ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Έστω η αριθμητική πρόοδος a_n=7n-3 , $n \in \mathbb{N}, n>0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει φυσικός n>0 ώστε a_n=999...9 (m σε πλήθος εννιάρια) για κατάλληλο (οσοδήποτε μεγάλο) φυσικό αριθμό m.

Απόδειξη

$999...9=9\cdot 111...1=9(1+10+10^2+...+10^{m-1}=9\dfrac{10^m-1}{9}=10^m-1.$

Η ισότητα a_n=999 . . . 9 είναι ισοδύναμη με την 7n-3 = 10^m-1 δηλαδή 7n=10^m+2.
Θα έχουμε λοιπόν $10^m \equiv -2 \bmod 7$ ή $10^m \equiv 5 \bmod 7$. Αρκεί λοιπόν η τελευταία ισοτιμία να έχει λύση.
Αφού $10 \equiv 3 \bmod 7$ θα είναι $10^m \equiv 3^m \bmod 7$, οπότε αρκεί η ισοδυναμία $3^m \equiv 5 \bmod 7$ να έχει λύση.
Παρατηρούμε ότι
$3^1 \equiv 3 \bmod 7$
$3^2 \equiv 2 \bmod 7$
$3^3 \equiv 6 \bmod 7$
$3^4 \equiv 4 \bmod 7$
$3^5 \equiv 5 \bmod 7$
$3^6 \equiv 1 \bmod 7$
Οι αριθμοί m=6k+5 ικανοποιούν την $3^m \equiv 5 \bmod 7$ αφού $3^m=(3^6)^k 3^5 \equiv 1\cdot 5 \equiv 5 \bmod 7$.

Γενίκευση

Αν p πρώτος με (p,10)=1 και $1 \le \alpha \le p-2$, Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο a_n με πρώτο όρο α και διαφορά τον πρώτο p. Τότε a_n = pn+a-p και η συνθήκη a_n=999 . . . 9 είναι ισοδύναμη με την pn=10^m +p-1-a άρα $10^m \equiv (1+\alpha) \bmod p$. Από το θεώρημα Euler – Fermat θα έχουμε $10^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Αν υπάρχει κ ώστε $10^\kappa \equiv (1+\alpha) \bmod p$ τότε η γενίκευση της πρότασης θα ισχύει για m=(p-1)t+κ. (Ειδικότερα η πρόταση θα ισχύει αν το 10 είναι αρχική ρίζα modp).