11. Αν d(n) συμβολίζει το πλήθος των (θετικών) διαιρετών του φυσικού αριθμού n, να αποδειχτεί ότι $\sum_{t/n} d(t)^3 = (\sum_{t/n} d(t))^2$

<u>απόδειξη</u>

Η συνάρτηση d(n) είναι πολλαπλασιαστική. Δηλαδή d(mn)=d(m)d(n) όταν (m,n)=1. Άρα το ίδιο θα συμβαίνει και για τις συναρτήσεις f(n)= $\sum_{t/n} d(t)$ και h(n)=f(n)f(n)=$(f(n))^2$.

Για να δείξουμε ότι g(n)=h(n) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκεί να δείξουμε ότι $g(p^m)=h(p^m)$, όπου p πρώτος και m φυσικός.

Πράγματι είναι: $f(p^m)=\sum_{t/p^m} d(t)=1+2+3+...+(m+1)$ αφού ως γνωστόν $d(p^k)=k+1$.

Άρα $f(p^m)=\sum_{k=1}^{m+1} k$ κι έτσι $h(p^m)=(\sum_{k=1}^{m+1} k)^2 \Leftrightarrow h(p^m)=\sum_{k=1}^{m+1} k^3$ δηλαδή $h(p^m)=\sum_{t/p^m} d(t)^3=g(p^m)$

(αφού είναι γνωστό ότι $(1+2+3+...+n)^2=1^3+2^3+...+n^3$).

Αν τώρα $n=p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \cdot \cdot p_r^{m_r}$ τότε λόγω της πολλαπλασιαστικότητας των συναρτήσεων f, g θα έχουμε:

$g(n)=\prod_{i=1}^{r} g(p_i^{m_i})=\prod_{i=1}^{r} h(p_i^{m_i})=h(n)$ ο.ε.δ.