Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων χΟψ και συμβολίζουμε με S(n), (n φυσικός), το πλήθος των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες που απέχουν απο το Ο απόσταση όχι μεγαλύτερη του n. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n->+\infty} \frac{S(n)}{n^2}$

ΛΥΣΗ

Τα σημεία που απέχουν από το Ο απόσταση όχι μεγαλύτερη του n, ανήκουν στον κυκλικό δίσκο D με εξίσωση $x^2+y^2=n$. Για τα σημεία (x,y) με y>0, θα είναι $y=\sqrt{n-x^2}$. Για τον αριθμό S_n θα έχουμε:

$$S_n=(4n+1)+4\sum_{k=1}^{n-1}[\sqrt{n^2-k^2}]$$ (1) όπου [α] παριστάνει το ακέραιο μέρος του αριθμού α. (Ο όρος 4n+1 μετράει τα σημεία που είναι πάνω στους άξονες συντεταγμένων, και το άθροισμα μας δίνει το πλήθος των σημείων που είναι εσωτερικά του κυκλικού δίσκου D). Έτσι

$$\frac{S_n}{n^2}=\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}[\sqrt{n^2-k^2}]$$ (2). Είναι όμως γνωστό ότι

$x-1<[x]\leq x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Συνεπώς

$$\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{n^2-k^2}-1)<\frac{S_n}{n^2}\leq\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2} .$$

Άρα

$$\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4}{n}(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}})-\frac{4(n-1)}{n^2}<\frac{S_n}{n^2}\leq\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2} \quad (3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$

Θεωρώντας μια διαμέριση του διαστήματος [0,1] σε n ισομήκη υποδιαστήματα και θεωρώντας τα δεξιά άκρα αυτών των υποδιαστημάτων, το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί από το άθροισμα $\Sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - (\frac{k}{n})^2}$.

Επομένως θα είναι

$\lim_{n \to \infty} \Sigma_n = \frac{\pi}{4}$ κι έτσι από τη σχέση (3) δεδομένου ότι οι ακραίες παραστάσεις τείνουν και οι δυο στο $\frac{\pi}{4}$ θα έχουμε τελικά

$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^2} = \pi.$