδη μέρη τους (γεωμετρία και αριθμητική) είναι αληθή. Καθώς όμως η αντίληψή του για τα αξιωματικά συστήματα βαθαίνει αυτή η αντίληψη κοινής λογικής αρχίζει και κλονίζεται. Ο Χίλμπερτ αναρωτιέται τι ήταν «αληθές» και τι «αποδεδειγμένο» στο σύστημά του.

Τι στην πραγματικότητα σήμαινε αποδεικνύω κάτι;

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΧΙΛΜΠΕΡΤ

Το 1904 αρχίζει να αμφιβάλλει αν οι αριθμοί κάποιου τύπου μπορούν να περιγραφούν με καθαρά λογικούς όρους. Κι αυτό διότι η προφανής βάση για την έννοια του αριθμού είναι η έννοια του συνόλου. Όμως υπάρχουν προβλήματα (παράδοξα) με την έννοια του συνόλου. Αναρωτιέται αν μπορούν να αναπτυχθούν ταυτόχρονα η θεωρία αριθμών και η λογική.

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΧΙΛΜΠΕΡΤ

Το 1917 στη Ζυρίχη δηλώνει: «αφού η εξέταση της συνέπειας είναι ένα έργο που δεν μπορεί να αποφευχθεί , μοιάζει απαραίτητο να αξιωματικοποιήσουμε την ίδια τη λογική και να αποδείξουμε ότι η θεωρία αριθμών και η θεωρία συνόλων είναι απλώς μέρη της λογικής». Εκεί θέτει και το πρόβλημα της επιλυσιμότητας ενός μαθηματικού προβλήματος σ΄ ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων(μπορεί μια πρόταση να αποδειχθεί ή να καταρριφθεί στο πλαίσιο μια δεδομένης θεωρίας ή είναι ανεξάρτητη από αυτή;) Συζητά και την σχέση μεταξύ φορμαλισμού και περιεχομένου στα μαθηματικά και την λογική.

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΧΙΛΜΠΕΡΤ

Μέχρι το 1922 τα πράγματα επιδεινώνονται. Στα μαθηματικά εκδηλώνεται η λεγόμενη «**κρίση θεμελίωσης**». Προεξέχουσα προσωπικότητα σε αυτήν την τάση είναι ο Ολλανδός τοπολόγος Μπράουερ που για πολλά χρόνια καλλιεργούσε έναν πολύπαθο κλάδο της φιλοσοφίας των μαθηματικών (**Ιντουισιονισμός**).