Κασαπίδης Γεώργιος

Αν cosαπ=$\frac{1}{3}$ να αποδειχτεί ότι ο αριθμός α είναι άρρητος.

<u>απόδειξη</u>

Έστω α= $\frac{\nu}{\mu}$ όπου ν,μ ακέραιοι με (ν,μ)=1.

Δεδομένου ότι cos(-απ)=cos(απ) μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αριθμοί ν,μ είναι φυσικοί.

Θέτουμε z=cos$\frac{\nu\pi}{\mu}$+i$sin\frac{\nu\pi}{\mu}$. Τότε z^{μ}=-1 ή z^{μ}=1. Αφού cos$\frac{\nu\pi}{\mu} = \frac{1}{3}$ θα έχουμε $sin\frac{\nu\pi}{\mu} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$ δηλαδή z=$\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Αν z=$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{8}}{3}$ τότε z^{μ}=$(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{8}}{3})^{\mu} = \sum_{\kappa=1}^{\mu}(\frac{1}{3})^{\mu-\kappa}(\frac{i\sqrt{8}}{3})^{\kappa}\binom{\mu}{\kappa}$. Τότε Re($z^{\mu}$)=$\frac{1}{3^{\mu}} - \binom{\mu}{2}\frac{1}{3^{\mu}}8 + \frac{1}{3^{\mu}}8^2\binom{\mu}{4} + \cdots + (-1)^{\kappa}\frac{1}{3^{\mu}}\binom{\mu}{2\kappa}8^{\kappa}$ όπου 2κ=μ ή 2κ=2μ-1. Θα είναι επομένως

$$\frac{1}{3^{\mu}}\left(1 - \binom{\mu}{2}8 + \binom{\mu}{4}8^2 - \binom{\mu}{6}8^3 + \cdots + (-1)^{\kappa}\binom{\mu}{2\kappa}8^{\kappa}\right) = \pm 1 \text{ ή}$$
$$\left(1 - \binom{\mu}{2}8 + \binom{\mu}{4}8^2 - \binom{\mu}{6}8^3 + \cdots + (-1)^{\kappa}\binom{\mu}{2\kappa}8^{\kappa}\right) = \pm 3^{\mu} \Leftrightarrow$$
$$\left(1 - \binom{\mu}{2}8 + \binom{\mu}{4}8^2 - \binom{\mu}{6}8^3 + \cdots + (-1)^{\kappa}\binom{\mu}{2\kappa}8^{\kappa}\right) = \pm\left(1 + \binom{\mu}{1}2 + \binom{\mu}{2}2^2 + \binom{\mu}{3}2^3 + \cdots + \binom{\mu}{\mu}2^{\mu}\right) \quad (*)$$

Αν ν άρτιος η παραπάνω ισότητα ισχύει με το θετικό πρόσημο και προκύπτει ότι 8/$\binom{\mu}{1}2 + \binom{\mu}{2}4 \Leftrightarrow 8/\ 2\mu + 4\frac{\mu(\mu-1)}{2} = 2\mu + 2\mu^2 - 2\mu = 2\mu^2$. Άρα $2\mu^2 = 8\lambda \Leftrightarrow \mu^2 = 4\lambda \Rightarrow 2/\ \mu$ άτοπο αφού (ν,μ)=1.

Αν ο ν είναι περιττός η ισότητα (*) ισχύει με το αρνητικό πρόσημο κι έτσι προκύπτει ότι: 8/$\binom{\mu}{1}2 + \binom{\mu}{2}4 + 2 \Rightarrow 4/\mu^2 + 1$. Αν μ=2κ τότε $\mu^2 = 4\kappa^2 \Rightarrow 4/1$ άτοπο. Αν μ=2κ+1 τότε $\mu^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1$ άρα 4/2 άτοπο.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και όταν z=$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3}$.