Κασαπίδης Γεώργιος

Έστω Sν συμβολίζει το άθροισμα των ν αρχικών πρώτων αριθμών. Να αποδειχτεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν, υπάρχει ακέραιος αριθμός του οποίου το τετράγωνο βρίσκεται ανάμεσα στα αθροίσματα S_ν και $S_{\nu+1}$

<u>απόδειξη</u>

Για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό ν, συμβολίζουμε με κ_ν τον μεγαλύτερο φυσικό του οποίου το τετράγωνο είναι το πολύ S_ν. Δηλαδή $\kappa^2_\nu \le S_\nu$ και $(\kappa_\nu+1)^2 > S_\nu$. Θα αποδείξουμε ότι $(\kappa_\nu+1)^2 < S_{\nu+1}$ (1).
Αρχικά θα δείξουμε οτι $P_\nu > 2\kappa_\nu - 1$ (2) για κάθε ν>0. (P_ν συμβολίζει τον ν-στό πρώτο φυσικό αριθμό). Γιά ν=1 $P_1=2$, $1=\kappa_1$ και $P_1>2\kappa_1-1=1$. Για ν=2 ,$P_2=3$, $\kappa_2=1$ και $P_2>2\kappa_2-1=1$. Έστω ότι $P_\nu > 2\kappa_\nu-1$. Θα δείξουμε ότι $P_{\nu+1} > 2\kappa_{\nu+1} - 1$. Αν ήταν $P_{\nu+1} \le 2\kappa_{\nu+1}-1$ (3) τότε $S_{\nu+1} \ge \kappa^2_{\nu+1}$ άρα $S_\nu+P_{\nu+1} \ge \kappa^2_{\nu+1}$ ή $P_{\nu+1} \ge \kappa^2_{\nu+1}-S_\nu$ επομένως $P_{\nu+1} \ge \kappa^2_{\nu+1}-(\kappa_\nu+1)^2$ κι έτσι θα είχαμε
$2\kappa_{\nu+1}-1 \ge \kappa^2_{\nu+1}-(\kappa_\nu+1)^2$ δηλαδή $(\kappa_\nu+1)^2 \ge (\kappa_{\nu+1}-1)^2$ οπότε προκύπτει τελικά ότι $\kappa_\nu+1 \ge \kappa_{\nu+1}-1$ δηλαδή $\kappa_{\nu+1} \le \kappa_\nu+2$. Αφού όμως $\kappa_{\nu+1} \ge \kappa_\nu$ θα πρέπει
$\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu$ ή $\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu+1$ή $\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu+2$
Αν $\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu$ τότε $P_{\nu+1}>P_\nu>2\kappa_\nu-1=2\kappa_{\nu+1}-1$ άτοπο λόγω της (3).
Αν $\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu+1$ τότε $P_{\nu+1}>2+P_\nu>2+2\kappa_\nu-1=2+2\kappa_{\nu+1}-2-1$ οπότε $P_{\nu+1}>2\kappa_{\nu+1}-1$ άτοπο λόγω της (3).
Αν $\kappa_{\nu+1}=\kappa_\nu+2$ τότε $P_{\nu+1}=S_{\nu+1}-S_\nu>\kappa^2_{\nu+1}-(\kappa_\nu+1)^2=(\kappa_{\nu+1}+\kappa_\nu+1)(\kappa_{\nu+1}-\kappa_\nu-1)=2\kappa_{\nu+1}-1$ και πάλι άτοπο λόγω της (3).
Συνεπώς η (3) δεν μπορεί να ισχύει,οπότε $P_{\nu+1} > 2\kappa_{\nu+1} - 1$ και η αρχή της επαγωγής μας δίνει ότι $P_\nu > 2\kappa_\nu - 1$ για κάθε ν>0.
Αφού $P_\nu > 2\kappa_\nu-1$ και $P_{\nu+1} \ge P_\nu+2$ θα είναι $P_{\nu+1} > 2\kappa_\nu+1$. Έτσι θα έχουμε
$S_{\nu+1}=S_\nu+P_{\nu+1} > \kappa^2_\nu+2\kappa_\nu+1=(\kappa_\nu+1)^2$ δηλαδή $S_{\nu+1} > (\kappa_\nu+1)^2$ και τελικά θα έχουμε $\mathbf{S_\nu<(\kappa_\nu+1)^2 < S_{\nu+1}}$ για κάθε φυσικό ν>0 κι έτσι ο ζητούμενος ακέραιος είναι 0 αριθμός $\kappa_\nu+1$.