ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $[(2+\sqrt{3})^n]$ είναι περιττός για κάθε τιμή του θετικού ακεραίου n.

Απόδειξη

Αναπτύσσοντας την διωνυμική ταυτότητα προκύπτει ότι $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ (1), όπου οι αριθμοί α_n και b_n είναι θετικοί ακέραιοι. Παίρνοντας το συζυγή αριθμό λαμβάνουμε $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ (2).
Έτσι για το άθροισμά τους θα έχουμε ότι $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n$ (3).
Συνεπώς το ακέραιο μέρος του πρώτου μέλους θα ισούται με το ακέραιο μέρος του δεύτερου μέλους.
Δηλαδή θα έχουμε $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] = [2a_n] = 2a_n$. (4)
Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς χ,ψ ισχύει [χ+ψ]=[χ]+[ψ]+δ όπου δ=0 ή 1. Έτσι η (4) δίνει $[(2+\sqrt{3})^n] + [(2-\sqrt{3})^n] + \delta = 2a_n$ (5). Παρατηρούμε τώρα ότι ο αριθμός $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$. Αυτό μας δίνει $[(2-\sqrt{3})^n] = 0$ και $a_n > b_n\sqrt{3}$ οπότε από την (5) έχουμε $[(2+\sqrt{3})^n] + \delta = 2a_n$ (6).
Αν ήταν δ=0 τότε $[a_n + b_n\sqrt{3}] = 2a_n \Leftrightarrow a_n + [b_n\sqrt{3}] = 2a_n \Leftrightarrow [b_n\sqrt{3}] = a_n > b_n\sqrt{3}$ και αυτή η τελευταία σχέση είναι αδύνατη αφού το ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού δεν μπορεί να ξεπερνάει τον αριθμό αυτόν.
Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι δ=1 και $[(2+\sqrt{3})^n] = 2a_n - 1$ = περιττός.