# ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΑΝΩ –ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Κασαπίδης Γεώργιος Μαθηματικός

Στο άρθρο αυτό μελετάμε την πιο χαρακτηριστική ιδιότητα του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1**

Ένα σύνολο Α από πραγματικούς αριθμούς ($A \subset \mathbb{R}$) λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει ένας αριθμός $\chi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\chi \geq \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in A$$

Κάθε τέτοιος αριθμός χ λέγεται **άνω φράγμα** του Α.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 2**

Ένα σύνολο Α από πραγματικούς αριθμούς ($A \subset \mathbb{R}$) λέγεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\chi \leq \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in A$$

Κάθε τέτοιος αριθμός χ λέγεται **κάτω φράγμα** του Α.

**Παραδείγματα**

1. Έστω $A=\{\chi: 0 \leq \chi \leq 1\}$. Το Α είναι και άνω και κάτω φραγμένο. Ένα κάτω φράγμα είναι το 0 και ένα άνω φράγμα το 1.

2. Έστω Α={$\frac{1}{\nu}$ : ν∈$\mathbb{N}^*$ }. Το Α είναι άνω και κάτω φραγμένο. Ένα κάτω φράγμα είναι το 0, ενώ ένα άνω φράγμα είναι το 1 αφού $0<\frac{1}{\nu}\leq 1$ ∀ ν∈$\mathbb{N}^*$.

3. Αν Α={χ∈$\mathbb{Q}$: $2<\chi^2<3$}. Ένα κάτω φράγμα του Α είναι το 1 και ένα άνω φράγμα ο αριθμός 5.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 3**

Ένας αριθμός χ λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** του Α αν
(1) είναι άνω φράγμα του Α
(2) αν ψ είναι άνω φράγμα του Α τότε χ≤ψ

Αν ένα σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε αυτό είναι μοναδικό, διότι αν χ,ψ είναι ελάχιστα άνω φράγματα του Α τότε θα έχουμε χ≤ψ (αφού χ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α)
ψ≤χ (αφού ψ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του Α)
άρα χ=ψ.

Το ελάχιστο άνω φράγμα του Α συμβολίζεται **supA** (προφέρεται «σουπΑ»)

Δεχόμαστε το εξής βασικό αξίωμα, το οποίο μάλιστα αποτελεί την ειδοποιό διαφορά των $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$.

**Αξίωμα πληρότητας του $\mathbb{R}$**

Αν Α είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, τότε το Α έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$.

**Ορισμός 4**

Ένας αριθμός χ λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** του συνόλου Α ($A \subset \mathbb{R}$) αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες

(1) ο χ είναι κάτω φράγμα του Α
(2) αν ψ είναι κάτω φράγμα τότε $\chi \geq \psi$

Το μέγιστο κάτω φράγμα όταν υπάρχει είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε **infA.**

**Θεώρημα 1** Αν Α είναι μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το Α έχει μέγιστο κάτω φράγμα στο $\mathbb{R}$.

**Απόδειξη**

Έστω $-A=\{-\chi: \chi \in A\}$. Αν κ είναι κάτω φράγμα του Α τότε $\kappa \leq \alpha \ \forall \alpha \in A$ άρα $-\kappa \geq -\alpha \ \forall \alpha \in A$ δηλαδή ο $-\kappa$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Έτσι $-A \neq \varnothing$ και $-A$ άνω φραγμένο. Άρα υπάρχει το sup(-A). Θα έχουμε λοιπόν $\sup(-A) \geq \alpha \ \forall \alpha \in A$ και αν $\psi \geq \alpha \ \forall \alpha \in A$
τότε $\sup(-A) \leq \psi$.

Άρα $-\sup(-A)\leq\alpha$ και αν $\omega\leq\alpha$ $\forall\alpha\in A$ θα είναι $-\omega\geq-\alpha \Leftrightarrow \sup(-A)\leq-\omega \Leftrightarrow -\sup(-A)\geq\omega$. Δηλαδή το $-\sup(-A)$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα του A.

**Θεώρημα 2**

Ο αριθμός κ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (**SupA**) του συνόλου Α αν και μόνο αν ισχύει

i) ο κ είναι άνω φράγμα του Α, δηλαδή $\kappa\geq\alpha$ $\forall\alpha\in A$

ii) $\forall$ $\varepsilon>0$, $\exists$ $\alpha\in A$ ώστε $\alpha>\kappa-\varepsilon$

Ο αριθμός λ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του Α (**infA**) αν και μόνο αν ισχύει

i) ο λ είναι κάτω φράγμα του Α, δηλαδή $\lambda\leq\alpha$ $\forall\alpha\in A$

ii) $\forall\varepsilon\geq0$ $\exists$ $\alpha\in A$ ώστε $\alpha<\lambda+\varepsilon$.

απόδειξη

Αν κ είναι το sup(A) τότε προφανώς η (i) ισχύει ενώ αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η (ii) θα έχουμε:

$\exists$ $\varepsilon>0$, $\forall\alpha\in A$ $\alpha\leq\kappa-\varepsilon$. Όμως τότε ο $\kappa-\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του Α και $\kappa-\varepsilon<\kappa$ άτοπο.

Αντίστροφα έστω ότι ισχύουν οι (i),(ii). Από την (i) προκύπτει ότι ο κ είναι άνω φράγμα του Α. Αν το κ δεν ήταν το ελάχιστο άνω φράγμα θα υπήρχε $\kappa'<\kappa$ ώστε $\kappa'\geq\alpha$ $\forall\alpha\in A$ και κ΄ελάχιστο άνω φράγμα του Α. Είναι κ-κ΄>0 κι έτσι από την (ii) για ε=κ-κ΄ θα έχουμε: $\exists \alpha \in A : \alpha > \kappa-(\kappa-\kappa') \Rightarrow \alpha > \kappa'$ άτοπο.

Παρόμοια είναι η απόδειξη και για το infA.

**<u>Άσκηση 1:</u>** Έστω $A,B \neq \varnothing$ φραγμένα σύνολα και έστω ότι με A+B συμβολίζουμε το σύνολο χ+ψ με $\chi \in A$ και $\psi \in B$. Να δειχθεί ότι sup(A+B)=sup(A)+sup(B)

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\chi \in A+B$ τότε $\chi=\chi_1+\chi_2 \leq \sup A+\sup B$ ($\chi_1 \in A, \chi_2 \in B$) δηλαδή

$\forall \chi \in A+B$ $\chi \leq \sup A+\sup B \Rightarrow \sup(A+B) \leq \sup A+\sup B$ (1)

Λόγω του θεωρήματος (1) θα είναι $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $\chi_1 \in A$: $\chi_1 > \sup A-\frac{\varepsilon}{2}$ και επίσης $\exists$ $\chi_2 \in B$: $\chi_2 > \sup B-\frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $z=\chi_1+\chi_2 > \sup A+\sup B-\varepsilon$ κι έτσι sup(A+B)=supA+supB.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτή είναι μια δήλωση που φαίνεται τετριμμένη αλλά ωστόσο παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλές αποδείξεις θεωρημάτων. Πάντως η απόδειξή του είναι αδύνατη δίχως την αποδοχή του αξιώματος πληρότητας.

**<u>Θεώρημα 2:</u>** Το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

**Απόδειξη**

Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Αφού $\mathbb{N}\neq\varnothing$, θα υπάρχει το $\sup\mathbb{N}$ και θα ισχύει $\sup\mathbb{N}\geq\nu$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$

Άρα $\sup\mathbb{N}\geq\nu+1$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ αφού $\nu+1\in\mathbb{N}$

Τότε όμως $\sup N-1\geq\nu$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ άτοπο διότι $\sup\mathbb{N}-1<\sup\mathbb{N}$.

**<u>Θεώρημα 3:</u>** (αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου)
Για κάθε ε>0 υπάρχει φυσικός αριθμός ν με $\frac{1}{\nu}<\varepsilon$

**απόδειξη**

Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε υπάρχει ε>0 ώστε $\frac{1}{\nu}\geq\varepsilon$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ άρα $\nu\leq\frac{1}{\varepsilon}$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$, δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο, άτοπο.

**<u>Θεώρημα 4:</u>** Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και α>0, τότε υπάρχει $\nu\in N$: $\nu\cdot\alpha>\beta$

**Απόδειξη**

Αν για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ίσχυε $\nu\cdot\alpha\leq\beta$ τότε $\nu\leq\frac{\alpha}{\beta}$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ άτοπο.

**<u>Θεώρημα 5:</u>** Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και α<β τότε υπάρχει ρητός ρ με α<ρ<β

**Απόδειξη**

Έστω α>0. Αφού $\beta>\alpha \Leftrightarrow \beta-\alpha>0$ θα υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{\nu_0}<\beta-\alpha$ (1)

Επίσης υπάρχει $\mu\in\mathbb{N}$ : $\mu\cdot\frac{1}{\nu_0}>\alpha$

Θεωρούμε το σύνολο Α={μ: μ∈ℕ και μ·$\frac{1}{\nu_0}$>α}

Προφανώς Α≠∅ και Α⊂ℕ άρα το Α έχει κάποιο ελάχιστο στοιχείο κ για το οποίο ισχύει $\frac{\kappa}{\nu_0}$>α.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\frac{\kappa}{\nu_0}$<β.

Αν $\frac{\kappa}{\nu_0} > \beta \Leftrightarrow \frac{\kappa-1}{\nu_0} > \beta - \frac{1}{\nu_0} > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$ άτοπο αφού $\frac{\kappa-1}{\nu_0} < \frac{\kappa}{\nu_0}$.

Άρα αν α>0 και α<β τότε υπάρχει ρ∈ℚ ώστε α<ρ<β

Αν α<0 τότε υπάρχει κ∈ℕ ώστε κ+α>0 (αφού το ℕ δεν είναι άνω φραγμένο). Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω θα υπάρχει ρ΄∈ℚ τέτοιο ώστε κ+α<ρ΄<κ+β ⇔ α<ρ΄-κ<β και ρ΄-κ∈ℚ.

**<u>πόρισμα:</u>** Μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

**<u>άσκηση 2</u>**

Έστω Α,Β ⊂ℝ και τέτοια ώστε χ≤ψ ∀χ∈Α ,∀ψ∈Β. Δείξτε ότι

α) supΑ≤ψ ∀ψ∈Β

β) supΑ≤infΒ

**απόδειξη**

α) Κάθε στοιχείο $\psi \in B$ είναι άνω φράγμα του του A, άρα εφόσον το supA είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα έχουμε $\sup A \leq \psi \ \forall \psi \in B$.

β) το supA είναι κάτω φράγμα του B αφού $\sup A \leq \psi \ \forall \psi \in B$
αφού το infB είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B θα είναι $\sup A \leq \inf B$.

**<u>άσκηση 3</u>**

Αν A,B φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

**απόδειξη**

Έστω $\sup A \geq \sup B$. Τότε $\forall \chi \in A \cup B$ θα είναι $\chi \in A$ ή $\chi \in B$ άρα $\sup A \geq x$ ή $\sup A \geq \sup B \geq x$. Άρα $\forall \chi \in A \cup B$, $\sup A \geq x$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει $\sup(A \cup B) \leq \sup A$ (1)

Όμως ισχύει $\sup(A \cup B) \geq x \ \forall x \in A \cup B$ άρα $\sup(A \cup B) \geq x \ \forall x \in A$ επομένως $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι

$\sup(A \cup B) = \sup A = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Άλλη μια ωραία εφαρμογή του αξιώματος της πληρότητας είναι το εξής:

**<u>θεώρημα 6</u>**
Κάθε μη αρνητικός πραγματικός αριθμός έχει μια και μόνο μια μη αρνητική τετραγωνική ρίζα

.

**απόδειξη**

Αν α=0 τότε ο α έχει ως τετραγωνική ρίζα το μηδέν και μόνο.

Έστω α>0 και $S=\{\chi \,/\, \chi\in\mathbb{R}_+ \text{ και } \chi^2\leq\alpha\}$

Είναι $S\neq\varnothing$ γιατί $\alpha^2\leq\alpha(1+\alpha)^2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\leq\alpha$ δηλαδή $\dfrac{a}{1+a}\in S$.

το S είναι άνω φραγμένο διότι $(\alpha+1)^2>\alpha$ κι έτσι ο αριθμός α+1 είναι άνω φράγμα του. Από το αξίωμα της πληρότητας προκύπτει ότι θα υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του S. Ας είναι β=supS. Για τον β θα ισχύει μια από τις τρεις περιπτώσεις:

$$\beta^2>\alpha \quad \text{ή} \quad \beta^2=\alpha \quad \text{ή} \quad \beta^2<\alpha$$

Αν $\beta^2>\alpha$ θέτουμε $\gamma=\beta-\dfrac{\beta^2-\alpha}{2\beta}=\dfrac{1}{2}(\beta+\dfrac{\alpha}{\beta})$. Τότε $0<\gamma<\beta$ και

$\gamma^2=\beta^2-(\beta^2-\alpha)+\dfrac{(\beta^2-\alpha)^2}{4\beta^2}=\alpha+\dfrac{(\beta^2-\alpha)^2}{4\beta^2}>\alpha$. Άρα $\gamma^2>\chi^2 \ \forall\chi\in S$

οπότε $\gamma>\chi \ \forall\chi\in S$ δηλαδή ο γ είναι άνω φράγμα του S και μάλιστα γ<sups=β το οποίο είναι άτοπο.

Έστω τώρα ότι $\beta^2<\alpha$. Θεωρούμε έναν θετικό αριθμό γ τέτοιο ώστε γ<β και $\gamma<\dfrac{\alpha-\beta^2}{3\beta}$.

Τότε $(\beta+\gamma)^2=\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2=\beta^2+\gamma(2\beta+\gamma)<\beta^2+3\beta\gamma<\beta^2+(\alpha-\beta^2)=\alpha$. Δηλαδή $(\beta+\gamma)^2<\alpha$ άρα $\beta+\gamma\in S$ και β+γ>β=supS άτοπο.

Έτσι τελικά η μόνη περίπτωση που απομένει είναι η $\beta^2=\alpha$.

**σημαντική παρατήρηση:** Γνωρίζουμε ότι τόσο το $\mathbb{Q}$ όσο και το $\mathbb{R}$ ικανοποιούν τα αξιώματα ενός <u>ολικά διατεταγμένου σώματος</u>. Άρα όσον αφορά την άλγεβρά τους δεν υπάρχει καμιά διαφορά σε ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα του ολικά διατεταγμένου σώματος. Σε τι διαφέρουν τελικά τα δυο αριθμητικά σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$;

Ας πάμε πάλι πίσω στο προηγούμενο θεώρημα και ας θεωρήσουμε ότι α=2. Τότε supS=β και $\beta^2=2$. Ο αριθμός β όμως ως γνωστό δεν είναι ρητός. Έτσι ο β είναι άρρητος, πράγμα που σημαίνει ότι στο $\mathbb{Q}$ δεν ισχύει το αξίωμα της πληρότητας δηλαδή στο $\mathbb{Q}$ δεν υπάρχει πάντα το sup ενός άνω φραγμένου υποσυνόλου του. Για το λόγο αυτό , όπως επισημάναμε και στην αρχή, το αξίωμα πληρότητας αποτελεί την ειδοποιό διαφορά μεταξύ $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$.

**προτεινόμενες ασκήσεις**

1. Αν $\alpha\in\mathbb{R}_+$ και $\sigma\in\mathbb{R}_+-\mathbb{Q}_+$ (θετικός άρρητος) δείξτε ότι το σύνολο $A=\{\alpha^\chi \,/\, \chi\in\mathbb{Q}_+ \text{ και } \chi<\sigma\}$ είναι φραγμένο. [ αν α>1 τότε το supA λέγεται δύναμη του α με εκθέτη σ, δηλαδή $\alpha^\sigma$=supA. Αν α<1 τότε το infA λέγεται δύναμη του α με εκθέτη σ, δηλαδή $\alpha^\sigma$=infA].
2. Έστω $A,B\subset\mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότ ιinf(A+B)=infA+infB.
   [όπου $A+B=\{\chi+\psi/\chi\in A,\psi\in B\}$]
3. Βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα

αν υπάρχουν) των ακόλουθων συνόλων. Εξετάστε ποια απ' αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο (δηλ. εξετάστε πότε το sup και το inf συμβαίνει να ανήκουν στο σύνολο)

i) $\{\frac{1}{n} \,/\, n\in\mathbb{N}\}$, ii) $\{\frac{1}{a} \,/\, \alpha\in\mathbb{Z}^*\}$, iii) $\{x/x=0$ ή $x=1/n,\ n\in\mathbb{N}\}$

iv) $\{x/\ 0\le x\le\sqrt{2}\ ,x\in\mathbb{Q}\}$ v) $\{x/\ x^2+x-1<0\}$

vi) $\{x\ /\ x<0$ και $x^2+x-1<0\}$ vii) $\{x\ /\ x^2+3x+10>0\}$.