

Τα σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες τα ονομάζουμε **συνδεδεστικά σημεία**. Τα σημεία $A(\kappa, \lambda)$ και $B(\mu, \nu)$ λέγονται **αμοιβαίως ορατά**, όταν το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει δεν περιέχει κανένα άλλο συνδεδεστικό σημείο.

Να αποδειχτεί ότι τα σημεία $A(\kappa, \lambda)$ και $B(\mu, \nu)$ είναι αμοιβαίως ορατά όταν $\text{ΜΚΔ}(\kappa-\mu, \lambda-\nu)=1$

απόδειξη

Προφανώς τα (κ, λ) , (μ, ν) είναι αμοιβαίως ορατά όταν το $(\kappa-\lambda, \mu-\nu)$ είναι ορατό από την αρχή. Έτσι αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση όταν το $B(\mu, \nu)$ είναι το σημείο $O(0,0)$.

Ας υποθεθεί αρχικά ότι το (κ, λ) είναι ορατό από την αρχή. Τότε $(\kappa, \lambda)=1$ διότι αν $(\kappa, \lambda)=\delta > 1$ τότε $\delta/\kappa \Rightarrow \kappa = \delta\kappa_1$, $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$ και επίσης

$\delta/\lambda \Rightarrow \lambda = \delta\lambda_1$ με $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$. Τότε όμως το σημείο (κ_1, λ_1) θα ανήκει

στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $O(0,0)$ και $A(\kappa, \lambda)$.

Αντίστροφα αν $(\kappa, \lambda)=1$ τότε για κάθε (κ', λ') εσωτερικό του τμήματος OA ισχύει: $\kappa' = \tau\kappa$, $\lambda' = \tau\lambda$ με $0 < \tau < 1$. Ο αριθμός τ είναι προφανώς ρητός. Αν $\tau = \alpha/\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\beta > 0$ και $(\alpha, \beta)=1$ τότε θα έχουμε: $\beta\kappa' = \alpha\kappa$, $\beta\lambda' = \alpha\lambda$. Αφού $(\alpha, \beta)=1$ θα έχουμε ότι β/κ και β/λ οπότε $\beta/(\kappa, \lambda)=1$ δηλαδή $\beta=1$ οπότε ο τ θα είναι ακέραιος μεταξύ του 0 και του 1, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς το (κ, λ) είναι ορατό από την αρχή.