6. Α. Αν για τους ακέραιους α,β ισχύει α^2/β^2 δείξτε ότι α/β
Β. Αν $\alpha\beta=\chi^2$ και (α,β)=1 ,δείξτε ότι καθένας από τους ακέραιους α,β είναι τέλειο τετράγωνο.

<u>απόδειξη</u>

Α. $\alpha^2/\beta^2 \Leftrightarrow$ υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$: $\beta^2=\kappa\alpha^2$.

Έστω (α,β)=δ. Τότε $(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta})=1$. Επίσης θα έχουμε $\frac{\beta^2}{\delta^2}=\kappa\frac{\alpha^2}{\delta^2}$,οπότε αφού $(\frac{\beta}{\delta},\frac{\alpha^2}{\delta^2})=1$ θα είναι $\frac{\beta}{\delta}/\kappa$. Έτσι $\kappa=\lambda\frac{\beta}{\delta}\Rightarrow \kappa^2=\lambda^2\,(\frac{\beta}{\delta})^2\Rightarrow$ $\kappa^2=\lambda^2\,\frac{\kappa\alpha^2}{\delta^2}\Rightarrow \kappa=(\frac{\lambda\alpha}{\delta})^2=\tau^2$. Άρα $\beta^2=\tau^2\alpha^2$ κι έτσι β=τα δηλαδή α/β.

Β. Έστω δ=(α,χ). Τότε δ/α και δ/χ και άρα θα υπάρχουν ακέραιοι α_1,χ_1 τέτοιοι ώστε $\alpha=\alpha_1\delta$, $\chi=\chi_1\delta$ και $(\alpha_1,\chi_1)=1$. Θα έχουμε λοιπόν:
$\alpha\beta=\chi^2 \Leftrightarrow \alpha_1\delta\beta=\chi_1^2\delta^2 \Leftrightarrow \alpha_1\beta=\chi_1^2\delta$. (2) Όμως $(\alpha_1,\chi_1^2)=1$ συνεπώς χ_1^2/β. Έτσι θα έχουμε $\beta=\chi_1^2\beta_1$ για κάποιον ακέραιο β_1. Αντικαθιστώντας στη (2) προκύπτει $\alpha_1\beta_1\chi_1^2=\chi_1^2\delta \Rightarrow \alpha_1\beta_1=\delta$. Πρέπει $\beta_1=1$ γιατί διαφορετικά β_1/β και β_1/δ, δ/α οπότε β_1/α άτοπο αφού (α,β)=1. Θα είναι επομένως $\beta=\chi_1^2$ και αφού $\alpha_1=\delta$ θα έχουμε $\alpha=\alpha_1^2$ ο.ε.δ.