Γυμνάσματα αριθμοθεωρίας
Γεώργιος Κασαπίδης

Αν υποθέσουμε οτι η πράξη του πολλαπλασιασμού δεν είναι προσεταιριστική, πόσα διαφορετικά γινόμενα θα ορίζονται απο ένα γινόμενο ν παραγόντων με μια συγκεκριμένη διάταξη;

[Για παράδειγμα αν είχαμε τρείς παράγοντες α,β,γ,τότε θα ορίζονταν 2 διαφορετικά γινόμενα τα (αβ)γ και α(βγ). Αν είχαμε 4 διαφορετικούς παράγοντες α,β,γ,δ τότε θα ορίζονταν τα εξής 5 διαφορετικά γινόμενα: (αβ)(γδ), ((αβ)γ)δ, (α((βγ))δ, (α((βγ)δ)),(α((β(γδ))).]

Οι ζητούμενοι αριθμοί (αριθμοί Catalan) c_n δίνονται απο την σχέση

$$c_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)\binom{2\text{n}}{n} \text{ για κάθε } n\geq 0 \text{ . (*)}$$

<u>απόδειξη</u>

Πρώτα θα λύσουμε το ελαφρώς δυσκολότερο πρόβλημα της καταμέτρησης του πλήθους d_n των ζευγών παρενθέσεων που μπορούμε να βάλουμε σε ένα γινόμενο n παραγόντων έστω $\chi_1,\chi_2,...,\chi_n$ με οποιαδήποτε διάταξη των παραγόντων. Θα δείξουμε ότι

$$d_1=1,\ \ d_{n+1}=(4n-2)d_n\ ,\ n\geq 1$$

Η πρώτη εξίσωση είναι προφανής και μας παρέχει την βάση για την επαγωγή πάνω στα $n\geq 1$. Προφανής είναι επίσης και η περίπτωση $d_2=2$. Ένας νέος όρος χ_3 μπορεί να εισαχθεί στο γινόμενο $\chi_1\chi_2$ με τους εξής τέσσερις τρόπους: $(\chi_3\chi_1)\chi_2$, $(\chi_1\chi_3)\chi_2$, $\chi_1(\chi_2\chi_3)$, $\chi_1(\chi_3\chi_2)$. Επίσης υπάρχουν και δυο τρόποι ο παράγοντας χ_3 να μπεί στά δυο άκρα του γινομένου $\chi_3(\chi_1\chi_2)$, $(\chi_1\chi_2)\chi_3$. Έτσι αφού τα αντίστοιχα ισχύουν και στην περίπτωση του γινομένου $\chi_2\chi_1$ θα έχουμε $d_3=12=(4\ 2-2)d_2$

Στην γενική περίπτωση τώρα σκεφτόμαστε παρόμοια. Αν έχουμε ένα γινόμενο n παραγόντων με κάποια συγκεκριμένη διάταξη έστω $\chi_1\chi_2...\chi_n$ υπάρχουν n-1 γινόμενα ανάμεσά τους και όπως στα παραπάνω ένας νέος παράγοντας χ_{n+1} μπορεί να εισαχθεί σε καθένα απο αυτά με 4(n-1) τρόπους και λαμβάνοντας υπόψιν και τους δυο τρόπους της τοποθέτησής του στα άκρα έχουμε 4n-2 δυνατότητες. Έτσι απο κάθε ένα απο τα d_n γινόμενα n παραγόντων, αποκτούμε 4n-2 γινόμενα με n+1 παράγοντες.

Έτσι θα έχουμε $d_{n+1}=(4n-2)d_n$.

Τώρα είναι $d_n=n!c_n$.

$$c_{n+1}=\frac{d_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(4\text{n}-2)d_n}{(n+1)!}=\frac{(4\text{n}-2)n!c_n}{(n+1)!}=\frac{(4\text{n}-2)}{n+1}c_n$$

Η παραπάνω σχέση θα μας επιτρέψει να ολοκληρώσουμε το επαγωγικό βήμα για την απόδειξη της αρχικής πρότασης.

Η (*) ισχύει προφανώς για n=0 αφού κάθε μέλος της είναι ίσο με 1. Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$c_{n+2}=\frac{4\text{n}+2}{n+2}c_{n+1}=\frac{4\text{n}+2}{n+2}\,\frac{1}{n+1}\binom{2\text{n}}{n}=\frac{1}{n+2}\binom{2\text{n}+2}{n+1} \text{ ο.ε.δ.}$$

Δείτε ακόμη και κάποιες άλλες λύσεις του παραπάνω προβλήματος καθώς και μια πληθώρα εφαρμογών των αριθμών Catalan στους παρακάτω συνδέσμους:

1. Catalan number Wikipedia
2. http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html
3. http://search.conduit.com/Results.aspx?q=catalan%20numbers&ctid=CT2790392&SearchSource=15