7. Η (ελλειπτική) διοφαντική εξίσωση $\chi^2+1=\psi^3$ έχει τη μοναδική λύση $(\chi,\psi)=(0,1)$.

<u>απόδειξη</u>

Θα κάνουμε την απόδειξη κάνοντας χρήση του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων αριθμών του Gauss.*

$x^2+1=y^3 \Leftrightarrow (x+i)(x-i)=y^3$. (1) Αν α είναι κοινός πρώτος διαιρέτης των $x+i$, $x-i$ τότε $\alpha/2i \Rightarrow \alpha/(1+i)(1-i)i=-(1-i)^2$ άρα $\alpha/(1+i)(1-i)$ και συνεπώς $\alpha/1+i$ ή $\alpha/1-i$ (οι αριθμοί $1-i,1+i$ είναι πρώτοι στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$) οπότε θα έχουμε $\alpha= 1+i$ ή $\alpha=-1-i$ ή $\alpha=-1+i$ ή $\alpha=1-i$ δηλαδή $\alpha^2=\pm 2i$. Όμως α^2/y^3 οπότε ο y είναι άρτιος και $8/y^3$. Επειδή ο 8 δεν διαιρεί το x^2+1 οι αριθμοί $x+i,x-i$ δεν μπορεί να έχουν πρώτο κοινό διαιρέτη, πράγμα που σημαίνει ότι οι μόνοι κοινοί διαιρέτες τους είναι οι μονάδες του $\mathbb{Z}[i]$.

Από την (1) προκύπτει πως υπάρχουν ακέραιοι k,m,c,d ώστε να ισχύει $x+i=(k+mi)^3$, $x-i=(c+di)^3$ (2). Αναπτύσσοντας τις ταυτότητες έχουμε:

$(k+mi)^3=k^3+3k^2mi-3km^2-m^3i=k^3-3km^2+(3k^2m-m^3)i$ (3)

$(c+di)^3=c^3-3cd^2+(3c^2d-d^3)i$ (4). Από τις σχέσεις (2),(3),(4) έχουμε:

$3k^2m-m^3=1$ (5)

$3c^2d-d^3=-1$ (6)

$k^3-3km^2= c^3-3cd^2$ (7)

(5)$\Leftrightarrow m(3k^2-m^2)=1$. Θα είναι $m=1$ και $3k^2=2$ άτοπο, ή $m=-1$ και $3k^2-m^2=-1$ δηλαδή $\kappa=0$.

Επίσης (6)$\Leftrightarrow d(3c^2-d^2)=-1$ άρα $d=-1$ και $3c^2-d^2=1\Leftrightarrow 3c^2=2$ άτοπο, ή $d=1$ και $3c^2-d^2=-1 \Leftrightarrow c=0$.

Συνοψίζοντας πρέπει $k=0,m=-1,c=0,d=1$. Έτσι θα έχουμε $x+i=-i^3=i$ δηλαδή $\chi=0$ και τότε αναγκαστικά θα είναι $y=1$ ο.ε.δ.

***Σημείωση**: Μια μελέτη του δακτυλίου του Gauss μπορείτε να δείτε στη διέθυνση http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Tziotzios%20Thanassis.pdf ή στη διεύθυνση http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf