1. **Αν α ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας να αποδειχτεί ότι: $(\alpha^{\kappa}-1,\alpha^{\lambda}-1)=\alpha^{(\kappa,\lambda)}-1$ για όλους τους θετικούς ακέραιους κ,λ.**

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\delta=(\kappa,\lambda)$ και $\Delta=(\alpha^{\kappa}-1,\alpha^{\lambda}-1)$. Τότε $\kappa=\delta\kappa'$, $\lambda=\delta\lambda'$ κι έτσι
$\alpha^{\kappa}-1=\alpha^{\delta\kappa'}-1=(\alpha^{\delta}-1)K$, $\alpha^{\lambda}-1=(\alpha^{\delta}-1)\Lambda$ με K,Λ φυσικούς αριθμούς.
Θα έχουμε λοιπόν $\Delta=(\alpha^{\kappa}-1,\alpha^{\lambda}-1)=(\alpha^{\delta}-1)(K,\Lambda)$. Άρα $\alpha^{\delta}-1/\Delta$ (1)
Από την σχέση $\delta=(\kappa,\lambda)$ προκύπτει πως υπάρχουν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί μ,ν τέτοιοι ώστε $\delta=\mu\kappa-\nu\lambda$[1]. Θα είναι συνεπώς $\alpha^{\delta}-1=(\alpha^{\mu\kappa}-\alpha^{\nu\lambda})\alpha^{-\nu\lambda}$ κι επομένως $\alpha^{\nu\lambda}(\alpha^{\delta}-1)=\alpha^{\kappa\mu}-1-(\alpha^{\lambda\nu}-1)=(\alpha^{\kappa}-1)K'-(\alpha^{\lambda}-1)\Lambda'$.
Όμως $\Delta/(\alpha^{\kappa}-1)$ και $\Delta/(\alpha^{\lambda}-1)$ άρα $\Delta/\ \alpha^{\nu\lambda}(\alpha^{\delta}-1)$ (2).
Είναι $(\Delta,\alpha)=1$ γιατί διαφορετικά οι Δ και α θα είχαν κάποιον πρώτο διαιρέτη ρ για τον οποίο απο τη σχέση $\Delta/(\alpha^{\kappa}-1)$ θα ήταν ρ/1 άτοπο. Φυσικά θα είναι και $(\Delta,\alpha^{\nu\lambda})=1$ οπότε η σχέση (2) μας δίνει ότι $\Delta/(\alpha^{\delta}-1)$ (3).
Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $\Delta=\alpha^{\delta}-1$.

Κασαπίδης Γεώργιος

1 Είναι γνωστό πως αν $(\kappa,\lambda)=\delta$ τότε υπάρχουν ακέραιοι μ,ν ώστε $\mu\kappa+\nu\lambda=\delta$. Εδώ είνια $\kappa,\lambda,\delta>0$ άρα δεν μπορεί να είναι οι μ,ν αρνητικοί και οι δυο. Αν $\mu>0$ και $\nu<0$ τότε γράφουμε $\delta=\mu\kappa-\lambda(-\nu)$. Αν $\mu<0$ και $\nu>0$ τότε $\delta=\mu\kappa+\nu\lambda=\kappa(\mu+\mu'\lambda)-\lambda(\kappa\mu'-\nu)$ όπου ο κ' επιλέγεται έτσι ώστε $\mu+\mu'\lambda>0$ και $\kappa\mu'-\nu>0$. Αν $\kappa>0$ και $\lambda>0$ τότε $\delta=\mu\kappa+\nu\lambda=\kappa(\mu+\lambda\mu')-\lambda(\kappa\mu'-\nu)$ όπου το μ' επιλέγεται έτσι ώστε $\kappa\mu'-\nu>0$. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχουν μ,ν μη μηδενικοί φυσικοί ώστε $\delta=\kappa\mu-\lambda\nu$.