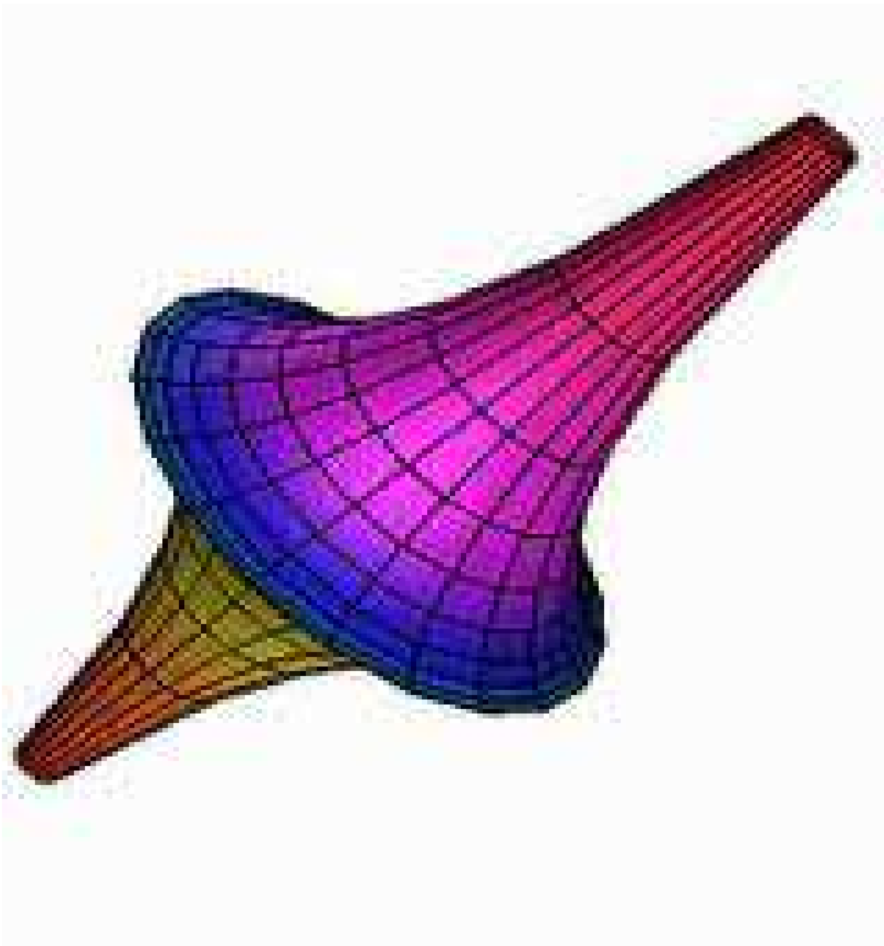
A.S. SMOGORZHEVSKY

LOBACHEVSKIAN GEOMETRY

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ : ΚΑΣΑΠΙΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

<u>A.S. Smogorzhevsky</u>

LOBACHEVSKIAN
GEOMETRY
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

πρώτη δημοσίευση «НАУКА» МОСКВА 1976

Μεταφορά από τα Ρωσικά στα Αγγλικά Mir Publishers, 1982

V Kisin

Μεταφορά από τα Αγγλικά στα Ελληνικά

Κασαπίδης Γεώργιος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σημείωμα του συγγραφέα

Ο σκοπός αυτού του βιβλίου είναι να εξοικειώσει τον αναγνώστη στα βασικά της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι.

Ο περίφημος Ρώσος μαθηματικός N. I. Lobachevsky ήταν εξαίρετος στοχαστής, στον οποίο χρεώνεται μια από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ανακαλύψεις, η κατασκευή ενός γνήσιου γεωμετρικού συστήματος διαφορετικού από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Ο αναγνώστης θα βρει μια σύντομη βιογραφία του N. I. Lobachevsky στην παράγραφο 1.

Η Ευκλείδεια και η Λομπατσέφσκια γεωμετρία έχουν πολλά κοινά διαφέρουν όμως στους ορισμούς τα θεωρήματα και τους τύπους που έχουν σχέση με το αίτημα των παραλλήλων. Για να διευκρινίσουμε τους λόγους για τους οποίους διαφέρουν πρέπει να δούμε πως γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν οι βασικές γεωμετρικές έννοιες, κι αυτό γίνεται στην παράγραφο 2.

Εκτός από τις γνώσεις της σχολικής επίπεδης γεωμετρίας και τριγωνομετρίας η ανάγνωση αυτού του φυλλαδίου απαιτεί την γνώση ενός μετασχηματισμού γνωστού ως αντιστροφή, τα βασικότερα χαρακτηριστικά του οποίου παρουσιάζονται στην παράγραφο 3. Ελπίζουμε πως ο αναγνώστης θα είναι σε θέση να κατανοήσει τις αρχές της με κέρδος για τον εαυτό του και χωρίς μεγάλη δυσκολία αφού αυτή ,και η παράγραφος 10, παίζουν πολύ σημαντικό, αν και δευτερεύοντα ρόλο στην έκθεσή μας.

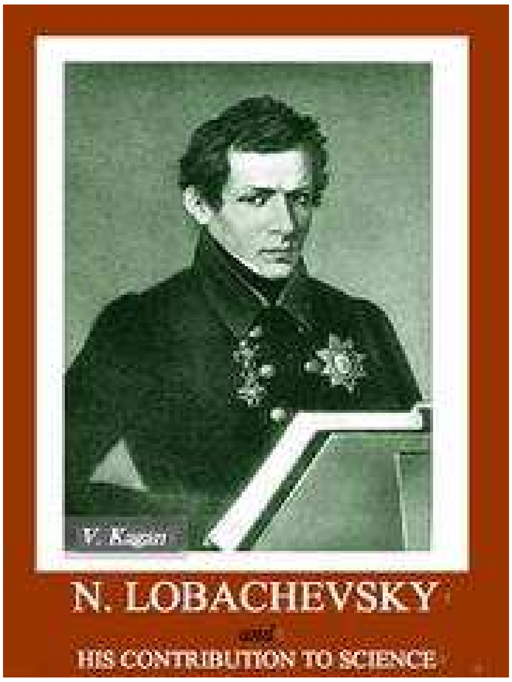
Μέρος 1.
Ένα σύντομο δοκίμιο της ζωής και του έργου του N.I. Lobachevsky

Ο Νικόλαος Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι γεννήθηκε την $1^η$ Δεκεμβρίου του 1792 (20 Νοεμβρίου με το παλιό ημερολόγιο) , και ήταν ο γιος ενός κακοπληρωμένου δημοσίου υπαλλήλου. Νωρίς στη ζωή του ο Νικόλαος και τα δυο του αδέρφια αφέθηκαν μόνο στη φροντίδα της μητέρας τους ,μιας δραστήριας και έξυπνης γυναίκας η οποία παρά τα υπερβολικά πενιχρά μέσα της, τους έστειλε όλους στην σχολή γραμμάτων του Καζάν.

Ο Λομπατσέφσκι σπούδασε εκεί από το 1802 μέχρι το 1807 και στο πανεπιστήμιο του Καζάν από το 1807 μέχρι το 1811. Έχοντας εξαιρετικά μαθηματικά ταλέντα ολοκλήρωσε επιτυχώς τις σπουδές του και αφού αποφοίτησε παρέμεινε για να δουλέψει στο Πανεπιστήμιο ως καθηγητής, αξίωμα που του παραχωρήθηκε το 1816.

Η διδασκαλία του Λομπατσέφσκι άφησε βαθιά εντύπωση στις μνήμες των μαθητών του. Οι διαλέξεις του ξεχώριζαν για την διαύγεια της σκέψης τους και την πληρότητα της παρουσίασης. Οι γνώσεις του σε διάφορους κλάδους της επιστήμης ήταν πλατιές και πολύπλευρες, δίνοντάς του την δυνατότητα να διδάσκει όχι μόνα μαθηματικά θέματα, αλλά επίσης και μηχανική, φυσική, αστρονομία, γεωδαισία και τοπογραφία.

Ο Λομπατσέφσκι εκλέχθηκε πρύτανης στο Πανεπιστήμιο του Καζάν το 1827, και κατείχε την θέση αυτή για σχεδόν είκοσι χρόνια. Υπήρξε ένας ταλαντούχος και ενεργητικός διαχειριστής, που με τους διορατικούς στόχους του για υψηλότερη εκπαίδευση, πέτυχε να κάνει το πανεπιστήμιο του Καζάν ένα μοντέλο υψηλότατου εκπαιδευτικού ινστιτούτου της εποχής του. Με πρωτοβουλία του το πανεπιστήμιο άρχισε την δημοσίευση



επιστημονικών πρακτικών. Ανάμεσα στις κατασκευές που έγιναν υπό την εποπτεία του ήταν και το αστρονομικό αστεροσκοπείο.

Αλλά είναι το επιστημονικό του έργο που έκανε τον Λομπατσέφσκι διάσημο. Το όνομά του αποθανατίστηκε για την δημιουργία της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως την ονομάζουμε μετά απ' αυτόν[1].

Στις 23 (11) Φεβρουαρίου 1826 ανέγνωσε μια διατριβή σε μια συνάντηση του τμήματος των Φυσικομαθηματικών επιστημών του πανεπιστημίου του Καζάν, στην οποία για πρώτη φορά κοινοποίησε την μη Ευκλείδεια γεωμετρία που ανακαλύφθηκε απ' αυτόν. Η πρώτη δημοσιευμένη παρουσίαση των αρχών αυτής της γεωμετρίας έγινε στα απομνημονεύματά του On the Fundamentals of Geometry που δημοσιεύτηκαν το 1829 και το 1830 στην εφημερίδα Kazan Herald.

Πολλοί σύγχρονοι του Λομπατσέφσκι δεν κατανόησαν τις ανακαλύψεις του, και το έργο του στην γεωμετρία ,είχε εχθρική υποδοχή τόσο στην Ρωσία όσο και στο εξωτερικό.

[1] Το άλλο όνομα-υπερβολική γεωμετρία- είναι δοσμένο από το γεγονός ότι σ' αυτήν μια ευθεία γραμμή όπως η υπερβολή στην Ευκλείδεια γεωμετρία έχει δυο απείρως απομακρυσμένα σημεία (βλ. παρ.4)

Οι ιδέες του ήταν πολύ τολμηρές και πολύ μακριά από τις κρατούσες επιστημονικές αντιλήψεις της εποχής του, έτσι ώστε χρειάστηκε να περάσει πολύς καιρός για να βρούνε την γενική αποδοχή η οποία ήρθε μόνο μετά τον θάνατό του.

Ο Λομπατσέφσκι δεν μεταπείστηκε για την ορθότητα των συμπερασμάτων του, παρά τις αντίθετες κριτικές, και συνέχισε με όλη την εσωτερική του ενέργεια και αποφασιστικότητα, να εργάζεται πάνω στην ανάπτυξη του γεωμετρικού του συστήματος, δημοσιεύοντας έναν αριθμό από έργα πάνω σε προβλήματα της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Το τελευταίο απ' αυτά, ολοκληρώθηκε από τον Λομπατσέφσκι όχι πολύ πριν από το θάνατό του, καθ' υπαγόρευση, μιας κι ο ίδιος δεν ήταν σε θέση να γράψει πια λόγω της τύφλωσης που τον επηρέασε στα τελευταία χρόνια της ζωής του.

Η επιστημονική δραστηριότητα του Λομπατσέφσκι δεν περιορίζεται μόνο στην γεωμετρία. Αυτός έχει επίσης διάφορες θεμελιώδεις συνεισφορές στην άλγεβρα και στο λογισμό. Η μέθοδος προσέγγισης της λύσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης που επεξεργάστηκε είναι πολύ κομψή και αποτελεσματική.

Οι φιλοσοφικές απόψεις του Λομπατσέφσκι έχουν μια φανερά εκφρασμένη υλιστική κλίση. Αυτός θεωρούσε ότι το πείραμα και η πράξη είναι τα ποιο αξιόπιστα μέσα για τον έλεγχο των θεωρητικών συμπερασμάτων. Αξίωνε η μαθηματική διδασκαλία να αναδεικνύει τα πραγματικά φαινόμενα πίσω από τις μαθηματικές δράσεις.

Το 1846 ο Λομπατσέφσκι απαλλάχθηκε από τα καθήκοντά του στο πανεπιστήμιο και διορίστηκε βοηθός επιμελητής της εκπαιδευτικής περιοχής του Καζάν.

Πέθανε στις 24 (12) Φεβρουαρίου 1856. Το 1896 στο Καζάν υψώθηκε μνημείο για να τιμήσει την μνήμη του.[1]

[1] Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες για την ζωή του Λομπατσέφσκι στο V.F.Kagan, N. Lobachevsky and His Contribution to the World Science by Foreign Languages Publishing House Moscow, 1957.

Παράγραφος 2. Η προέλευση των Αξιωμάτων και ο ρόλος τους στην Γεωμετρία

Για να αποσαφηνίσουμε το ρόλο των αξιωμάτων θα δώσουμε μια σκιαγράφηση των βασικών βημάτων στην ανάπτυξη της γεωμετρίας από τα αρχαία χρόνια.

Το λίκνο της γεωμετρίας ήταν οι χώρες της Αρχαίας Ανατολής όπου σημαντικοί πρακτικοί κανόνες για την μέτρηση γωνιών, εμβαδών κάποιων σχημάτων, και του όγκου απλών στερεών χρησιμοποιούνταν για χιλιάδες χρόνια ανταποκρινόμενοι στην ανάγκη καταμέτρησης της γης, στην αρχιτεκτονική και την αστρονομία. Αυτοί οι κανόνες αναπτύχθηκαν εμπειρικά (από το πείραμα) και πέρασαν από στόμα σε στόμα. Στα παλαιότερα κείμενα που φτάσανε σε μας συναντάμε συχνά εφαρμογές γεωμετρικών κανόνων, αλλά δεν βρίσκουμε προσπάθειες για την τυποποίησή τους.

Με το πέρασμα του χρόνου ο κύκλος των αντικειμένων στα οποία οι αποκτημένες γεωμετρικές γνώσεις εφαρμόζονταν, διευρύνθηκε και προέκυψε η ανάγκη να τυποποιηθούν οι κανόνες σε όσο το δυνατόν ποιο γενική μορφή, το οποίο έφερε μια κίνηση στη γεωμετρία από την χειροπιαστή αντίληψη προς τις αφηρημένες έννοιες. Για παράδειγμα, ο κανόνας που αναπτύχθηκε για την μέτρηση του εμβαδού ενός ορθογωνίου σχεδίου της γης αποδείχτηκε εφαρμόσιμο για την μέτρηση ενός χαλιού, την επιφάνεια ενός τοίχου κλπ, με αποτέλεσμα εξ’ αυτών να αναδυθεί η αφηρημένη έννοια του ορθογωνίου.

Έτσι σχηματίστηκε ένα σύστημα γνώσεων που ονομάστηκε γεωμετρία. Στα πρώιμά της στάδια αυτή ήταν μια εμπειρική επιστήμη, δηλαδή όλα της τα αποτελέσματα παράγονταν κατευθείαν από το πείραμα.

Η ανάπτυξη της γεωμετρίας πήρε μια νέα κατεύθυνση όταν έγινε γνωστό ότι κάποιες από τις προτάσεις της δεν χρειάζονταν εμπειρική τεκμηρίωση, αφού αυτές μπορούσαν να παραχθούν από άλλες προτάσεις, ως συμπεράσματα, ακολουθώντας κάποιους λογικούς κανόνες. Οι προτάσεις της γεωμετρίας τώρα διαιρέθηκαν σε δυο κατηγορίες: αυτές που εγκαθιδρύονταν εμπειρικά (που αργότερα ονομάστηκαν αξιώματα) και αυτές που μπορούσαν να αποδειχτούν λογικά με βάση τα αξιώματα (θεωρήματα).

Επειδή η λογική τεκμηρίωση δεν απαιτεί ούτε ειδικά μέσα ούτε διάφορες κουραστικές μετρήσεις, τεχνικά είναι πολύ απλούστερη από την εμπειρική προσέγγιση, οι επιστήμονες από την αρχαιότητα φυσιολογικά ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα της αναγωγής του πρώτου είδους προτάσεων (αξιώματα) σε έναν ελάχιστο αριθμό προτάσεων έτσι ώστε να ελαφρυνθεί το έργο των γεωμετρών μετακινώντας το κύριο φορτίο της δουλειάς τους, στη σφαίρα της λογικής επιχειρηματολογίας. Αυτός ο στόχος αποδείχτηκε εφικτός αφού η γεωμετρία απομακρύνθηκε από όλες τις ιδιότητες των σωμάτων εκτός της έκτασης, και διαπιστώθηκε ότι όλες οι δυνατές γεωμετρικές σχέσεις μπορούν να παραχθούν από έναν περιορισμένο αριθμό υποθέσεων ή αξιωμάτων.

Έτσι η γεωμετρία μετατράπηκε από εμπειρική σε παραγωγική επιστήμη[1] η οποία στις μέρες μας είναι η αξιωματική παρουσίαση.

Το ποιο πρώιμο βιβλίο το οποίο έφτασε σε μας, με μια συστηματική παρουσίαση των βασικών προτάσεων της γεωμετρίας είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη το οποίο γράφτηκε γύρω στο 300 πΧ.

Αυτό το έργο έχει την ακόλουθη δομή: Μετά τους ορισμούς και τα αξιώματα έρχεται στις αποδείξεις των θεωρημάτων και στις λύσεις προβλημάτων. Κάθε νέο θεώρημα αποδεικνύεται με βάση τα αξιώματα και τα θεωρήματα που έχουν αποδειχθεί πιο πριν. Τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται αλλά απλώς δηλώνονται.

Για δυο χιλιάδες χρόνια τα Στοιχεία του Ευκλείδη απολάμβαναν την αδιαμφισβήτητη αυθεντία ανάμεσα στους διανοούμενους. Ένα

[1] Μια παραγωγή είναι η εξαγωγή ενός συμπεράσματος. Μια επιστήμη καλείται παραγωγική όταν οι νέες δηλώσεις της παράγονται από προηγούμενες με λογικό τρόπο.

σημείο όμως μέσα σ’ αυτά δεν ήταν τελείως νομιμοποιημένο. Αυτό ήταν το (πέμπτο) αίτημα των παραλλήλων διατυπωμένο ως εξής:

Αν μια ευθεία τέμνει δυο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος ‘εντός και επί τα αυτά γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές, τότε οι ευθείες, προεκτεινόμενες κατάλληλα, τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.[1]

Δεν δημιουργήθηκαν αμφιβολίες για την εγκυρότητα του Ευκλείδειου αξιώματος. Η αβεβαιότητα σχετικά μ’ αυτό βρισκόταν κάπου αλλού. Ήταν δικαιολογημένη η θέση του ανάμεσα στα αξιώματα; Μήπως μπορούσε να αποδειχθεί από τα αξιώματα των Στοιχείων κι έτσι να μεταφερθεί στην κατηγορία των θεωρημάτων;

Αρχικά οι προσπάθειες για την απόδειξη του αιτήματος των παραλλήλων αντικατοπτρίζουν την τάση που αναφέραμε παραπάνω για τον περιορισμό των γεωμετρικών προτάσεων που απαιτούσαν εμπειρική τεκμηρίωση. Με την πάροδο του χρόνου η κατάσταση άλλαξε. Η εμπειρική αρχή των αξιωμάτων λησμονήθηκε και άρχισαν να τα μεταχειρίζονται σαν αυταπόδεικτες αλήθειες, ανεξάρτητες από την εμπειρία ή οποιοδήποτε πείραμα.[2] Αυτή η οπτική οδήγησε στην πεποίθηση ότι το αίτημα των παραλλήλων, το οποίο είναι δύσκολο να αναγνωριστεί ως αυταπόδεικτο λόγω της περίπλοκης διατύπωσής του, δεν είναι στην πραγματικότητα αξίωμα αλλά μια δήλωση που πρέπει να αποδειχθεί. Όμως πολλές προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση δεν είχαν θετικά αποτελέσματα. Σαν τον μαγεμένο θησαυρό, το αίτημα των

[1] Στα σχολικά εγχειρίδια το αίτημα παραλλήλων του Ευκλείδη, έχει αντικατασταθεί με την ισοδύναμη πρόταση: *Μόνο μια παράλληλη ευθεία μπορούμε να φέρουμε προς δοθείσα ευθεία από ένα σημείο που δεν ανήκει πάνω σ’ αυτήν.*

Δυο αξιώματα της Ευκλείδειας, ή άλλης γεωμετρίας , θεωρούνται ισοδύναμα, αν από αυτά παράγονται οι ίδιες προτάσεις με την προϋπόθεση ότι όλα τα άλλα αξιώματα παραμένουν ίδια.

[2] Είναι γνωστό ότι άνθρωποι που γεννήθηκαν τυφλοί αλλά ανάκτησαν την όρασή τους χειρουργικώς, δεν μπορούν να ξεχωρίσουν έναν κύβο από μια σφαίρα για κάποιον χρόνο μετά την επέμβαση δίχως πρώτα να τα αγγίξουν. Αυτό δείχνει πως υπάρχει ανάγκη της εμπειρίας για την ορθή αντίληψη των γεωμετρικών εικόνων, δίχως την οποία οι γεωμετρικές έννοιες δεν μπορούν να σχηματιστούν.

παραλλήλων δεν αποκάλυπτε τα μυστικά του στους ερευνητές. Οι απόπειρες για την απόδειξή του, που κατανάλωσαν ένα τρομερό ποσό διανοητικών προσπαθειών γενεών στοχαστών, απέτυχαν ως το τίμημα της ιδεαλιστικής ερμηνείας της ουσίας των αξιωμάτων.

Ο ποιο κοινός τύπος εσφαλμένης απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος παραλλήλων ήταν η αντικατάστασή του με μια ισοδύναμη πρόταση, για παράδειγμα: *Μια κάθετη και μια πλάγια ευθεία πάνω στην ίδια ευθεία τέμνονται, ή δεν υπάρχει τρίγωνο όμοιο προς δοθέν τρίγωνο που να είναι ίσο με αυτό, ή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δοσμένη ευθεία και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της, είναι μια ευθεία γραμμή, ή τρία σημεία είναι είτε συνευθειακά είτε ομοκυκλικά.* Αργότερα διαπιστώθηκε ότι όλες αυτές οι προτάσεις είναι εσφαλμένες αν το Ευκλείδειο αίτημα δεν ισχύει. Συνεπώς λαμβάνοντας ως αξίωμα κάποια απ' αυτές είναι σαν να υποθέτουμε την εγκυρότητα του Ευκλείδειου αιτήματος, δηλαδή υποθέτουμε ότι είναι ορθό αυτό το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε.

Ο Λομπατσέφσκι πήρε διαφορετικό δρόμο στην έρευνά του πάνω στην θεωρία των παραλλήλων. Ξεκινώντας με την απόπειρα να αποδείξει το αξίωμα των παραλλήλων είδε ότι κάποιος οδηγείται σε τελείως αναπάντεχα αποτελέσματα. Αυτές οι απόπειρες συνίσταντο στην χρήση της απόδειξης με αντίφαση (απαγωγή σε άτοπο) και ήταν στηριγμένες στο ακόλουθο επιχείρημα: Αν το Ευκλείδειο αίτημα παραλλήλων είναι συνέπεια των υπόλοιπων αιτημάτων των Στοιχείων, και αν κάποιος υποθέσει κακόβουλα ότι *τουλάχιστον δυο ευθείες που δεν τέμνουν δοθείσα ευθεία και που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο μ' αυτήν μπορούν χαραχθούν από σημείο εκτός αυτής*, τότε αυτή η υπόθεση αργά ή γρήγορα, θα οδηγήσει μέσω των συνεπειών της σε κάποια αντίφαση. Βρίσκοντας όμως ολοένα κι άλλες νέες συνέπειες αυτής της υπόθεσης, ο Λομπατσέφσκι πείστηκε ότι δεν έχει σημασία πόσο παράδοξες φαίνονται αυτές οι συνέπειες από την σκοπιά της Ευκλείδειας γεωμετρίας, κι ότι αυτές μπορούν να σχηματίσουν την βάση μιας νέας επιστημονικής θεωρίας.

Έτσι στην θεμελίωση της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας[1] το αξίωμα των παραλλήλων διαφέρει από αυτό της Ευκλείδειας και συμπίπτει με την υπόθεση που δόθηκε παραπάνω η οποία από δω και πέρα θα αναφέρεται ως Λομπατσέφσκιο αίτημα παραλλήλων.

Βέβαια παραμένει ακόμα ασαφές το κατά πόσο κάποιος μπορεί με σιγουριά να πει ότι καμιά από τις άπειρες δυνατές συνέπειες του Λομπατσέφσκιου αξιώματος παραλληλίας δεν οδηγεί σε αντίφαση. Ο Λομπατσέφσκι σκιαγράφησε έναν τρόπο για την επίλυση αυτού του προβλήματος, επισημαίνοντας ότι η συνέπεια της γεωμετρίας που εξερευνούσε θα ήταν εξασφαλισμένη από την δυνατότητα αριθμοποίησής της, δηλαδή από την δυνατότητα αναγωγής της λύσης κάθε γεωμετρικού προβλήματος σε αριθμητικούς υπολογισμούς και αναλυτικούς μετασχηματισμούς χρησιμοποιώντας τους τύπους της υπερβολικής τριγωνομετρίας που παρήγαγε ο ίδιος. Άλλοι επιστήμονες βρήκαν αργότερα αυστηρές αποδείξεις της συνέπειας της γεωμετρίας του.

Οι έρευνες του Λομπατσέφσκι στο πεδίο της υπερβολικής γεωμετρίας ήταν πολύ μεγάλης έκτασης καλύπτοντας στοιχεία τριγωνομετρίας, αναλυτικής και διαφορικής γεωμετρίας. Χρησιμοποιώντας της μεθόδους της γεωμετρίας του παρήγαγε περισσότερους από 200 νέους τύπους για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Οι ανακαλύψεις του Λομπατσέφσκι θεωρήθηκαν από τους συγχρόνους του, ακόμη και από τους μαθητές του, ως τερατώδεις ανοησίες, θρασύτατη περιφρόνηση της λογικής και του κοινού νου[2].

---

[1] Έχει βρεθεί ότι εκτός από την γεωμετρία που ανακάλυψε ο Λομπατσέφσκι, πολλές άλλες ακόμα γεωμετρίες μπορούν να κατασκευαστούν.

[2] Βέβαια δεν μπορεί κανείς με αβάσιμες υποψίες να πει ότι οι σύγχρονοι του Λομπατσέφσκι ήταν ανίκανοι να καταλάβουν τις έρευνές του. Πολλοί δεν εξέφρασαν κάποια άποψη πιθανόν γιατί η περιοχή των επιστημονικών τους ενδιαφερόντων δεν περιλάμβανε την σφαίρα των ερευνών του Λομπατσέφσκι. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο περίφημος Γερμανός μαθηματικός Karl Gauss και ο εξαίρετος Ουγγαρέζος γεωμέτρης Janos Bolyai, ανεξάρτητα από τον Λομπατσέφσκι , έφτασαν στην ιδέα της δυνατότητας της κατασκευής μιας μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, συμμεριζόμενοι τις απόψεις του. Ο Gauss φοβούμενος μήπως δεν γίνει κατανοητός και γελοιοποιηθεί, δεν δημοσίευσε του

Μια τέτοια στάση απέναντι σε μια μεγάλη ιδέα που γκρεμίζει ιερές προκαταλήψεις δεν προκαλεί έκπληξη. Η Ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου, η οποία αρνήθηκε αυτό που φαινόταν προφανές και ισχυριζόταν αυτό που ήταν αδιανόητο να φανεί, είχε την ίδια εχθρική υποδοχή. Χρειάζεται πολύ βαθύτερη αντίληψη για την κατανόηση της αποδεκτικότητας των δυο γεωμετριών. Ας περάσουμε τώρα στην παρουσίαση κάποιων από τα ευκολότερα στην κατανόηση επιχειρημάτων.

Η παράγραφος πάνω στην επίπεδη γεωμετρία στα σχολικά βιβλία μελετά το επίπεδο ανεξάρτητα από τον περιβάλλοντα χώρο. Με άλλα λόγια επιπεδομετρία είναι η γεωμετρία του Ευκλείδειου επιπέδου. Γεωμετρίες κάποιων καμπύλων επιφανειών είναι επίσης πολύ γνωστές. Ένα παράδειγμα είναι η σφαιρική γεωμετρία, η οποία ευρέως χρησιμοποιείται στην αστρονομία και σε άλλους γνωστικούς κλάδους.

Σε κάθε επιστήμη οι απλούστερες έννοιες είναι οι ποιο θεμελιώδεις. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία αυτές είναι οι έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου. Αυτοί οι όροι διατηρούνται στην μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, έτσι ώστε ‘ευθεία γραμμή’ να σημαίνει μια γραμμή κατά μήκος της οποίας μετράμε την μικρότερη απόσταση μεταξύ δυο σημείων. Το ‘επίπεδο’ είναι η επιφάνεια που έχει την ιδιότητα αν δυο σημεία μιας ‘ευθείας’ ανήκουν στην επιφάνεια, τότε όλα τα σημεία της ‘ευθείας’ ανήκουν στην επιφάνεια. Στην σφαιρική γεωμετρία για παράδειγμα μια σφαίρα και οι μέγιστοι κύκλοι της αναφέρονται αντιστοίχως ως ‘επίπεδο’ και ‘ευθεία γραμμή’. Αυτή η ορολογία είναι τελείως επίκαιρη αφού σε κάθε γεωμετρία η ‘ευθεία’ είναι η απλούστερη απ’ όλες τις γραμμές και το ‘επίπεδο’ είναι το απλούστερο απ’ όλες τις

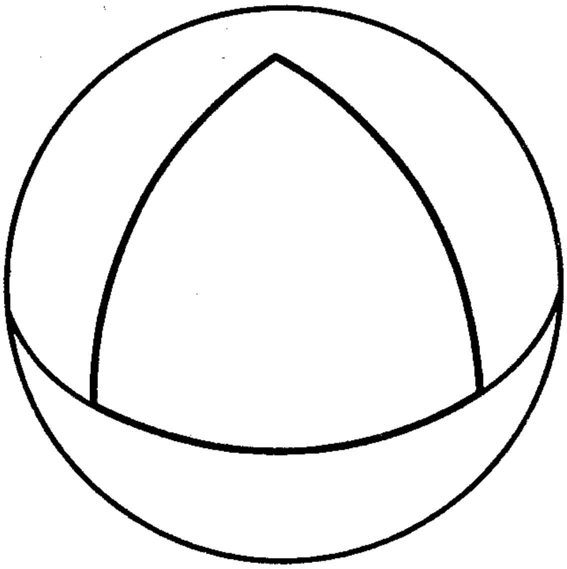
έρευνες στην μη-Ευκλείδεια γεωμετρία (δημοσιευμένες το 1832) δεν έτυχαν κάποια υποστήριξη στις ιδέες του Λομπατσέφσκι, και ο Bolyai βλέποντας πως οι δικές αναγνώρισης, εγκατέλειψε τις μαθηματικές του μελέτες. Έτσι ο Λομπατσέφσκι έμεινε μόνος να παλεύει για την ορθότητα των ιδεών του.

επιφάνειες, πολύ βασικές ιδιότητες που παλαιότερα κατείχαν η Ευκλείδεια ευθεία και το Ευκλείδειο επίπεδο.[1]

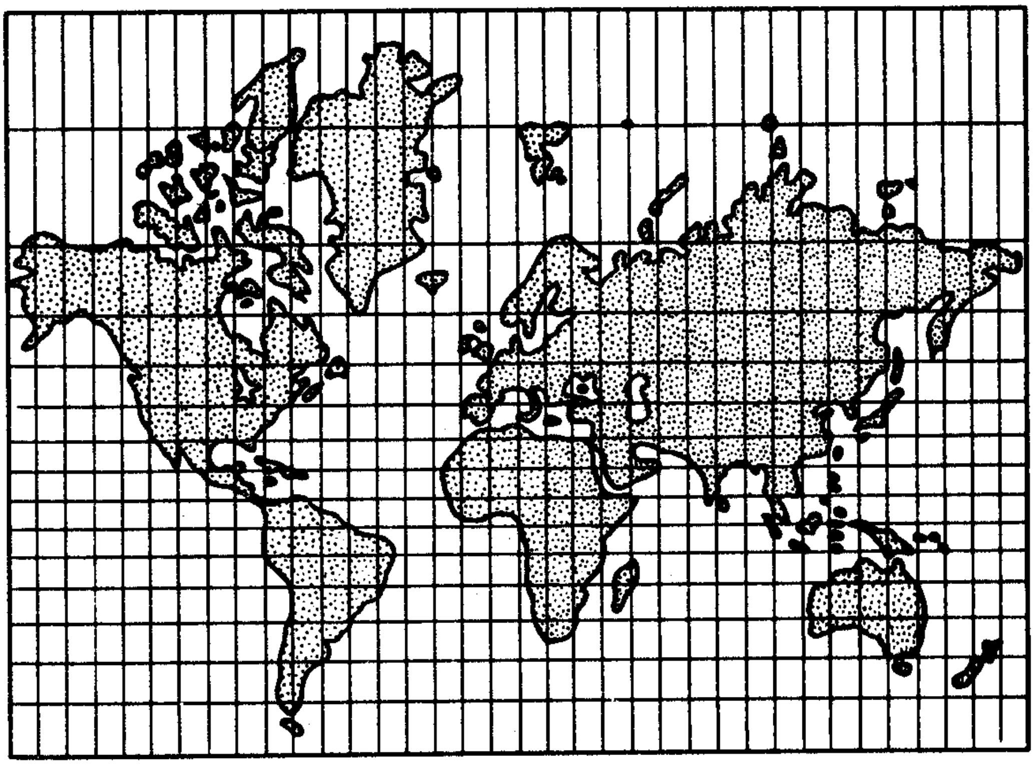
Θα δώσουμε κάποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της σφαιρικής γεωμετρίας. Για διαφωτιστικούς σκοπούς θα την θεωρήσουμε σαν την γεωμετρία της επιφάνειας μιας υδρόγειας σφαίρας. Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε ότι δυο ‘ευθείες γραμμές’ σ’ αυτήν την γεωμετρία (πχ δυο μεσημβρινοί) πάντοτε τέμνονται σε δυο αντιδιαμετρικά σημεία της υδρογείου. Επιπλέον το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο του π. Για παράδειγμα, στο τρίγωνο που φράσσεται από το ένα τέταρτο του ισημερινού και από τα τόξα των δυο μεσημβρινών (σχ.1) όλες οι γωνίες του είναι ορθές.[2]

[1] Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην προβολική γεωμετρία δεν υπάρχει η έννοια της απόστασης μεταξύ δυο σημείων. Η ερμηνεία των εννοιών ‘ευθεία γραμμή’ και ‘επίπεδο’ δεν εφαρμόζεται σε αυτήν την γεωμετρία.

[2] Η γωνία μεταξύ δυο ευθειών στο σημείο τομής τους ορίζεται ως η γωνία μεταξύ των εφαπτομένων τους στο σημείο αυτό.



σχήμα 1



σχήμα 2

Φυσικά εκτός από τις υδρόγειες σφαίρες στην γεωγραφία χρησιμοποιούνται και χάρτες της γήινης επιφάνειας. Αυτό είναι ισοδύναμο με την μελέτη της σφαιρικής γεωμετρίας θεωρώντας χάρτες της σφαίρας, το οποίο είναι τελείως δυνατό υπό τον όρο ότι έχουμε δείξει πώς θα μετρήσουμε τις πραγματικές γραμμές και τις πραγματικές γωνίες από τις αναπαραστάσεις τους πάνω στο χάρτη, δεδομένου ότι οι τελευταίες είναι παραμορφωμένες και ο χαρακτήρας της παραμόρφωσης δεν είναι ομοιόμορφος πάνω σε ολόκληρο το χάρτη. Ένα είδος χάρτη της γης χρησιμοποιεί την λεγόμενη Μερκατοριανή προβολή[1] (σχ.2). Σ' αυτήν οι μεσημβρινοί προβάλλονται σαν παράλληλες ευθείες και οι κάθετες που αντιστοιχούν στους γεωγραφικούς παράλληλους είναι τέτοιες ώστε το τμήμα που αναπαριστά 1^o ενός παραλλήλου έχει το ίδιο μήκος ανεξάρτητα του γεωγραφικού πλάτους. Στην πραγματικότητα όμως το μήκος ενός βαθμού ενός παραλλήλου μικραίνει καθώς αυξάνει το γεωγραφικό πλάτος.

Αφού μια επιφάνεια έχει δυο διαστάσεις, η γεωμετρία που μελετά σχήματα που ανήκουν πάνω σε κάποια επιφάνεια καλείται συνήθως διδιάστατη, και η επιφάνεια η ίδια καλείται διδιάστατος χώρος. Δυο τύποι διδιάστατης γεωμετρίας είναι γνωστά από την αρχαιότητα, η Ευκλείδεια (για το επίπεδο) και η σφαιρική. Οι μαθηματικοί δεν έδωσαν καμιά ιδιαίτερη σημασία στην ύπαρξη διδιάστατης μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή της σφαιρικής γεωμετρίας, για τον απλούστατο λόγο ότι αυτή μελετάται μέσα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, πράγμα που τους έκανε να μην αναγνωρίσουν τις μη-Ευκλείδειες ιδιότητες της σφαίρας ως τέτοιες.

Σαν αποτέλεσμα των ερευνών του Λομπατσέφσκι ήταν η συνειδητοποίηση ότι όχι μόνο μπορούμε να συλλάβουμε νοητικά την ύπαρξη επιφανειών με μη Ευκλείδειες ιδιότητες, αλλά και τρισδιάστατων μη Ευκλείδειων χώρων.

Η εισαγωγή στην ιδέα της τρισδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να μοιάζει με μυστήριο εκτός κι αν δώσουμε τις παρακάτω διευκρινήσεις.

[1] Ο Gerhard Mercator (1512-1594) ήταν ένας σπουδαίος Φλαμανδός γεωγράφος. Η προβολή που προτάθηκε απ' αυτόν το 1569 έτυχε καθολικής αποδοχής και οι ναυτικοί χάρτες συντάσσονται με αυτήν από τότε.

Μερικές φορές είναι βολικό να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης κάποιας κλάσης φαινομένων με μια γεωμετρική μορφή. Τα δεδομένα για παράδειγμα της αύξησης παραγωγικότητας της εργασίας συχνά παρουσιάζονται με μορφή γραφημάτων και διαγραμμάτων. Αυτό δείχνει ότι διάφορες πραγματικές διεργασίες μπορούν να περιγραφούν μέσω γεωμετρικών εικόνων.

Αν ένα γράφημα θεωρηθεί ως ευθεία του Ευκλείδειου επιπέδου τότε προφανώς για την εικόνα του χρησιμοποιείται η διδιάστατη Ευκλείδεια γεωμετρία. Σε ποιο σύνθετες καταστάσεις μπορούμε να καταφύγουμε σε τρισδιάστατες ή ακόμη και σε πολυδιάστατες Ευκλείδειες και μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, χωρίς να σημαίνει ότι όλες αυτές περιγράφουν εκτατικές σχέσεις. Υπάρχουν θεωρίες που χρησιμοποιούν γεωμετρικούς όρους στην τυποποίησή τους, και αυτοί οι όροι, γενικά μιλώντας, δεν έχουν σημασία που να σχετίζεται με έννοιες του χώρου. Έτσι προσθέτοντας τον χρόνο ως τέταρτη διάσταση στις τρεις διαστάσεις του πραγματικού χώρου εισάγουμε την έννοια του τετραδιάστατου χώρου στον οποίο ένα χρονικό διάστημα θεωρείται ως ‘τμήμα ευθείας γραμμής’. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτή η προσέγγιση δημιουργεί μόνο την εμφάνιση μιας εικόνας, ωστόσο διευκολύνει την ανάλυση των φαινομένων σε κάποιο βαθμό όταν αυτά μελετώνται μ’ αυτήν την μέθοδο.

Έτσι η κατασκευή της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι δικαιολογημένη από τη δυνατότητα εφαρμογής των συμπερασμάτων της σε πραγματικά αντικείμενα. Το γεγονός ότι αυτά τα συμπεράσματα είναι εκφρασμένα σε γεωμετρική γλώσσα δεν έχει πραγματικές συνέπειες. Δεν είναι δύσκολο να τροποποιήσουμε την γεωμετρική τυποποίηση ώστε αυτή να αντιστοιχεί σε ιδιότητες των αντικειμένων και των φαινομένων του ζητήματος που μας απασχολεί.

Η αντικατάσταση κάποιων εννοιών από άλλες να σημειώσουμε ότι είναι μια κοινή πρακτική στα εφαρμοσμένα μαθηματικά όπου μια θεωρία μπορεί να περιγράφει ποιοτικώς διαφορετικά αντικείμενα τα οποία όμως κυβερνώνται από τους ίδιους μαθηματικούς νόμους[1].

Οι τρισδιάστατες γεωμετρίες απαιτούν ειδική προσοχή. Ανεξαρτήτως από τις άλλες εφαρμογές τους αυτές μπορούν να ιδωθούν ως υποθέσεις που αξιώνουν να περιγράψουν τις ιδιότητες του πραγματικού χώρου. Ποια είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα είναι ένα πρόβλημα το οποίο μπορεί να λυθεί μόνο με το πείραμα.

Αλλά ας σημειώσουμε το ακόλουθο γεγονός, το οποίο είναι σημαντικό για την παραπέρα παρουσίαση. Ένας χάρτης του Λομπατσέφσκιου επιπέδου μπορεί να κατασκευαστεί πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο, και με περισσότερους από έναν τρόπους, ακριβώς όπως έγινε και στην περίπτωση της σφαίρας. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση ενός τέτοιου χάρτη σαν βάση για την μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας που θα κάνουμε εδώ.

Η γεωμετρία Λομπατσέφσκι έτυχε γενικής αναγνώρισης στις ακόλουθες περιστάσεις. Το 1868 ο Ιταλός γεωμέτρης Eugenio Beltrami (1835-1900) μελέτησε μια επιφάνεια του Ευκλείδειου χώρου η οποία έχει τις ιδιότητες του Λομπατσέφσκιου επιπέδου, ή καλύτερα κάποιου τμήματος αυτού του επιπέδου (αν η συντομότερη γραμμή πάνω στην επιφάνεια θεωρηθεί ως «ευθεία γραμμή»). Αυτή η έρευνα, η οποία λίγο αργότερα οδήγησε σε διάφορους χάρτες του Λομπατσέφσκιου επιπέδου, έπεισε τους επιστήμονες για την ορθότητα των ιδεών του Ρώσου γεωμέτρη δίνοντας την ώθηση για βαθύτερη σπουδή του έργου του και παρακίνησε το ξεκίνημα πολλών ερευνών στο πεδίο των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών.

Η εξερεύνηση των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών θέτει ένα εξαιρετικά σύνθετο πρόβλημα στους φυσικούς, αυτό της εξήγησης αν ο φυσικός χώρος είναι Ευκλείδειος όπως πιστεύαμε νωρίτερα,

---

[1] Για την πρακτική εφαρμογή αυτών των αρχών δες την παράγραφο πάνω στις προσομοιώσεις στο V.G. Boltyansky’s *Differentiation Explained* (Mir Publishers, Moscow).

και αν όχι σε ποιόν τύπο μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας ανήκει[1]. Για να απαντήσουμε σ' αυτό είναι αναγκαίο να τσεκάρουμε την εγκυρότητα των αξιωμάτων πειραματικά, εφόσον καταστεί σαφές ότι με την βελτίωση των οργάνων μέτρησης η αξιοπιστία των πειραματικών δεδομένων θα αυξηθεί και μαζί της η δυνατότητα διείσδυσης σε λεπτομέρειες οι οποίες διέφυγαν από την προσοχή παλαιότερων ερευνητών.

Έτσι ο Λομπατσέφσκι έφερε την γεωμετρία πίσω σε μια υλική ερμηνεία των αξιωμάτων της ως προτάσεων που εισηγούνται βασικές γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου, θεωρούμενες από την ανθρωπότητα ως πειραματικά αποτελέσματα.

Ακόμη δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα της γεωμετρικής δομής του φυσικού χώρου πλήρως λυμένο. παρόλα αυτά μπορούμε να σημειώσουμε ότι στην μοντέρνα θεωρία της σχετικότητας ο πραγματικός χώρος θεωρείται στη βάση ενός αριθμού δεδομένων που είναι μη Ευκλείδεια και έχουν γεωμετρικές ιδιότητες πολύ πιο σύνθετες απ' αυτές του Λομπατσέφσκιου χώρου. Ένα από τα βαρύτερα πλήγματα στην πίστη της Ευκλείδειας δομής του πραγματικού χώρου προήλθε από την ανακάλυψη του φυσικού νόμου ότι δεν υπάρχει ταχύτητα που να ξεπερνάει την ταχύτητα του φωτός.

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα που κανείς ακούει συχνά, δηλαδή ποια από τις δυο γεωμετρίες, του Ευκλείδη ή του Λομπατσέφσκι είναι η αληθινή.

Παρόμοιο ερώτημα δεν τίθεται όσον αφορά την διδιάστατη Ευκλείδεια και την σφαιρική γεωμετρία. Αμφότερες είναι αληθείς αλλά η καθεμιά έχει διαφορετική σφαίρα εφαρμογών. Οι τύποι της σφαιρικής γεωμετρίας δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για επίπεδα σχήματα όπως και οι τύποι της διδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σχήματα πάνω

[1] Στην θεώρηση αυτού του προβλήματος, η πιθανότητα ο πραγματικός χώρος να είναι όντως μη ομοιόμορφος δηλαδή η γεωμετρική του δομή να είναι διαφορετική στα διάφορα σημεία του, δεν πρέπει να παραμεληθεί.

στη σφαίρα. Το ίδιο είναι αληθές και για τις τρισδιάστατες γεωμετρίες. Καθεμιά απ' αυτές είναι λογικά συνεπής και έχει τις εφαρμογές της σε κάποιο πεδίο όχι αναγκαία γεωμετρικού χαρακτήρα, αλλά θα πρέπει να ακυρωθεί αν της αποδοθεί ένας καθολικός χαρακτήρας.

Το πρόβλημα της γεωμετρικής δομής του πραγματικού χώρου, όπως έχουμε σημειώσει εμπίπτει στο πεδίο της φυσικής και δεν μπορεί να λυθεί μέσω της καθαρής γεωμετρίας. Η ιδιαιτερότητά του, παρεμπίπτοντος, είναι ότι καμιά γεωμετρία δεν αναπαριστά τις χωρικές σχέσεις με απόλυτη ακρίβεια. Η μοριακή δομή της ύλης, για παράδειγμα, αποκλείει την ύπαρξη στερεών με διαστάσεις αντιληπτές με την αφή τα οποία να έχουν τις ιδιότητες της ιδεατής σφαίρας. Επομένως η εφαρμογή των γεωμετρικών κανόνων για την λύση προβλημάτων υλικής υπόστασης μας παρέχει μόνο προσεγγιστικά αποτελέσματα. Έτσι η αντίληψή μας για την γεωμετρική δομή του πραγματικού χώρου συνοψίζεται στην επιστημονικά δικαιολογημένη πεποίθηση ότι μια γεωμετρία μας δίνει καλύτερη περιγραφή των σχέσεων του πραγματικού χώρου από τις άλλες.

Αν και η θεωρία της σχετικότητας χρησιμοποιεί τύπους της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας αυτό δεν σημαίνει ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία θα πρέπει να απορριφθεί , όπως συμβαίνει με την αστρονομία, την αλχημεία και κάποιες ψευδοεπιστήμες σαν κι αυτές. Και οι δυο γεωμετρίες είναι εργαλεία για την εξερεύνηση χωρικών μορφών, αλλά η μη-Ευκλείδεια επιτρέπει να γίνουν λεπτότερες μελέτες, ενώ η Ευκλείδεια είναι ανεπαρκής για την επίλυση πολλών πρακτικά σημαντικών προβλημάτων τα οποία απαιτούν υψηλό βαθμό ακρίβειας. Ταυτόχρονα επειδή χαρακτηρίζεται από μεγάλη απλότητα η ευρεία εφαρμογή της είναι μονίμως εγγυημένη.

Για να κλείσουμε αυτήν την σύντομη σκιαγράφηση ας σημειώσουμε τις νέες ιδέες που εισήγαγε ο Λομπατσέφσκι στην ανάπτυξη της γεωμετρίας.

Η επιστημονική συμβολή αυτού του σπουδαίου στοχαστή δεν περιορίζεται μόνο στην αποκάλυψη του χιλιόχρονου μυστηρίου του αξιώματος των παραλλήλων αλλά η σημασία του έργου του ήταν ασύγκριτα μεγαλύτερη.

Υποβάλλοντας ένα από τα αξιώματα του Ευκλείδη σε κριτική ανάλυση ο Λομπατσέφσκι έθεσε τις βάσεις για την επανεξέταση κάποιων αρχικών προτάσεων του Ευκλείδειου συστήματος οι οποίες μεταγενέστερα οδήγησαν στην ανάπτυξη αυστηρών επιστημονικών αρχών για την αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας και άλλων μαθηματικών κλάδων.

Οι ανακαλύψεις του Λομπατσέφσκι στην υπερβολική γεωμετρία ελευθέρωσαν την επιστήμη των χωρικών μορφών από τα στενά πλαίσια του Ευκλείδειου συστήματος. Η γεωμετρία του είχε άμεσες εφαρμογές στην θεωρία των ορισμένων ολοκληρωμάτων και σε άλλους μαθηματικούς τομείς.

Ο Λομπατσέφσκι ξεκίνησε την διαπραγμάτευση προβλημάτων που δεν είχαν εγείρει προηγούμενοι μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένου κι αυτό της γεωμετρικής δομής του πραγματικού χώρου. Δίχως αυτήν ,η θεωρία της σχετικότητας , ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της μοντέρνας φυσικής, δεν θα ήταν εύκολο να αναπτυχθεί. Παίρνοντας τις έρευνες του Λομπατσέφσκι για ξεκίνημα οι επιστήμονες οικοδόμησαν μια θεωρία η οποία δίνει τη δυνατότητα να αναλύει τις διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στον πυρήνα του ατόμου.

Εν κατακλείδι ας σημειώσουμε την γνωσιολογική συνεισφορά[1] των ιδεών αυτού του μεγάλου Ρώσου μαθηματικού. Πριν τον Λομπατσέφσκι η γεωμετρία κυριαρχείτο για αιώνες από την ιδεαλιστική οπτική γωνία που πρωτοξεκίνησε από το Έλληνα φιλόσοφο Πλάτωνα. Αποδίδοντας στα αξιώματα του Ευκλείδη έναν απόλυτο χαρακτήρα ο Πλάτωνας αρνήθηκε την εμπειρική τους αρχή. Ο Λομπατσέφσκι αποφασιστικά γκρέμισε αυτή την προοπτική και επανάφερε την γεωμετρία σε μια υλιστική θέση.

[1] Γνωσιολογία-η επιστήμη της νόησης

Παράγραφος 3. Αντιστροφή

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας κανόνας ο οποίος επιτρέπει την μετάβαση από ένα σχήμα σε ένα άλλο, με τέτοιο τρόπο ώστε το δεύτερο σχήμα να είναι τελείως ορισμένο όταν το πρώτο είναι δοσμένο και αντίστροφα. Μια τέτοια μετάβαση καλείται γεωμετρικός μετασχηματισμός. Οι πιο κοινοί στη χρήση τους μετασχηματισμοί είναι η στροφή ενός σχήματος, η προβολή, και η αντιστροφή. Η αντιστροφή χρησιμοποιείται εκτεταμένα στα μαθηματικά, για παράδειγμα σαν μια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων κατασκευών στη θεωρία συναρτήσεων μιγαδικών μεταβλητών, και στη σπουδή των απεικονίσεων στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο.

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την αντιστροφή , τις έννοιες που σχετίζονται μ’ αυτήν και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες.

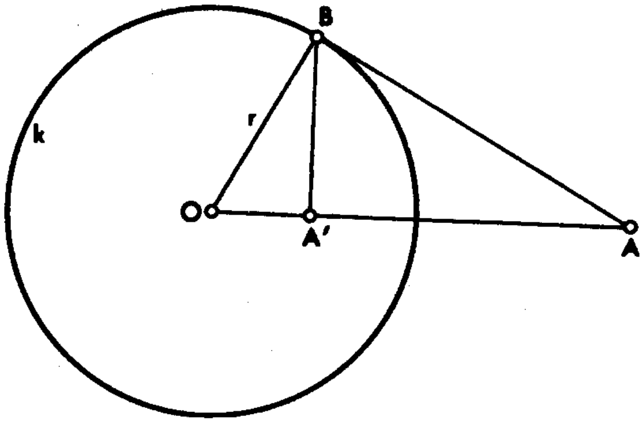
Έστω κ ένας κύκλος του επιπέδου α, με ακτίνα r και κέντρο το σημείο O. Ας είναι επίσης A ένα σημείο που δεν ταυτίζεται με το κέντρο O. Λαμβάνουμε το σημείο A΄ πάνω στην ακτίνα OA με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο του OA με το OA΄ να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου κ:

$$OA \cdot OA' = r^2 \qquad (1)$$

Συμφωνούμε να λέμε ότι τα σημεία A και A΄ είναι **συμμετρικά** ως προς τον κύκλο κ.

Αν κάποιο από τα σημεία A και A΄ είναι έξω από τον κύκλο τότε το άλλο κείται στο εσωτερικό του κύκλου, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, από την ανισότητα $OA>r$, προκύπτει με βάση την εξίσωση (1) ότι $OA'< r$. Αν κάποιο από τα A ή A΄ ανήκει πάνω στον κύκλο κ, τότε τα A και A συμπίπτουν.

Θεωρούμε το σχ.3 στο οποίο AB είναι η εφαπτομένη του κύκλου κ, και BA΄ είναι η κάθετη στο OA.

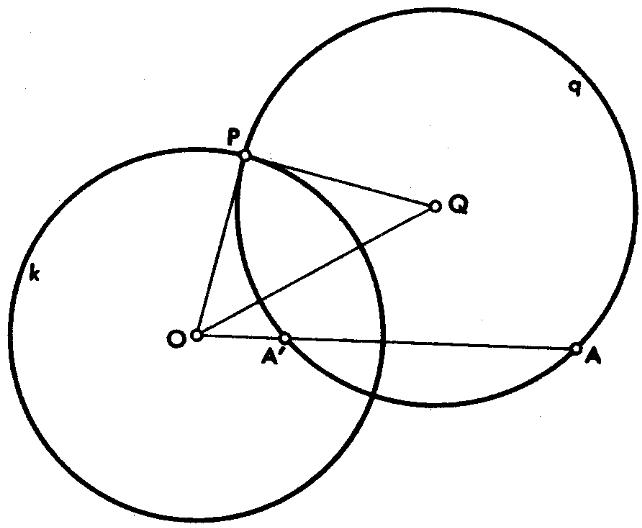


Σχ.3

Αφού ΟΑ΄ είναι η προβολή του τμήματος ΟΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ πάνω στη υποτείνουσα ΟΑ,

$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

Τα σημεία Α και Α΄ επομένως είναι συμμετρικά ως προς τον κ. Αυτός είναι προφανώς ο τρόπος κατασκευής του Α΄ όταν το Α είναι δοσμένο, και του Α όταν το Α΄είναι δοσμένο.



Σχ.4

Θεώρημα 1. *Αν ο κύκλος q διέρχεται από τα διακριτά σημεία A και A΄, συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ, τότε οι κύκλοι κ και q είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι.*

Δυο κύκλοι λέμε ότι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι αν αυτοί τέμνονται υπο ορθή γωνία, δηλαδή αν οι εφαπτομένες τους στο σημείο τομής τους (ή ισοδύναμα αν οι ακτίνες που φέρονται στο σημείο αυτό) είναι μεταξύ τους κάθετες.

Έστω P ένα από τα σημεία τομής των κύκλων κ, q (σχ.4). Αφού OP είναι ακτίνα του κ, η εξίσωση (1) λαμβάνει την μορφή $OA \cdot OA' = OP^2$. Από την άλλη μεριά , το γινόμενο των τμημάτων OA και OA΄ είναι ίσο με το τετράγωνο του εφαπτόμενου τμήματος από το O προς τον κύκλο q. Έτσι προκύπτει ότι το OP είναι εφαπτόμενο στον q, άρα οι ακτίνες OP και QP είναι κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή οι κύκλοι είναι ορθογώνιοι.

Σημειώστε ότι ένας κύκλος που περνάει από δυο διακριτά σημεία, συμμετρικά ως προς μια ευθεία γραμμή, τέμνει την ευθεία υπό ορθές γωνίες. Η αναλογία ανάμεσα στην ιδιότητα αυτή και το γεγονός που αποδείχτηκε στο θεώρημα 1, επάγει την μεταφορά του όρου «συμμετρία» στην περίπτωση των δυο σημείων που είναι έτσι κείμενα ως προς δοθέντα κύκλο, ώστε ένας κύκλος που διέρχεται από αυτά να είναι ορθογώνιος προς τον δοσμένο κύκλο.

Θεώρημα 2. *Αν οι κύκλοι κ και q είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι, τότε μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο O του κ και τέμνει τον q,τον τέμνει σε σημεία συμμετρικά ως προς κ.*

Ας σημειώσουμε τα σημεία στα οποία η ευθεία γραμμή τέμνει τον q με A , A΄ και ένα από τα κοινά σημεία των δυο κύκλων κ και q με P (σχ.4) . Αφού οι κύκλοι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι η ευθεία OP είναι εφαπτομένη στον q, επομένως, $OAOA' = OP^2$. Έτσι προκύπτει ότι τα σημεία A και A΄ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ.

Θεώρημα 3. *Δοθέντος ενός τριγώνου OAB όπου O είναι το κέντρο ενός κύκλου κ, και σημείων A΄και B συμμετρικών των A και B ως προς τον κ, τότε*

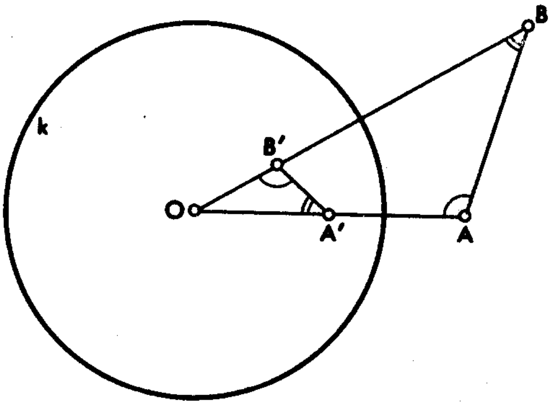
$$<OAB=<OB'A' \text{ και } <OBA=<OA'B'$$

Θεωρούμε το σχ.5. Από την εξίσωση

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

η οποία προκύπτει από την συνθήκη (1), λαμβάνουμε OA:OB΄=OB:OA΄. Επομένως τα τρίγωνα OAB και OA΄B΄, που έχουν μια κοινή γωνία AOB, είναι όμοια. Έτσι συνάγουμε ότι το θεώρημα είναι έγκυρο.

Σημειώστε οτι ένας κύκλος μπορεί να περάσει από τις κορυφές του τετραπλεύρου ABBΆ΄ αφού <AΆB+<A΄B΄B=π. Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1, αυτός ο κύκλος είναι ορθογώνιος στον κ.



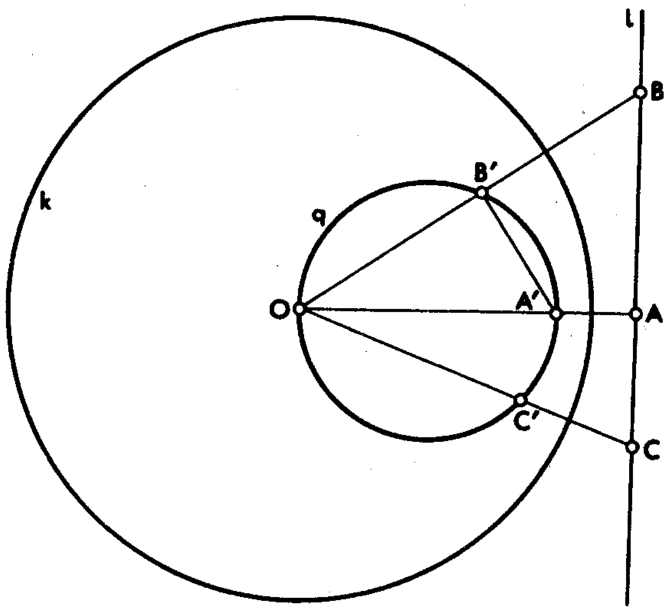
Σχ.5

Τώρα ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό του επιπέδου που συνίσταται στα ακόλουθα: Δυο σημεία του επιπέδου, συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ, αλλάζουν θέσεις μεταξύ τους. Αυτός ο μετασχηματισμός καλείται **αντιστροφή**, ο κύκλος κ καλείται **κύκλος της αντιστροφής**, και το κέντρο του **πόλος της αντιστροφής.** Αν η αντιστροφή που αντιστοιχεί στον κ, μεταφέρει ένα σχήμα Σ στο Σ΄, τότε λέμε ότι το Σ είναι συμμετρικό με το Σ΄και το Σ΄με το Σ, ως προς τον κύκλο κ.

Σημειώστε ότι δεν υπάρχει σημείο το οποίο να είναι συμμετρικό ως προς τον πόλο της αντιστροφής, που αντιστοιχεί στο κέντρο του κύκλου αντιστροφής κ.

Είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημεία που βρίσκονται έξω από την περιοχή που φράσσεται από τον κύκλο αντιστροφής, μετασχηματίζονται σε σημεία στο εσωτερικό του, εξαιρουμένου του πόλου αντιστροφής, και αντίστροφα. Τα σημεία του κύκλου αντιστροφής μετασχηματίζονται στον εαυτό τους. Μια ευθεία που διέρχεται από τον πόλο Ο της αντιστροφής, μετασχηματίζεται στον εαυτό της εξαιρουμένου του σημείου Ο.

Θεώρημα 4. *Μια ευθεία που δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής, μετασχηματίζεται με αντιστροφή σε κύκλο που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής.*



Σχ.6

Έστω A το ίχνος της καθέτου από το O προς την ευθεία l, B ένα τυχαίο σημείο της ευθείας l και A΄,B΄ τα συμμετρικά των A, B αντίστοιχα ως προς τον κύκλο αντιστροφής κ (σχ.6). Κατασκευάζουμε τον κύκλο q με διάμετρο το τμήμα OA΄. Από το θεώρημα 3 , <OBΆ΄=<OAB, επομένως <OBΆ΄=π/2. Έτσι το σημείο B΄ ανήκει στον κύκλο q. Από την άλλη μεριά, έστω C΄ σημείο του q διάφορο του O. Τότε η ευθεία OC΄ τέμνει την l σε κάποιο σημείο C το οποίο μετασχηματίζεται με αυτή την αντιστροφή, όπως αμέσως μπορούμε να δούμε, στο σημείο C΄. Έτσι το θεώρημα έχει αποδειχτεί , όμως οφείλουμε να θυμόμαστε ότι η ευθεία l μετασχηματίζεται σε ένα σχήμα που είναι ο κύκλος q δίχως το σημείο O.

Ας σημειωθεί ότι το κέντρο του κύκλου q ανήκει στην κάθετη που φέρεται από το O προς την l.

Αν η ευθεία l δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αντιστροφής κ, τότε ο q κείται στο εσωτερικό του κ.

Αν η l είναι εφαπτόμενη του κ σε κάποιο σημείο του, τότε ο q εφάπτεται στον κ στο ίδιο σημείο.

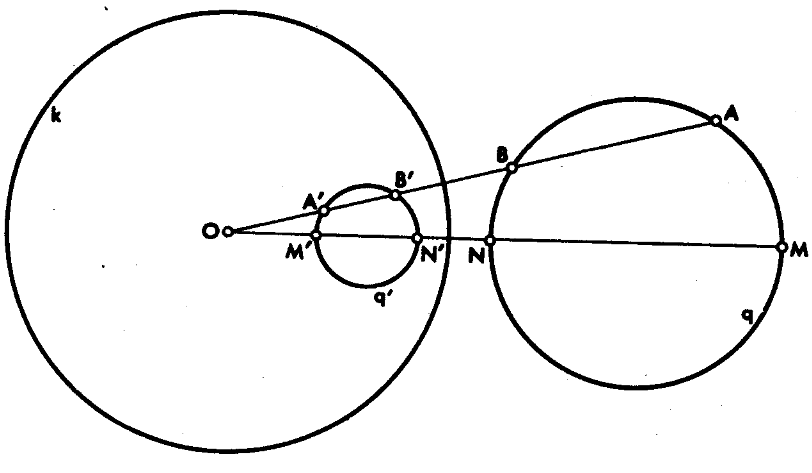
Αν l και κ τέμνονται, τότε ο q περνάει από τα σημεία τομής τους.

Θεώρημα 5. *Η αντιστροφή μεταφέρει έναν κύκλο που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής , σε μια ευθεία γραμμή η οποία δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής.*

Έστω Ο (ο πόλος αντιστροφής), Α και Β τρία διακριτά σημεία πάνω στον κύκλο q, και Α΄,Β΄, δυο σημεία συμμετρικά των Α,Β ως προς τον κύκλο αντιστροφής. Δυνάμει του θεωρήματος 4, η ευθεία Α΄Β΄ μεταφέρεται σε έναν κύκλο που διέρχεται από τα Ο, Α και Β δηλαδή στον κύκλο q. Έτσι προκύπτει ότι ο q έχει απεικονιστεί στην ευθεία Α΄Β΄.

Θεώρημα 6. *Η αντιστροφή απεικονίζει έναν κύκλο που δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής σε έναν κύκλο ο οποίος επίσης δεν περνά από τον πόλο αντιστροφής.*

Έστω κ είναι ο κύκλος αντιστροφής με ακτίνα r και κέντρο Ο , και q ο δοσμένος κύκλος που δεν διέρχεται από το Ο (σχ.7).



σχήμα 7

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Α πάνω στον q και σημειώνουμε το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας ΟΑ και του q με Β ,και τα συμμετρικά των Α και Β ως προς κ με Α΄και Β΄. Τότε

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

Έτσι $\frac{OA}{OB'}=\frac{OB}{OA'}$ (2) και ΟΑ·ΟΒ·ΟΑ΄·ΟΒ΄=r^4

Το γινόμενο ΟΑ·ΟΒ=g δεν μεταβάλλεται, σύμφωνα με ένα πολύ γνωστό θεώρημα της στοιχειώδους γεωμετρίας, όταν το σημείο Α αλλάζει θέση πάνω στον q. Επομένως g είναι μια σταθερή ποσότητα, θετική όταν Ο είναι έξω από τον q , και αρνητική όταν το Ο είναι μέσα στον q (αφού , στην δεύτερη περίπτωση , οι διευθύνσεις του τμήματος ΟΑ και ΟΒ είναι αντίθετες).

Από τις τελευταίες δυο εξισώσεις παίρνουμε ΟΑ΄·ΟΒ΄=$\frac{r^4}{g}$

Επομένως $\frac{OA}{OB'}\cdot\frac{OB}{OA'}=\frac{g^2}{r^4}$ και από την εξίσωση (2) προκύπτει

$\frac{OA}{OB'}=\frac{g}{r^2}$ (το πρόσημο έχει επιλεχθεί ορθά αφού τα τμήματα ΟΒ και ΟΒ΄ έχουν την ίδια διεύθυνση). Όπως προκύπτει από την τελευταία εξίσωση τα σχήματα που ιχνογραφούνται από τα σημεία Α και Β΄ είναι όμοια, συνεπώς το θεώρημα έχει αποδειχτεί: Το σημείο Β΄ γράφει έναν κύκλο (τον οποίο σημειώνουμε με q΄).

Ο πόλος αντιστροφής Ο θα είναι το κέντρο ομοιοθεσίας των κύκλων q ,q΄, εξωτερικό αν g>0, και εσωτερικό αν g<0. Στην πρώτη περίπτωση το Ο βρίσκεται έξω, και στην δεύτερη περίπτωση μέσα στους κύκλους q, q΄.

Αν ο q είναι εφαπτόμενος του κ σε κάποιο σημείο του, τότε q΄ είναι εφαπτόμενος στον κ στο ίδιο σημείο.

Αν οι κ και q τέμνονται, τότε q΄ περνάει επίσης από αυτά τα σημεία τομής.

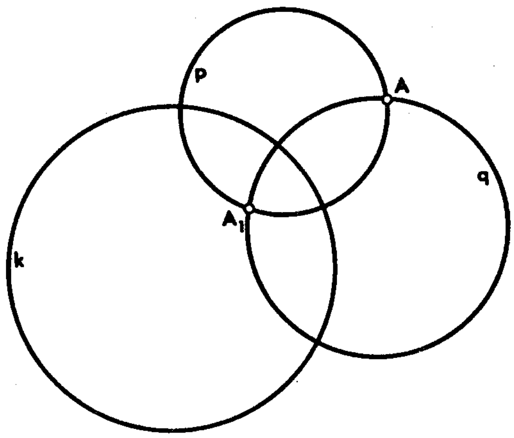
Ένας κύκλος q ορθογώνιος στον κ , μεταφέρεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής που αντιστοιχεί στον κ (q΄ συμπίπτει με τον q), όπως προκύπτει από το θεώρημα 2.

Αν η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων κ και q τέμνει τον q στα σημεία Μ και Ν, τότε το τμήμα Μ΄Ν΄(όπου Μ΄και Ν΄ είναι τα συμμετρικά των Μ και Ν αντίστοιχα ως προς τον κ) θα είναι διάμετρος του κύκλου q΄. (σχ. 7). Αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε τον κύκλο q΄.

Ας σημειωθεί ότι τα κέντρα των κύκλων q,q΄ δεν είναι συμμετρικά ως προς την αντιστροφή που ορίζεται από τον κ.

Θεώρημα 7. *Τα σημεία τομής δυο κύκλων p και q, ορθογώνιων ως προς τον κύκλο κ, είναι συμμετρικά ως προς κ.*

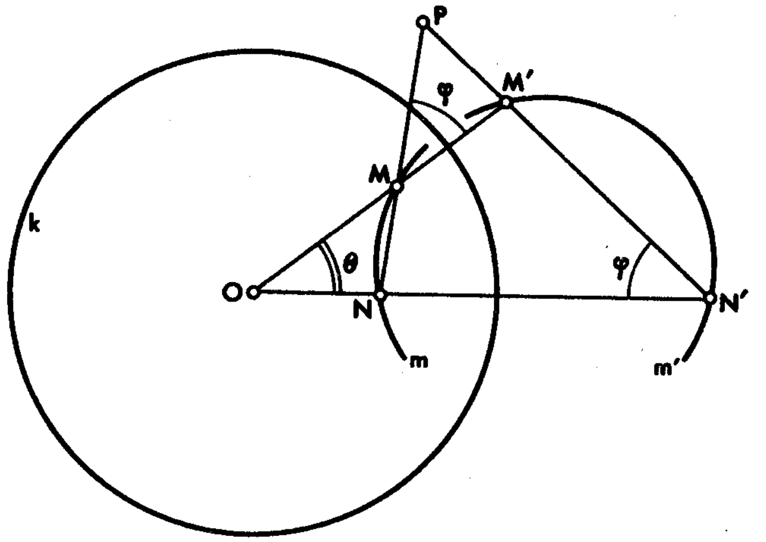
Το θεώρημα είναι φανερό αφού καθένας από τους κύκλους p,q μεταφέρεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής ως προς κ. Κατά συνέπεια τα σημεία τομής τους A και A_1 θα εναλλάσσουν θέσεις.(σχ.8).



Σχ.8

Θεώρημα 8. *Αν M και M΄είναι δυο σημεία συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ πάνω σε δυο καμπύλες m και m΄, επίσης συμμετρικών ως προς κ, τότε οι εφαπτόμενες των m,m΄στα σημεία M και M΄ είναι η κάθε μια κάθετη στην ευθεία MM΄ ή ορίζουν με αυτήν την ευθεία ισοσκελές τρίγωνο με βάση το τμήμα MM΄.*

Παίρνουμε πάνω στην m ένα σημείο N, διαφορετικό από το M και σχεδιάζουμε το σημείο N΄ συμμετρικό του N ως προς κ. (σχ.9). Είναι φανερό ότι το N΄ανήκει στην m΄. Οι ευθείες MM΄ και NN΄ διέρχονται από το κέντρο O του κύκλου κ. Κατασκευάζουμε τις ευθείες MN και M΄N΄ σημειώνοντας το σημείο τομής τους με P. Αν ‹MON=θ, ‹OMN=φ τότε δυνάμει του θεωρήματος 3, ‹ON΄M΄=φ.



σχήμα 9

Επομένως στο τρίγωνο ΜΜ΄Ρ είναι ‹Μ=φ, ‹Μ΄=φ+θ

Έστω ότι η γωνία θ τείνει στο μηδέν, υπό την συνθήκη ότι το σημείο Μ είναι σταθερό. Τότε στον οριακό σχηματισμό τα τμήματα ΜΝ και Μ΄Ν΄ θα είναι μετασχηματισμένα στις εφαπτόμενες των m,m΄στα σημεία Μ και Μ΄, και το τρίγωνο ΜΜ΄Ρ θα γίνεται ισοσκελές. Πράγματι

$$\lim_{\theta\to 0}(\varphi+\theta)=\lim_{\theta\to 0}\varphi+\lim_{\theta\to 0}\theta=\lim_{\theta\to 0}\varphi$$

Έτσι το θεώρημα έχει αποδειχτεί.

Θεώρημα 9. *Η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες.*

Ας θεωρήσουμε τις ευθείες m ,n οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Αν η αντιστροφή ως προς τον κύκλο κ μεταφέρει τις m,n και το Α στις m΄, n΄ και Α΄, τότε όπως προκύπτει από το θεώρημα 8 , η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων των m,n στο Α, είναι ίση με την γωνία των εφαπτόμενων των m΄,n΄ στο σημείο Α΄.

Ένας μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί τις γωνίες ονομάζεται **σύμμορφος**. Έτσι όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, η αντιστροφή είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός.

Παράγραφος 4.
Χάρτης του Λομπατσέφσκιου επιπέδου

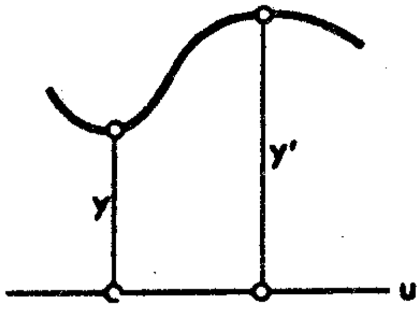
Θεωρούμε ένα επίπεδο ω και μια ευθεία γραμμή u πάνω σ αυτό η οποία το διαιρεί σε δυο ημιεπίπεδα τ και τ΄. Υποθέτουμε ότι το ημιεπίπεδο τ είναι ο χάρτης ενός διδιάστατου χώρου H. Θα ξεχωρίζουμε το μήκος s μιας γραμμής του H και το μήκος σ της εικόνας της πάνω στο χάρτη. Θα ονομάζουμε τις ποσότητες s και σ αντίστοιχα **υπερβολικό** και **Ευκλείδειο** μήκος.

Για να μετρήσουμε μήκη πάνω στο υπερβολικό επίπεδο θα κάνουμε χρήση των ακόλουθων αρχών:

1^o . Το υπερβολικό μήκος του τμήματος MN, παράλληλου προς την ευθεία γραμμή u και ευρισκόμενο σε απόσταση y από αυτό είναι ίσο με $\frac{MN}{y}$, δηλαδή είναι ο λόγος του Ευκλείδειου μήκους του προς την απόστασή του από την ευθεία u.

2^o .Αν σ είναι το Ευκλείδειο μήκος και s το υπερβολικό μήκος του τόξου μιας καμπύλης (ή ενός τμήματος ευθείας μη παράλληλης στην u) και y,y΄ είναι το ελάχιστο και το μέγιστο των αποστάσεων των σημείων της καμπύλης από την ευθεία u, και αν y≠0 (σχ.10), τότε ικανοποιείται η παρακάτω ανισότητα:

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}$$

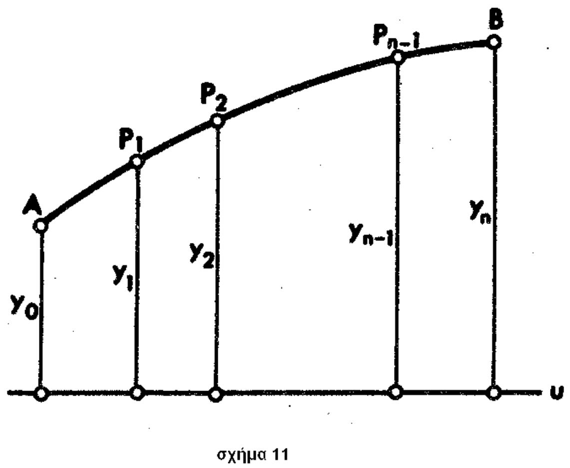


σχήμα 10

Θα εξηγήσουμε παρακάτω πώς ο χώρος Η με τις παραπάνω ιδιότητες απεικονίζεται στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο.

Με βάση τις αρχές 1^{o} και 2^{o} δεν είναι δύσκολο να υποδείξουμε μια γενική μέθοδο για την μέτρηση του υπερβολικού μήκους.

Θα βρούμε πρώτα το υπερβολικό μήκος s ενός τόξου ΑΒ το οποίο έχει την παρακάτω ιδιότητα:
Αν ένα σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης από το Α προς το Β, τότε οι αποστάσεις του από την ευθεία u αυξάνουν. Η απόσταση του Α από την u είναι μη μηδενική και το τόξο ΑΒ είναι λείο , δηλαδή δεν έχει απότομες στροφές και γωνίες (σχ.11)



σχήμα 11

Έστω ότι σχεδιάζουμε πάνω στο τόξο ΑΒ, διαδοχικά από το Α μέχρι το Β, τα σημεία

$$A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, B \quad (*)$$

Με τα σύμβολα

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$$
$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots\ldots, \sigma_n$$
$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots\ldots, \zeta_n$$

σημειώνουμε αντιστοίχως: Την Ευκλείδεια απόσταση των σημείων (*) από την ευθεία u, το Ευκλείδειο μήκος των τόξων AP_1, P_1P_2, . . .

$,P_{n-1}B$ που συγκροτούν το τόξο ΑΒ, και το Ευκλείδειο μήκος των χορδών που υποτείνουν αυτά τα τόξα.

Σχηματίζουμε τα αθροίσματα :

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + ... + \frac{\sigma_n}{y_n}$$

$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + ... + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}}$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + ... + \frac{\zeta_n}{y_n}$$

Δυνάμει της $2^{ης}$ αρχής θα έχουμε $\Sigma < s < \Sigma'$ (3)

σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες $0 < y_0 < y_1 < ..... < y_n$.

Τώρα ας θεωρήσουμε την διαφορά

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + ... + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1})$$

Το δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης θα αυξηθεί αν καθεμιά από τις ποσότητες $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ αντικατασταθεί από το μέγιστο αυτών των ποσοτήτων (σημειωμένο με σ΄) και κάθε παρονομαστής αντικατασταθεί με y_0^2. Συνεπώς

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + ... + y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_n - y_0)$$

Αν σ΄ τείνει στο μηδέν , προκύπτει ότι η διαφορά Σ΄-Σ επίσης τείνει στο μηδέν.

Μετατρέπουμε τώρα το άθροισμα Ζ στην μορφή

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + ... + \frac{\sigma_n}{y_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$$

Σημειώνοντας το ελάχιστο των λόγων $\frac{\zeta_1}{\sigma_1}, \frac{\zeta_2}{\sigma_2}, ... \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$ με α και το μέγιστο με β θα έχουμε ότι

$$\alpha\Sigma \leq Z \leq \beta\Sigma \qquad (4)$$

Έστω ότι ο αριθμός n αυξάνει απεριόριστα και την ίδια στιγμή έστω ότι καθεμιά από τις ποσότητες $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ καθώς και η σ΄, τείνουν στο μηδέν. Τότε όπως δείξαμε παραπάνω , η διαφορά Σ΄-Σ επίσης θα τείνει στο μηδέν ενώ οι ποσότητες α και β θα τείνουν στην μονάδα.[1] Μετά απ' αυτά από τις ανισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι καθένα από τα αθροίσματα Σ, Σ΄, Ζ τείνει στην ίδια οριακή τιμή και αυτή η τιμή είναι ίση με το υπερβολικό μήκος s του τόξου ΑΒ.

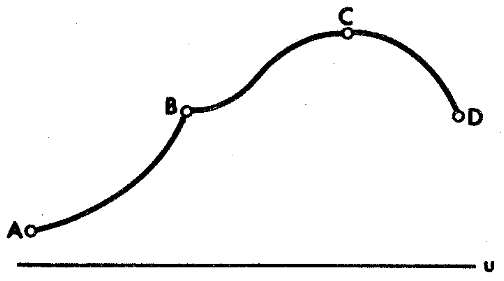
Είναι ποιο βολικό να χρησιμοποιούμε το άθροισμα Ζ αφού αυτό περιλαμβάνει μήκη Ευκλειδείων ευθυγράμμων τμημάτων και όχι τόξων.

Έτσι

$$s = \lim Z = \lim \left(\frac{\sigma_1}{y_1}\cdot\frac{\zeta_1}{\sigma_1}+\frac{\sigma_2}{y_2}\cdot\frac{\zeta_2}{\sigma_2}+\ldots+\frac{\sigma_n}{y_n}\cdot\frac{\zeta_n}{\sigma_n}\right) \quad (5)$$

όπου το πέρασμα στο όριο εκτελείται με την συνθήκη που αναφέραμε παραπάνω.

Ας σημειωθεί ότι το y_1 στην εξίσωση (5) μπορεί να ληφθεί ίσο με την απόσταση ενός αυθαίρετου σημείου του τμήματος AP_1 από την ευθεία u, το y_2 ίσο με την απόσταση ενός τυχαίου σημείου του τμήματος P_1P_2 από την u, και ούτω καθεξής ,πράγμα που μπορεί να αλλάζει την τιμή του Ζ όμως δεν επηρεάζει το όριό του.



σχήμα 12

Αν το τόξο της καμπύλης μπορεί να διαιρεθεί σε έναν πεπερασμένο αριθμό από μέρη που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες που αναφέραμε για το τόξο ΑΒ, τότε το υπερβολικό μήκος του ισούται με το άθροισμα των μηκών των μερών του. Για παράδειγμα διαιρέσαμε το τόξο AD στο σχήμα 12 στα μέρη AB, BC και CD, αλλά μπορούμε να σημειώσουμε τα σημεία της διαμέρισης πάνω στο CD, μετακινούμενοι από το D προς το C.

[1] Ο λόγος της χορδής προς το τόξο στο οποίο η χορδή υποτείνει είναι γνωστό ότι τείνει στην μονάδα αν το μήκος του τόξου τείνει στο μηδέν (υπό την προϋπόθεση ότι είναι τόξο λείας καμπύλης).

Έστω ότι μετακινούμε τα σημεία του ημιεπιπέδου τ με τέτοιο τρόπο ώστε το υπερβολικό μήκος ενός τόξου που βρίσκεται σε κάποια θέση πάνω σ' αυτό να είναι ίσο με το υπερβολικό μήκος του ίδιου τόξου στην νέα του θέση. Θα ονομάζουμε αυτό τον μετασχηματισμό σημείων **υπερβολική κίνηση,** μια έννοια παρόμοια με την κίνηση πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο, όπως πχ η στροφή κατά κάποια γωνία γύρω από ένα σημείο.

Αν μια υπερβολική κίνηση μεταφέρει το σχήμα F στο F_1, θα λέμε ότι τα δυο σχήματα είναι υπερβολικώς ίσα.

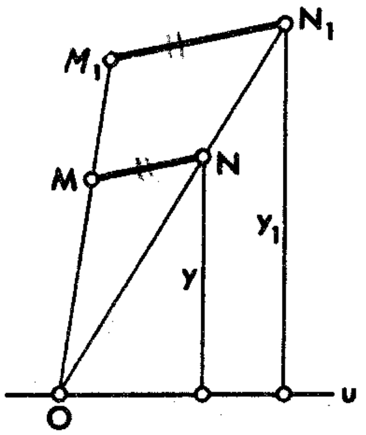
Ας θεωρήσουμε τώρα τις απλούστερες υπερβολικές κινήσεις.

(1) Αν κάθε σημείο του ημιεπιπέδου τ μεταφέρεται κατά την ίδια απόσταση και κατά μια διεύθυνση παράλληλη προς την ευθεία u, τότε κάθε σχήμα μεταφέρεται σε ένα σχήμα υπερβολικώς ίσο προς το αρχικό σχήμα , αφού ούτε οι Ευκλείδειες αποστάσεις ούτε οι αποστάσεις των σημείων του από την u αλλάζουν.

Έτσι συνάγουμε ότι ***η Ευκλείδεια μετατόπιση στο ημιεπίπεδο τ κατά μήκος της ευθείας γραμμής u είναι υπερβολική κίνηση.***

(2) Έστω ότι ο μετασχηματισμός ομοιότητας με κέντρο ένα αυθαίρετο σημείο O πάνω στην ευθεία u και με θετικό συντελεστή ομοιότητας μεταφέρει το τμήμα MN στο τμήμα M_1N_1 (σχ.13). Σημειώνουμε τις αποστάσεις των σημείων N και N_1 από την u με y και y_1. από την ομοιότητα των τριγώνων OMN και OM_1N_1 έχουμε

$$\frac{\mathrm{MN}}{y}=\frac{\mathrm{M_1N_1}}{y_1}\ .$$

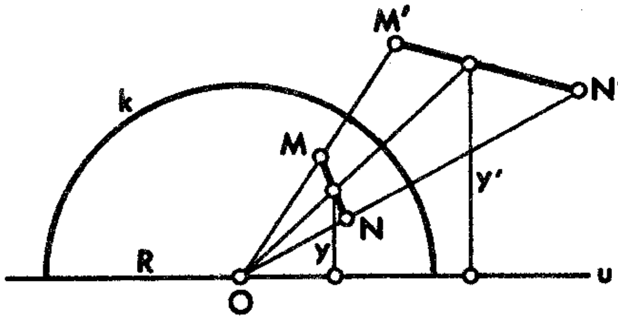


σχήμα 13

Από την εξίσωση (5) προκύπτει ότι το υπερβολικό μήκος ενός τόξου κάποιας καμπύλης δεν μεταβάλλεται από αυτό τον μετασχηματισμό. Συνεπώς , ***ο μετασχηματισμός ομοιότητας με κέντρο πάνω στην ευθεία u και θετικό συντελεστή ομοιότητας είναι μια υπερβολική κίνηση.***

Ο μετασχηματισμός ομοιότητα λαμβάνεται με θετικό συντελεστή έτσι ώστε το τμήμα M_1N_1 να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο τ και όχι στο αντικείμενο ημιεπίπεδο τ΄.

(3) Ας θεωρήσουμε τώρα την αντιστροφή που ορίζεται από τον κύκλο κ με αυθαίρετη ακτίνας R και κέντρο πάνω στην ευθεία u (σχ.14). Έστω M και N δυο σημεία αρκούντως κοντά το ένα στο άλλο, και M΄ , N΄ τα συμμετρικά τους ως προς τον κ. Σημειώνουμε με y , y΄τις αποστάσεις από την u των σημείων τομής της διχοτόμου της γωνίας MON και των τμημάτων MN και M΄N΄.



σχήμα 14

Αφού τα τρίγωνα OMN και OM΄N΄ είναι όμοια θα έχουμε

$$\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$$

Από την έκφραση αυτή και την εξίσωση (5) συμπεραίνουμε ότι το υπερβολικό μήκος του τόξου μιας καμπύλης παραμένει αμετάβλητο από τον παραπάνω μετασχηματισμό. Συνεπώς,

Η αντιστροφή που αντιστοιχεί σε κύκλο με κέντρο πάνω στην ευθεία u είναι μια υπερβολική κίνηση.

(4) Τέλος δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι ***η συμμετρία που αντιστοιχεί σε άξονα κάθετο στην ευθεία u είναι επίσης μια υπερβολική κίνηση.***

Κάθε μια από τις υπερβολικές κινήσεις που συζητήσαμε παραπάνω αποτελεί ένα σύμμορφο μετασχηματισμό. Αυτό είναι φανερό για τους μετασχηματισμούς του ημιεπιπέδου τ κατά μήκος της ευθείας u, και των μετασχηματισμών ομοιότητας και συμμετρίας . Για την αντιστροφή θα δούμε στην παρ.3 ότι κι αυτή αποτελεί σύμμορφη απεικόνιση.

Αφού μια υπερβολική κίνηση έχει την ιδιότητα να μεταφέρει ένα σχήμα σε ένα άλλο υπερβολικά ίσο με το πρώτο, κάθε μετασχηματισμός που συνίσταται από μια ακολουθία διαφόρων υπερβολικών κινήσεων θα έχει την ίδια ιδιότητα, δηλαδή είναι μια υπερβολική κίνηση επίσης.

Αναφέρουμε ,δίχως απόδειξη, ότι κάθε υπερβολική κίνηση μπορεί να παρασταθεί σαν μια πεπερασμένη ακολουθία των απλών υπερβολικών κινήσεων που συζητήσαμε παραπάνω.

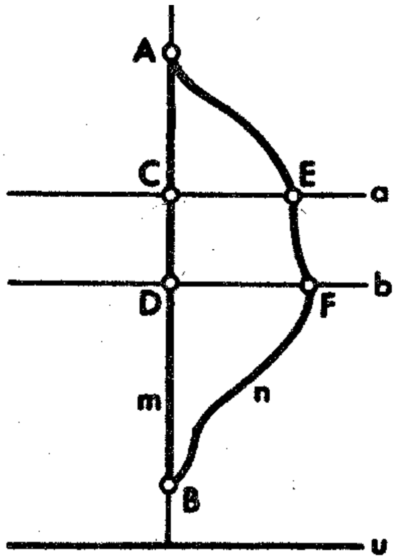
Θα δείξουμε τώρα ότι οι νόμοι της γεωμετρίας Λομπατσέφσκι πραγματώνονται πάνω στο ημιεπίπεδο τ, αν οι κανόνες μέτρησης μηκών ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

Στο ημιεπίπεδο τ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κάποια σχήματα που χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ιδιότητες με τα αντίστοιχα σχήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά πιθανόν με διαφορετική μορφή από τα τελευταία. Θα χρησιμοποιούμε γι΄αυτά το πρόθεμα « υπερβολικά ». Για παράδειγμα θα καλούμε την ευθεία κατά μήκος της οποίας έχουμε την συντομότερη απόσταση μεταξύ των σημείων της , ως υπερβολική ευθεία γραμμή και θα ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο του τ , ως υπερβολικό κύκλο.

Ας ορίσουμε τώρα ποιες καμπύλες του ημιεπιπέδου τ είναι υπερβολικές ευθείες γραμμές.

Υπερβολικές ευθείες καταρχήν είναι Ευκλείδειες ακτίνες κάθετες στην ευθεία u, όπως προκύπτει από το παρακάτω επιχείρημα.

Έστω A και B ανήκουν πάνω σε μια κάθετη προς την ευθεία u (σχ.15) και έχουν συνδεθεί με το τμήμα της ευθείας AmB και με μια καμπύλη ή τεθλασμένη γραμμή AnB. Έστω ότι οι ευθείες α και b που είναι παράλληλες στην u και επαρκώς κοντά η μια στην άλλη,

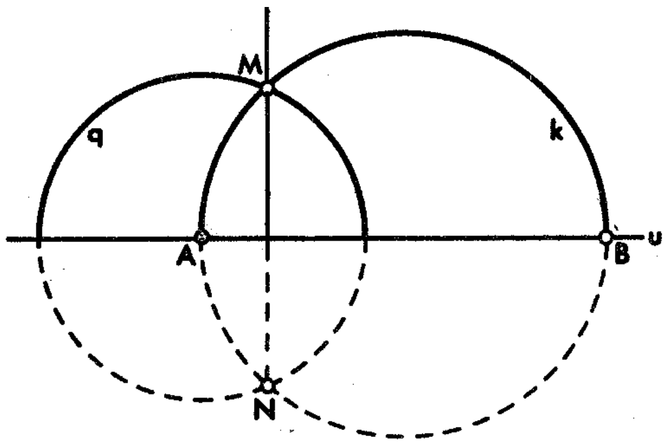


σχήμα 15

τέμνουν την AmB στα σημεία C και D, και την AnB στα σημεία E και F. Αφού το Ευκλείδειο μήκος του τμήματος CD, γενικά μιλώντας, είναι μικρότερο από αυτό του τόξου EF, και αφού τα υπερβολικά τους μήκη μπορούν να θεωρηθούν ίσα με $\frac{CD}{y}$ και $\frac{EF}{y}$, όπου y είναι η απόσταση του D (ή F) από την ευθεία u, τότε το υπερβολικό μήκος CD είναι γενικά μικρότερο από το τόξο EF (αυτά τα υπερβολικά μήκη μπορεί να είναι ίσα μόνο αν EF είναι ένα τμήμα Ευκλείδειας ευθείας κάθετης στην u. Είναι προφανές ότι αυτή η συνθήκη δεν επαληθεύεται πάντα αφού σε αντίθετη περίπτωση , το τόξο AnB θα έπρεπε να ταυτίζεται με το τμήμα AmB). Έτσι το υπερβολικό μήκος του τμήματος AmB είναι μικρότερο από το υπερβολικό μήκος του τόξου AnB.

Θα δείξουμε τώρα ότι το ημικύκλιο ενός Ευκλείδειου κύκλου κ με κέντρο πάνω στην ευθεία u είναι επίσης μια υπερβολική ευθεία γραμμή.

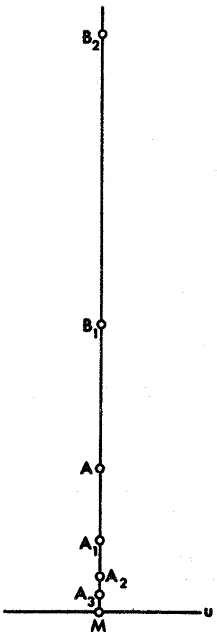
Έστω ότι ο κ τέμνει την u στα σημεία A και B (σχ.16).



σχήμα 16

Φέρνουμε και τον κύκλο q με κέντρο το Α και υποθέτουμε ότι αυτός είναι ο κύκλος της αντιστροφής. Έστω ότι οι δυο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Μ και Ν. Ο κύκλος κ που περνάει από τον πόλο αντιστροφής , μεταφέρεται μέσω της αντιστροφής ως προς q στην ευθεία ΜΝ (βλέπε παρ.3). Αφού η αντιστροφή είναι υπερβολική κίνηση , και η ΜΝ είναι κάθετη στην u, προκύπτει ότι το ημικύκλιο κ είναι μια υπερβολική ευθεία.

Έτσι οι υπερβολικές ευθείες του ημιεπιπέδου τ, αναπαρίστανται από Ευκλείδειες ημιευθείες κάθετες στην u , και από Ευκλείδεια ημικύκλια με κέντρα πάνω στην ευθεία u. Αργότερα, λαμβάνοντας υπόψη το αξίωμα 1, θα δούμε ότι αυτές είναι και οι μόνες υπερβολικές ευθείες που υπάρχουν.



σχήμα 17

Υψώνουμε στο ημιεπίπεδο τ, μια κάθετη στην u στο τυχαίο σημείο της Μ. (σχ.17), παίρνουμε ένα σημείο Α πάνω σ'αυτήν και κατασκευάζουμε τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \ldots$.με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακόλουθες ισότητες να ικανοποιούνται:

$$AA_1=A_1M,\ A_1A_2=A_2M,\ A_2A_3=A_3M,\ \ldots$$

Με άλλα λόγια, A_1 είναι το μέσο του τμήματος ΑΜ, A_2 είναι το μέσο του A_1M, A_3 είναι το μέσο του τμήματος A_2M και ούτω καθεξής.

Ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας με κέντρο το Μ και λόγο ½. Αυτός ο μετασχηματισμός είναι μια υπερβολική κίνηση που μεταφέρει τα σημεία

$A, A_1, A_2, \ldots$ στα σημεία $A_1, A_2, A_3, \ldots$ αντίστοιχα.
Έτσι προκύπτει ότι τα υπερβολικά μήκη των τμημάτων AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι η κατασκευή που εκτελέσαμε παραπάνω αραδιάζει υπερβολικώς ίσα τμήματα AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ από το σημείο Α πάνω στην υπερβολική ευθεία ΑΜ. Από την κατασκευή προκύπτει ότι ουδέποτε θα φθάσουμε το σημείο Μ όσα πολλά τμήματα κι αν κατασκευάσουμε. Συνεπώς , Μ είναι ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο πάνω στην ευθεία ΑΜ. Αφού Μ είναι τυχαίο σημείο της u, συμπεραίνουμε ότι κάθε σημείο πάνω στην u είναι ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο του ημιεπιπέδου τ.

Η μέθοδος του αραδιάσματος των υπερβολικώς ίσων τμημάτων AB_1, B_1B_2, $B_2B_3, \ldots$ πάνω στην υπερβολική ευθεία ΑΜ (σχ.17) μπορεί επίσης να γίνει προς την αντίθετη διεύθυνση από την παραπάνω και η διαδικασία επίσης να συνεχιστεί επ' άπειρο. Έτσι προκύπτει ότι το σημείο πάνω στην ΑΜ, που είναι απείρως απομακρυσμένο με την Ευκλείδεια έννοια της γεωμετρίας, θα είναι επίσης ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο πάνω στην υπερβολική ευθεία γραμμή ΑΜ.

Κάθε σημείο της υπερβολικής ευθεία γραμμής ΑΜ, εκτός από τα δυο σημεία που σημειώσαμε παραπάνω, θα έχουν πεπερασμένη υπερβολική απόσταση από το Α, αφού για αρκούντως μεγάλη τιμή του ακεραίου n αυτό ανήκει είτε στο τμήμα AA_n είτε στο τμήμα BB_n. Έτσι η υπερβολική ευθεία ΑΜ, έχει δυο και μόνο δυο απείρως απομακρυσμένα σημεία.

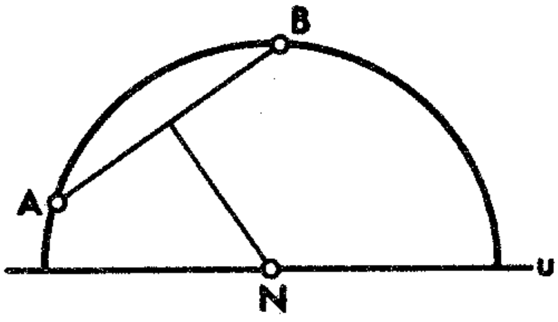
Αν η υπερβολική ευθεία γραμμή αναπαρασταθεί με ένα ημικύκλιο που το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία u, τότε τα σημεία τομής του ημικυκλίου με την u θα είναι τα απείρως απομακρυσμένα σημεία της.

Μια Ευκλείδεια ευθεία γραμμή, ας σημειωθεί ότι έχει μόνο ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο, που είναι το κοινό σημείο της δοσμένης ευθείας και όλων των ευθειών που είναι παράλληλες προς αυτήν.

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι όλα τα αξιώματα του Λομπατσέφσκιας γεωμετρίας ικανοποιούνται στο ημιεπέπεδο τ. Θα περιοριστούμε στην ανάλυση δυο εξ’ αυτών.

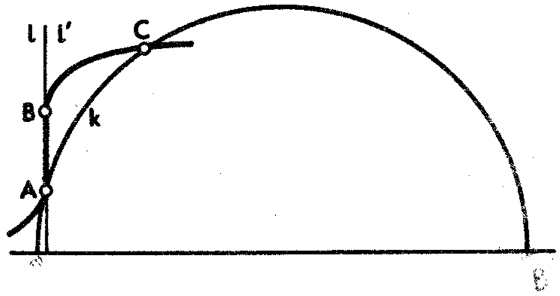
Αξίωμα 1. *Από δυο διαφορετικά σημεία,διέρχεται μια και μόνο μια ευθεία.*

Αν δυο δοσμένα σημεία A και B ανήκουν πάνω στην Ευκλείδεια κάθετη προς την ευθεία u, τότε αυτή η κάθετη είναι η επιθυμητή υπερβολική ευθεία. Διαφορετικά βρίσκουμε πάνω στην ευθεία u ένα σημείο N που να ισαπέχει από τα A και B, και με κέντρο αυτό το σημείο σχεδιάζουμε το Ευκλείδειο ημικύκλιο ακτίνας NA. (σχ.18). Αυτή τότε είναι η επιθυμητή υπερβολική ευθεία.



σχήμα 18

Για να δικαιολογήσουμε ότι δυο διαφορετικές υπερβολικές ευθείες l και l′ δεν μπορούν να διέρχονται από δυο διακριτά σημεία A και B, είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι τα A και B ανήκουν πάνω στην Ευκλείδεια κάθετο l προς την ευθεία u (σχ.19) , αφού όλες οι άλλες περιπτώσεις μπορούν να αναχθούν σ’ αυτήν με κατάλληλες υπερβολικές κινήσεις.



σχήμα 19

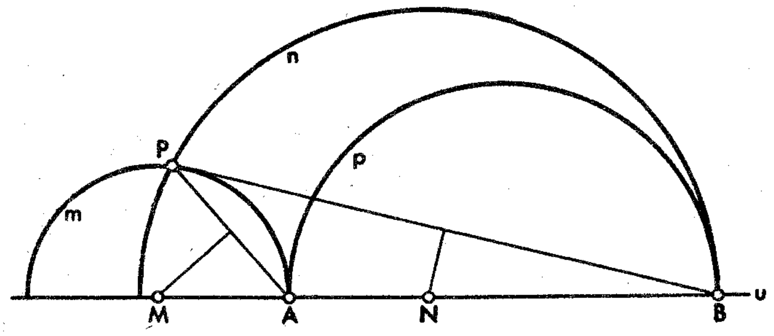
Για έναν τέτοιο σχηματισμό των σημείων A και B η συντομότερη υπερβολική απόσταση μεταξύ τους ,όπως δείξαμε παραπάνω, είναι μόνο κατά μήκος της Ευκλείδειας ευθείας l και συνεπώς οι l , l΄ συμπίπτουν πάνω στο τμήμα AB. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο C ανήκει στην l΄ όχι όμως στην l και ότι το B ανήκει πάνω στην l΄ μεταξύ των A και C. Τότε το τόξο AC του Ευκλειδείου ημικυκλίου κ με κέντρο πάνω στην u είναι μέρος μιας υπερβολικής ευθείας η οποία δεν συμπίπτει με την l΄ πάνω στο τμήμα AC. Όμως αυτό , όπως ήδη έχουμε δείξει είναι αδύνατο. Επομένως η l και η l΄ συμπίπτουν παντού.

Έτσι προκύπτει ότι δεν υπάρχουν άλλες υπερβολικές ευθείες από τις Ευκλείδειες ημιευθείες τις κάθετες προς την u , και τα Ευκλείδεια ημικύκλια με κέντρο πάνω στην u. Μια και μόνο ευθεία διέρχεται από δυο δοσμένα σημεία, και είναι κάποιου από τους δυο προηγούμενους τύπους ευθειών.

Αξίωμα 2. *Δυο υπερβολικές ευθείες μπορούμε να φέρουμε παράλληλες προς μια υπερβολική ευθεία p από ένα σημείο P που δεν ανήκει στην ευθεία p.*

Δυο υπερβολικές ευθείες καλούνται **παράλληλες** αν αυτές έχουν κοινό ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο. Ειδικότερα οι υπερβολικές ευθείες που αναπαρίστανται από Ευκλείδειες κάθετες στην u, είναι παράλληλες. Το κοινό τους σημείο στο άπειρο πάνω στο ημιεπίπεδο τ , ταυτίζεται με το ένα που αυτές μοιράζονται με το Ευκλείδειο επίπεδο ω.

Έστω ότι σημειώνουμε με Α και Β τα απείρως απομακρυσμένα σημεία της υπερβολικής ευθείας p (σχ.20).



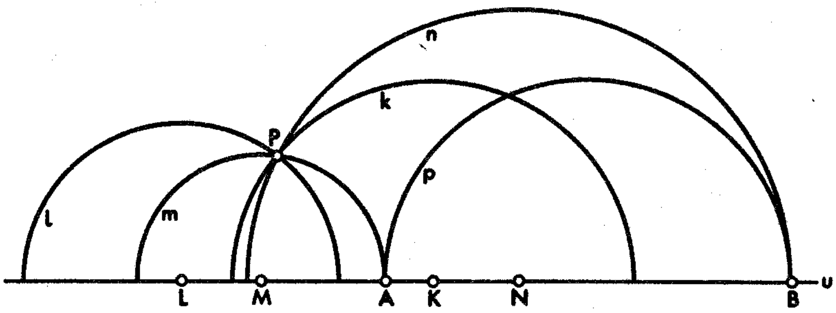
σχήμα 20

Φέρνουμε από το P και το A το Ευκλείδεια ημικύκλιο m με κέντρο M πάνω στην ευθεία u και επίσης από το B και P το Ευκλείδειο ημικύκλιο n με κέντρο N πάνω στην u. Αυτά τα ημικύκλια είναι οι προαναφερόμενες υπερβολικές ευθείες που είναι παράλληλες στην υπερβολική ευθεία p προς τις δυο διαφορετικές διευθύνσεις της, δηλαδή η m στην διεύθυνση από το B προς το A και η n στην διεύθυνση από το A προς το B.

Τρεις τύποι υπερβολικών ευθειών που διέρχονται από το P υπάρχουν: (1) Αυτές που τέμνουν την ευθεία p , (2) οι παράλληλες προς την p, (3) αυτές που ούτε παράλληλες είναι προς την p ούτε τέμνουν την p.

Υπάρχει άπειρο πλήθος ευθειών του πρώτου και τρίτου τύπου , αλλά μόνο δυο ευθείες του δεύτερου τύπου.

Για να κατασκευάσουμε μια υπερβολική ευθεία γραμμή του πρώτου είδους , παίρνουμε ένα αυθαίρετο σημείο K του τμήματος MN και γράφουμε το ημικύκλιο κ με ακτίνα KP και κέντρο K (σχ.21)



σχήμα 21

Αν το ίδιο το κάνουμε για ένα αυθαίρετο σημείο L πάνω στην ευθεία u , έξω από το τμήμα MN αποκτούμε τον τρίτο τύπο υπερβολικής ευθείας. (σχ.21).

Μπορούμε τώρα να ξεκαθαρίσουμε το γεγονός ότι το Αξίωμα 2 είναι ισοδύναμο με το αίτημα των παραλλήλων του Λομπατσέφσκι που τυποποιήθηκε στην παράγραφο 2.

Αν δυο υπερβολικές ευθείες ούτε τέμνονται ούτε είναι παράλληλες θα τις ονομάζουμε **αποκλίνουσες.** Οι ευθείες p ,l (σχ.21) για παράδειγμα, είναι αποκλίνουσες.

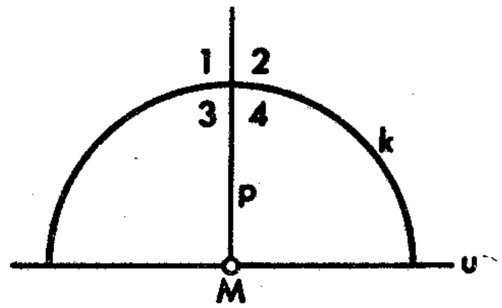
Έτσι στο ημιεπίπεδο τ ,τα αξιώματα και κατά συνέπεια τα θεωρήματα της Λομπατσέφσκιας γεωμετρίας ικανοποιούνται. Επομένως το ημιεπίπεδο τ μαζί με τους κανόνες μέτρησης τμημάτων που εγκαθιδρύσαμε παραπάνω είναι ένα Λομπατσέφσκιο επίπεδο, ή καλύτερα ένας χάρτης του Λομπατσέφσκιου επιπέδου στο Ευκλείδειο επίπεδο.

Είναι διδακτικό να συγκρίνουμε αυτήν την απεικόνιση με αυτήν της επιφάνειας της Γης στην Μερκατοριανή προβολή. Στην περίπτωση αυτή οι μεσημβρινοί προβάλλονται σαν παράλληλες ευθείες κάθετες προς τις προβαλλόμενες ευθείες των γεωγραφικών παραλλήλων. (βλ.σχ.2). Μέγιστους κύκλους συμπεριλαμβανομένων των μεσημβρινών, οφείλουμε να τους θεωρούμε ως «ευθείες γραμμές» πάνω στη σφαίρα. Οι γεωγραφικοί παράλληλοι ,εξαιρουμένου του ισημερινού, δεν είναι «ευθείες», αν και απεικονίζονται σε Ευκλείδειες ευθείες. Ομοίως μεταξύ των Ευκλειδείων ευθειών πάνω στο ημιεπίπεδο τ, οι κάθετες προς την u είναι υπερβολικές ευθείες, ενώ οι παράλληλες προς την u δεν είναι υπερβολικές ευθείες. (αυτό θα συζητηθεί με περισσότερες λεπτομέρειες στην παράγραφο 7).

Επιπλέον το μήκος κάποιου βαθμού του γεωγραφικού παραλλήλου μικραίνει καθώς αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος, αλλά στην Μερκατοριανή προβολή τα τμήματα παραλλήλων 1^0 έχουν σταθερό μήκος ασχέτως του γεωγραφικού πλάτους. Το πρότυπο είναι παρόμοιο και στο ημιεπίπεδο τ (βλ. Αρχή 1) .

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο τ-χάρτης είναι σύμμορφος. Δηλαδή το Ευκλείδειο μέτρο μιας γωνίας πάνω σ' αυτόν τον χάρτη είναι ίσο με την πραγματική τιμή της στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο.

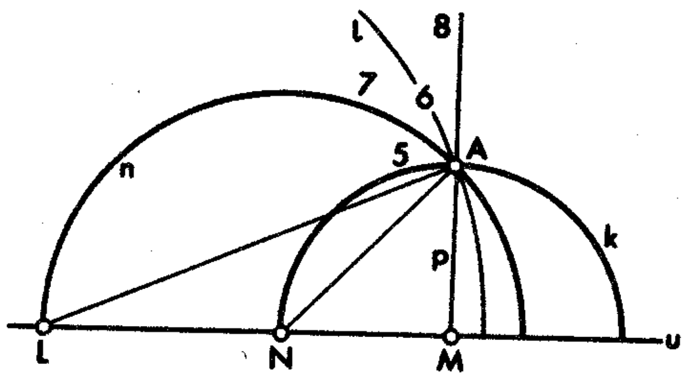
Ας εξηγήσουμε αυτό πρώτα για την ορθή γωνία. Εγγράφουμε ένα ημικύκλιο κ με κέντρο Μ πάνω στην ευθεία u και από το Μ φέρνουμε μια ακτίνα p κάθετη στην u (σχ.22).



σχήμα 22

Τώρα θεωρούμε τις γωνίες 1,2,3,4 που σχηματίζονται από τις υπερβολικές ευθείες κ και p. Υπάρχει υπερβολική κίνηση που μεταφέρει την γωνία 1 στην 2 και την 3 στην 4 (συμμετρία ως προς p) και υπερβολική κίνηση που μεταφέρει την 1 στην 3 και την 2 στην 4 (αντιστροφή ως προς κ). Έτσι στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο (αντίστοιχα στον τ-χάρτη) $\hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\hat{4}$, συνεπώς καθεμιά από τις γωνίες αυτές είναι ορθή.

Δουλεύοντας κάνοντας χρήση το σχ. 22, ας σημειώσουμε το σημείο τομής των ευθειών l, p με A, και ένα εκ των σημείων τομής των ευθειών κ και u με N (σχ.23).



σχήμα 23

Το Ευκλείδειο ημικύκλιο n με κέντρο N και ακτίνα NA θα διαιρεί την γωνία 1 του σχ.22 σε δυο γωνίες 5 και 6, η Ευκλείδεια τιμή των οποίων είναι εύκολο να δούμε ότι είναι ίδια. Η αντιστροφή που αντιστοιχεί στον n μεταφέρει την κ στην p και την p στην κ, κι έτσι οι γωνίες 5 και 6 εναλλάσουν θέσεις. Έτσι συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο οι Ευκλείδειες τιμές των γωνιών 5 και 6 είναι ίσες, αλλά επίσης και οι πραγματικές (υπερβολικές) τιμές τους. Δηλαδή στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο (και πάνω στον τ-χάρτη) καθεμιά είναι ίση με το μισό της ορθής γωνίας.

Ας σημειώσουμε με L το σημείο τομής των γραμμών u και n, που κείται προς το ίδιο μέρος με τα σημεία M , N, και ας γράψουμε τον κύκλο l ακτίνας LA (σχ..23). Ο κύκλος l διαιρεί την γωνία 6 στις γωνίες 7 και 8. Είναι άμεσο να δούμε ότι $\hat{8} = NAL = \frac{\pi}{8}$

Και αφού $\hat{6} = \frac{\pi}{4}$, τότε $\hat{7} = \frac{\pi}{8}$. Έτσι οι Ευκλείδειες τιμές των γωνιών 7 και 8 είναι ίσες. Ταυτόχρονα οι υπερβολικές τιμές τους είναι επίσης ίσες , αφού αυτές οι γωνίες αντιμετατίθενται από την αντιστροφή ως προς l.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι γωνίες με Ευκλείδειες τιμές $\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \ldots$έχουν την ίδια τιμή στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο.

Αφού κάθε γωνία μπορεί να παρασταθεί σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα , ή σαν όριο ενός αθροίσματος απείρως αυξανομένου αριθμού από όρους της μορφής

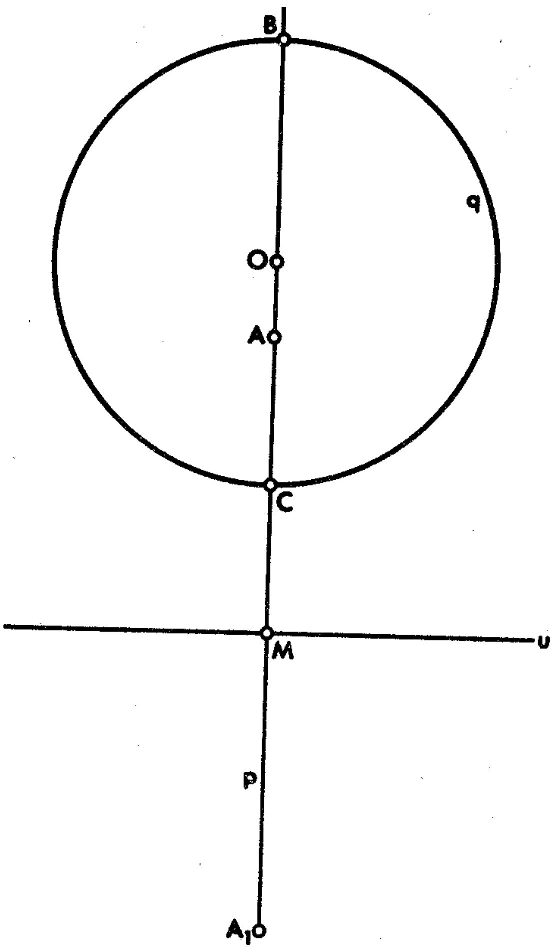
$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \ldots$$

Το σύμμορφο του τ-χάρτη έχει αποδειχτεί.

Παράγραφος 5. Ο κύκλος στο Λομπατσέφσκιο επίπεδο

Θα ορίσουμε πώς ένας κύκλος του Λομπατσέφσκιου επιπέδου μπορεί να αναπαρασταθεί πάνω στον τ-χάρτη.

Από το σημείο M της ευθείας u φέρουμε την Ευκλείδεια ευθεία p κάθετη στην u, και παίρνουμε δυο τυχαία σημεία B και C πάνω σ' αυτήν στο ημιεπίπεδο τ. (σχ.24,,MB>MC).



σχήμα 24

Τώρα σχεδιάζουμε το σημείο A πάνω στην p έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα $\frac{CM}{AM}=\frac{AM}{BM}$ (6)

Από αυτήν την ισότητα συνάγουμε ότι το υπερβολικό μήκος των τμημάτων CA και AB είναι ίδιο. Πράγματι , ο μετασχηματισμός ομοιότητας με κέντρο M και συντελεστή $\frac{CM}{AM}$ μεταφέρει το τμήμα AB στο τμήμα CA[1] .

Σημειώνοντας το Ευκλείδειο μέσο του τμήματος BC με O, γράφουμε τον Ευκλείδειο κύκλο q με κέντρο O και ακτίνα OB και θεωρούμε το σημείο A_1 συμμετρικό του A ως προς την ευθεία u.

Αφού OA=OM-AM, $OA_1=OM+MA_1=OM+AM$ θα έχουμε

[1] BM$\frac{CM}{AM}=BM\frac{AM}{BM}=AM$. Συνεπώς το B μεταφέρεται στο A. $AM\frac{CM}{AM}=CM$ Συνεπώς το A μεταφέρεται στο C.

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2 \quad (7)$$

συνεπώς $OM = \frac{1}{2}(BM + CM)$ και δυνάμει της (6) προκύπτει

$$AM^2 = BM \cdot CM.$$

Έτσι η (7) μπορεί να πάρει την μορφή

$$OA \cdot OA_1 = \tfrac{1}{4}(BM+CM)^2 - BM \cdot CM =$$

$$\tfrac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 4BM \cdot CM) \text{ ή}$$

$$OA \cdot OA_1 = \tfrac{1}{4}(BM-CM)^2 \quad (8)$$

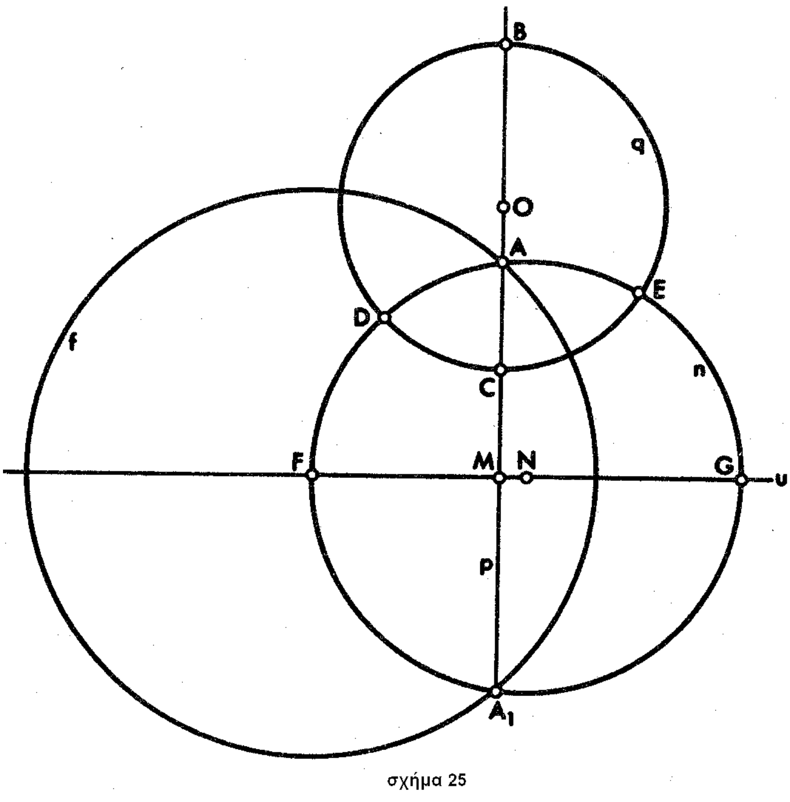
αφού $\frac{1}{2}(BM-CM)=OB$ από την εξίσωση (8) λαμβάνουμε

$$OA \cdot OA_1 = OB^2$$

από την οποία συνάγουμε ότι τα σημεία A και A_1 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο q.

Θα εξηγήσουμε ότι η υπερβολική απόσταση όλων των σημείων της γραμμής q από το σημείο A είναι ίδια.

Φέρνουμε έναν τυχαίο κύκλο n από τα σημεία A και A_1. (σχ.25)



σχήμα 25

Το κέντρο αυτού του κύκλου είναι πάνω στην u και επομένως , το μέρος αυτού που ανήκει στο ημιεπίπεδο τ , είναι μια υπερβολική ευθεία γραμμή.

Έστω ότι οι n, q τέμνονται στα σημεία D και E , και n, u στα σημεία F και G. Γράφουμε τον Ευκλείδειο κύκλο f κέντρου F και ακτίνας FA. Οι κύκλοι q , f είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους αφού ο f διέρχεται από τα σημεία A και A_1 που είναι συμμετρικά ως προς q (βλ. παρ.3). Συνεπώς η αντιστροφή ως προς f μεταφέρει τον κύκλο q στον εαυτό του.

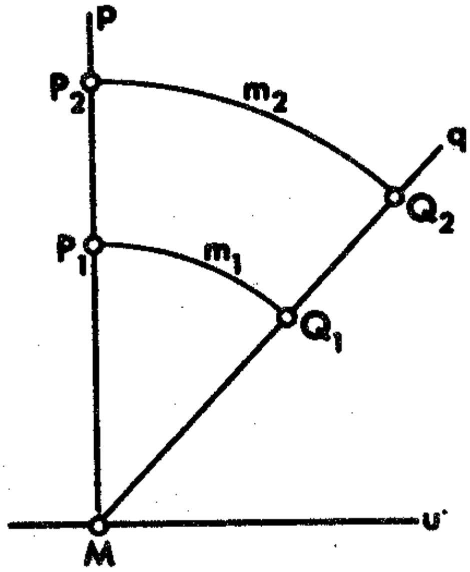
Επιπλέον, η ίδια αντιστροφή μεταφέρει την ευθεία p, η οποία δεν περνάει από τον πόλο αντιστροφής F, σε έναν κύκλο που διέρχεται από το F, καθώς επίσης και από τα σημεία A και A_1 (τα οποία μένουν σταθερά από την αντιστροφή), δηλαδή στον κύκλο n. Από την άλλη μεριά , ο κύκλος n, ο οποίος διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής , μεταφέρεται σε ευθεία γραμμή , δηλαδή στην p, αφού αυτή η ευθεία οφείλει να περνάει από τα σημεία A και A_1.

Έτσι προκύπτει ότι τα τόξα AD και AE του κύκλου n μεταφέρονται στα τμήματα AB και AC ,αντίστοιχα, της ευθείας p. Επομένως τα υπερβολικά μήκη των τμημάτων AD ,AE της υπερβολικής ευθείας n είναι ίσα με τα υπερβολικά μήκη των τμημάτων AB και AC της υπερβολικής ευθείας p. Μ’ άλλα λόγια οι υπερβολικές αποστάσεις των σημείων B,C,D και E από το σημείο A είναι ίσες. Αυτό δείχνει ότι ο υπερβολικός κύκλος προβάλλεται πάνω στον τ-χάρτη ως Ευκλείδειος κύκλος χωρίς κοινά σημεία με την ευθεία u, αλλά η προβολή του κέντρου του A δεν συμπίπτει με το κέντρο O του αντίστοιχου Ευκλείδειου κύκλου.

Συμπερασματικά ας σημειωθεί ότι κάθε υπερβολική ευθεία που διέρχεται από το A τέμνει τον κύκλο q υπό ορθή γωνία , το οποίο είναι το ανάλογο της γνωστής ιδιότητας των διαμέτρων ενός Ευκλείδειου κύκλου.

Παράγραφος 6. Ισαπέχουσα καμπύλη

Έστω p , q είναι μια κάθετη και μια πλάγια ευθεία που τέμνουν την u στο σημείο M και P_1Q_1 και P_2Q_2 τόξα Ευκλειδείων κύκλων με κοινό κέντρο M, ή μ’ άλλα λόγια , τμήματα δυο υπερβολικών ευθειών m_1 και m_2 (σχ.26).



σχήμα 26

Αφού m_1, m_2 τέμνουν την p υπό ορθές γωνίες, τα υπερβολικά μήκη των τόξων P_1Q_1 και P_2Q_2 δίνουν τις υπερβολικές αποστάσεις των Q_1 και Q_2 από την υπερβολική ευθεία p, και αυτές οι αποστάσεις είναι ίσες αφού το τόξο P_1Q_1 μπορεί να μεταφερθεί μέσω του μετασχηματισμού ομοιότητας κέντρου M στο τόξο P_2Q_2.

Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η γραμμή q είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη απόσταση από την υπερβολική ευθεία p. Αυτή η γραμμή (q) καλείται **ισαπέχουσα καμπύλη** , και η υπερβολική ευθεία p καλείται **βάση** αυτής. Μια ισαπέχουσα καμπύλη όπως είδαμε και στην παράγραφο 4 δεν είναι μια υπερβολική ευθεία γραμμή.

Η υπόθεση ότι ο τόπος των σημείων που απέχουν την ίδια απόσταση από δοσμένη ευθεία και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος αυτής της ευθείας , είναι ευθεία γραμμή, αντιφάσκει προς την ιδιότητα της ισαπέχουσας καμπύλης κι έτσι προς το αίτημα παραλλήλων του Λομπατσέφσκι, και είναι ισοδύναμη με το Ευκλείδειο αίτημα παραλλήλων.

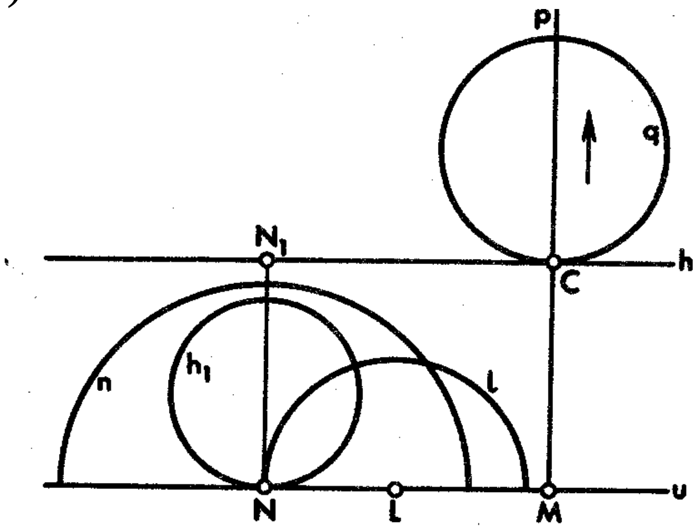
Να σημειωθεί ότι η υπερβολική ευθεία γραμμή η κάθετη προς τη βάση της ισαπέχουσας καμπύλης , τέμνει αυτήν υπό ορθή γωνία όπως γίνεται φανερό από το σχ.26.

Η αντιστροφή που αντιστοιχεί σε κύκλο με κέντρο πάνω στην ευθεία u και διαφορετικό από το M, μεταφέρει την q σε Ευκλείδειο κύκλο, ο οποίος, όπως και η υπερβολική ευθεία, τέμνει την γραμμή u αλλά το κέντρο του δεν είναι πάνω στην u.

Έτσι, μια ισαπέχουσα καμπύλη αναπαρίσταται πάνω στον τ-χάρτη είτε σαν Ευκλείδεια ακτίνα που τέμνει την γραμμή u κατά οξεία ή αμβλεία γωνία, ή σαν τόξο Ευκλείδειου κύκλου που τέμνει την u το κέντρο όμως του οποίου δεν ανήκει στην u. Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει άλλος τύπος ισαπέχουσας καμπύλης.

παράγραφος 7. Ορόκυκλος

Ας σχεδιάσουμε την διάμετρο p του κύκλου q, κάθετη στην γραμμή u, σημειώνοντας το πλησιέστερο σημείο τομής της προς την u με C (σχ.27).



σχήμα 27

Αν κρατήσουμε σταθερό το σημείο C και αυξήσουμε την ακτίνα του κύκλου q απεριόριστα με τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο του να κινείται κατά μήκος της ευθείας p κατά την διεύθυνση που δείχνεται με το διάνυσμα , τότε ο οριακός σχηματισμός q θα μετασχηματίζεται σε μια Ευκλείδεια ευθεία γραμμή h , παράλληλη προς την u.

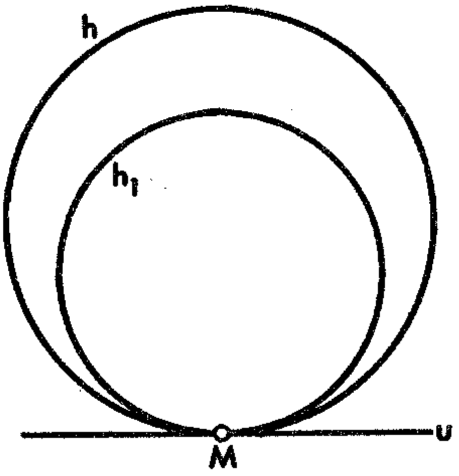
Την γραμμή h η οποία δεν είναι μια υπερβολική ευθεία , την ονομάζουμε **οριακή γραμμή,** ή **ορόκυκλο.** Έτσι η οριακή μορφή ενός κύκλου, ένα σημείο του οποίου και η εφαπτομένη σ' αυτό το σημείο είναι σταθερά και η ακτίνα του αυξάνει απεριόριστα, είναι μια ευθεία στην Ευκλείδεια γεωμετρία ,αλλά ένας ορόκυκλος στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία.

Ας θεωρήσουμε την υπερβολική κίνηση που αναπαρίσταται από αντιστροφή που αντιστοιχεί σε κύκλο n με το κέντρο του N πάνω στην γραμμή u (σχ.27). Αυτή μεταφέρει την γραμμή h στον Ευκλείδειο κύκλο h_1 που διέρχεται από το N και το κέντρο του οποίου είναι πάνω στην κοινή κάθετο NN_1 των Ευκλείδειων ευθειών u και h. Έτσι προκύπτει ότι h_1 είναι εφαπτόμενος στην γραμμή u.

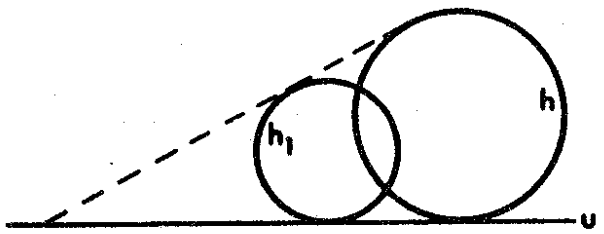
Έτσι, ένας ορόκυκλος αναπαρίσταται στον τ-χάρτη είτε σαν Ευκλείδεια ευθεία παράλληλη στην u, είτε σαν Ευκλείδειος κύκλος εφαπτόμενος στην u.

Έστω ότι σχεδιάζουμε από το N έναν Ευκλείδειο κύκλο l με το κέντρο του L πάνω στην u (σχ.27). Αφού οι ακτίνες των Ευκλείδειων κύκλων h_1,και l είναι κάθετες μεταξύ τους, η υπερβολική ευθεία l τέμνει τον ορόκυκλο h_1 υπό ορθή γωνία. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όλες οι υπερβολικές ευθείες που περνούν από ένα απείρως απομακρυσμένο σημείο πάνω σε έναν οροκύκλο, τον τέμνουν υπό ορθή γωνία.

Κάθε ορόκυκλος h είναι υπερβολικώς ισοδύναμος με κάθε άλλον ορόκυκλο h_1,δηλαδή υπάρχουν υπερβολικές κινήσεις οι οποίες μεταφέρουν τον h στον h_1. Αυτές οι υπερβολικές κινήσεις είναι: (α) μετασχηματισμοί ομοιότητας με κέντρο πάνω στην u, όταν h,h_1 είναι Ευκλείδειες ευθείες παράλληλες στην u, ή Ευκλείδειοι κύκλοι με διαφορετικές ακτίνες που εφάπτονται στην u (σχ. 28 και 29).



σχήμα 28



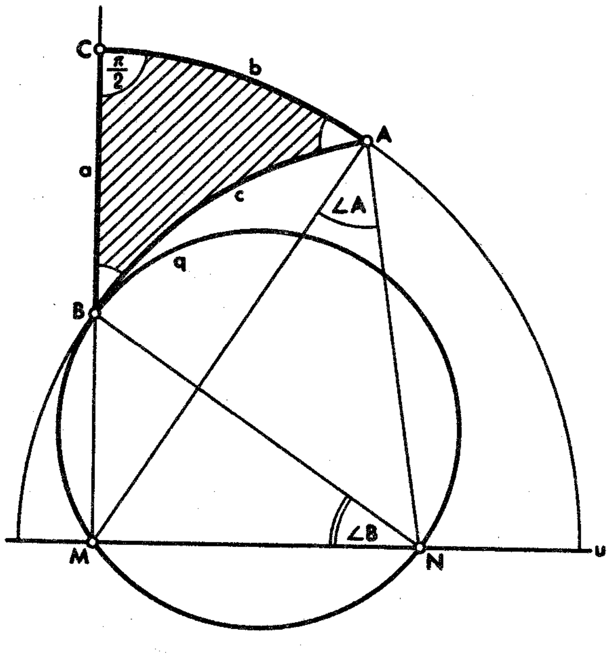
σχήμα 29

(β) Μετακίνηση του ημιεπιπέδου τ κατά μήκος της γραμμής u όταν h, h_1 είναι Ευκλείδειοι κύκλοι με ίσες ακτίνες εφαπτόμενοι της u.
(γ) Αντιστροφή με πόλο πάνω στην u όταν μια από τις καμπύλες h , h_1 είναι Ευκλείδεια ευθεία παράλληλη στην u και η άλλη Ευκλείδειος κύκλος εφαπτόμενος στην u.

παράγραφος 8.
Βασικά θεωρήματα της Γεωμετρίας Λομπατσέφσκι

Θεώρημα 1. *Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο του π.*

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC (σχ.30).



σχήμα 30

Οι πλευρές του a,b,c αναπαρίστανται αντιστοίχως ένα τμήμα μιας Ευκλείδειας καθέτου στην u, ένα τόξο Ευκλείδειου κύκλου με κέντρο M και ένα τόξο Ευκλειδείου κύκλου με κέντρο N. Η γωνία C είναι η ορθή γωνία. Η γωνία A είναι ίση με την γωνία μεταξύ των εφαπτομένων των κύκλων b,c στο σημείο A, ή ισοδύναμα με την γωνία των ακτινών NA και MA αυτών των κύκλων. Και τέλος $\widehat{B} = \widehat{BNM}$.

Έστω ότι σχεδιάζουμε τον Ευκλείδειο κύκλο q με διάμετρο το τμήμα BN. Αυτός ο κύκλος έχει μόνο το σημείο B κοινό με τον κύκλο c, αφού η διάμετρός του είναι ακτίνα του c. Συνεπώς το σημείο A κείται έξω από τον κύκλο που φράσσεται από τον q, οπότε

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{MAN}} < \widehat{\mathrm{MBN}}$$

Έτσι λόγω της σχέσης $\widehat{\mathrm{MBN}} + \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{\pi}{2}$ αποκτούμε τη σχέση

$$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} < \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

και επομένως $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{C} < \pi$. ο.ε.δ.

Να σημειώσουμε ότι κάθε ορθογώνιο τρίγωνο , μπορεί να μεταφερθεί με κατάλληλη υπερβολική κίνηση σε μια θέση όπου η μια εκ των πλευρών του να βρίσκεται πάνω στην Ευκλείδεια κάθετη προς την γραμμή u. Συνεπώς η μέθοδος που ακολουθήθηκε παραπάνω εφαρμόζεται σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.

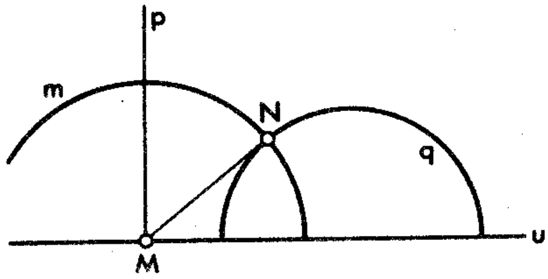
Όταν είναι δοσμένο ένα σκαληνό τρίγωνο, τότε φέρνοντας ένα ύψος του το διαιρούμε σε δυο ορθογώνια τρίγωνα. Το άθροισμα των οξειών γωνιών αυτών των ορθογωνίων τριγώνων είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών του αρχικού σκαληνού τριγώνου. Λόγω αυτού του γεγονότος με βάση την ανίσωση (9) συνάγουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Θεώρημα 2. *Το άθροισμα των γωνιών ενός τετράπλευρου είναι μικρότερο από 2π.*

Είναι αρκετό για την απόδειξη να διαιρέσουμε το τετράπλευρο σε δυο τρίγωνα, φέρνοντας μια διαγώνιο.

Θεώρημα 3. *Δυο αποκλίνουσες ευθείες γραμμές έχουν μια και μόνο μια κοινή κάθετο.*

Έστω ότι η μια από τις δυο αποκλίνουσες ευθείες αναπαρίσταται στον τ-χάρτη με μια Ευκλείδεια κάθετη p προς την u στο σημείο M, και η άλλη με ένα Ευκλείδειο ημικύκλιο q με το κέντρο του πάνω στην u. Έστω επίσης ότι οι p, q δεν έχουν κοινά σημεία (σχ.31).



σχήμα 31

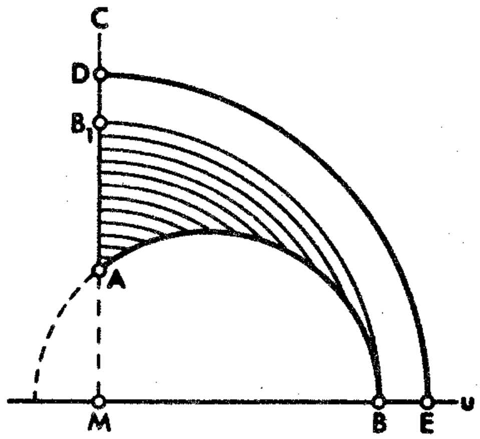
Ένας τέτοιος σχηματισμός δυο αποκλινουσών ευθειών πάνω στον τ-χάρτη είναι πάντοτε κατορθωτός μέσω κατάλληλης υπερβολικής κίνησης.

Φέρνουμε τώρα από το M την Ευκλείδεια εφαπτομένη MN του q και κατασκευάζουμε το Ευκλείδειο ημικύκλιο m με κέντρο M. Είναι φανερό ότι m είναι υπερβολική ευθεία γραμμή που τέμνει αμφότερες τις p, q κατά ορθή γωνία. Επομένως , πάνω στον τ-χάρτη, η m παραστάνει την προαναφερθείσα κοινή κάθετη των δοσμένων αποκλινουσών ευθειών.

Δυο αποκλίνουσες ευθείες δεν μπορεί να έχουν δυο κοινές καθέτους αφού, στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να υπάρχει ένα τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες , το οποίο αντιφάσκει προς το θεώρημα 2.

Θεώρημα 4. *Η ορθή προβολή της μιας πλευράς μιας οξείας γωνίας πάνω στην άλλη πλευρά της είναι ένα τμήμα.* (και όχι μια ακτίνα-ημιευθεία όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία).

Η εγκυρότητα του θεωρήματος αυτού είναι προφανής από το σχ.32, στο οποίο το τμήμα AB_1 είναι η ορθή προβολή της πλευράς AB της οξείας γωνίας BAC πάνω στην πλευρά της AC.

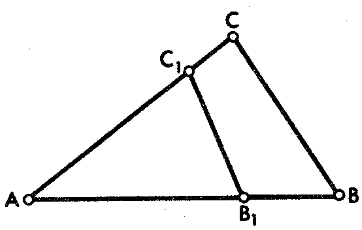


σχήμα 32

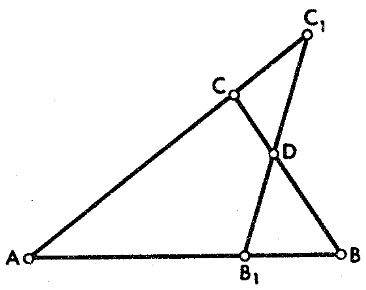
Στο ίδιο σχήμα το τόξο DE του Ευκλείδειου κύκλου με κέντρο το M είναι κάθετο στην υπερβολική ευθεία AC. Αυτή η κάθετη δεν τέμνει την πλάγια γραμμή AB. Επομένως η υπόθεση ότι η κάθετη και πλάγια γραμμή ως προς την ίδια ευθεία πάντοτε τέμνονται, αντιφάσκει προς το Λομπατσέφσκιο αξίωμα των παραλλήλων , και είναι ισοδύναμο προς το Ευκλείδειο αίτημα της παραλληλίας.

Θεώρημα 5. *Αν οι τρεις γωνίες του τριγώνου ABC είναι ίσες αντιστοίχως, προς τις τρεις γωνίες του τριγώνου A΄B΄C΄, τότε αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα.*

Υποθέτουμε ότι το αντίστροφο είναι αληθές και θεωρούμε τα τμήματα AB_1=A΄B΄ , AC_1=A΄C΄ πάνω στις ακτίνες AB και AC αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι τα τρίγωνα AB_1C_1 και A΄B΄C΄ είναι ίσα έχοντας δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες αυτών ίσες. Αφού το σημείο B_1 δεν μπορεί να συμπίπτει με το σημείο B, το σημείο C_1 δεν μπορεί να συμπίπτει με το C, γιατί αλλιώς τα τρίγωνα τα τρίγωνα θα ήταν ίσα , το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεση.



σχήμα 33



σχήμα 34

Θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Το σημείο B_1 είναι ανάμεσα στα A και B και το σημείο C_1 ανάμεσα στα A και C (σχ.33, στο σχήμα αυτό καθώς και στο επόμενο υπερβολικές ευθείες παριστάνονται σαν Ευκλείδειες). Είναι εύκολο να δούμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου BCC_1B_1 είναι 2π, το οποίο είναι αδύνατο βάσει του θεωρήματος 2.

(β) Το σημείο B_1 βρίσκεται ανάμεσα στα A και B, και το σημείο C ανάμεσα στα A και C_1 (σχ.34). Σημειώνουμε την τομή των τμημάτων BC και B_1C_1 με D. Αφού $\widehat{C} = \widehat{C'}$ και $\widehat{C'} = \widehat{C_1}$ προκύπτει ότι $\widehat{C} = \widehat{C_1}$ το οποίο είναι αδύνατο αφού η γωνία C είναι εξωτερική του τριγώνου CC_1D [1].

Οι άλλες δυνατές περιπτώσεις ερμηνεύονται με παρόμοιο τρόπο.

Το θεώρημα έχει αποδειχτεί αφού η υπόθεση που κάναμε παραπάνω οδηγεί σε αντίφαση.

Όπως προκύπτει από το θεώρημα 5, στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία, δεν υπάρχει τρίγωνο όμοιο με ένα δοσμένο τρίγωνο που να μην είναι ίσο μ' αυτό.

παράγραφος 9. Συμπληρωματικά σχόλια

Ένας αριθμός σημαντικών συμπερασμάτων μπορεί να γραφεί θεωρώντας τον τ-χάρτη.

Πρώτον, κάθε θεώρημα της Λομπατσέφσκιας γεωμετρίας ανάγεται πάνω στον τ-χάρτη σε κάποιο θεώρημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Επομένως κάθε αντίφαση στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία πρέπει αναγκαία να οδηγεί σε μια αντίφαση της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Έτσι η Λομπατσέφσκια γεωμετρία είναι συνεπής.

[1] Η απόδειξη του θεωρήματος 'η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη των δυο απέναντι εσωτερικών' δεν εξαρτάται από το αίτημα της παραλληλίας.

Δεύτερον, η εξοικείωση με την Λομπατσέφσκια γεωμετρία μας διευκολύνει αφάνταστα στην διερεύνηση των σφαλμάτων κατά την προσπάθεια απόδειξης του Ευκλειδείου αιτήματος παραλληλίας, τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις δένουν με την υπόθεση μιας πρότασης ισοδύναμης με το αξίωμα αυτό. Μια απόδειξη ότι αυτές οι υποθέσεις αντιφάσκουν με το Λομπατσέφσκιο αίτημα παραλληλίας είναι επαρκής για την ανατροπή αυτού. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε στις τρεις περιπτώσεις που συζητήσαμε παραπάνω (δηλ. στον τόπο των σημείων που ισαπέχουν από μια ευθεία γραμμή, στην τομή της κάθετης και της πλάγιας σε δοσμένη ευθεία, στην ύπαρξη όμοιων αλλά μη ίσων τριγώνων).

Ας θεωρήσουμε άλλο ένα παράδειγμα. Ο μαθηματικός Farkas Bolyai (πατέρας του Janos Bolyai που μνημονεύσαμε παραπάνω), εισηγήθηκε μια απόδειξη του Ευκλειδείου αιτήματος βασισμένη στην υπόθεση ότι ένας κύκλος πάντοτε μπορεί να γραφεί από τρία σημεία που δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία γραμμή. Ο Bolyai το θεώρησε αυτό ως προφανές, όμως αυτό δεν ισχύει στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία αφού ένας κύκλος, ένας ορόκυκλος , ή μια ισαπέχουσα καμπύλη μπορεί να περνάει από τρία μη συνευθειακά σημεία του Λομπατσέφσκιου επιπέδου. Επομένως ο κύκλος δεν μπορεί πάντοτε να σχεδιαστεί από τρία τέτοια σημεία. Έτσι η υπόθεση Bolyai είναι ισοδύναμη με το Ευκλείδειο αίτημα πράγμα το οποίο ακυρώνει την απόδειξή του.

Ο Λομπατσέφσκι δεν έκανε χρήση της μεθόδου κατασκευής ενός χάρτη του υπερβολικού επιπέδου στο έργο του. Αυτή προτάθηκε αρχικά από τον Ιταλό γεωμέτρη Eugenio Beltrami σε μια διατριβή του το 1868, δώδεκα χρόνια μετά το θάνατο του Ρώσου μαθηματικού.

Ο χάρτης του Λομπατσέφσκιου επιπέδου που συζητήσαμε σ’ αυτό το βιβλίο διαφέρει σημαντικά από αυτόν του Beltrami , και εισήχθη από τον Γάλλο επιστήμονα Henri Poincare (1854-1912) .

παράγραφος 10. Περί Φυσικών Λογαρίθμων και Υπερβολικών συναρτήσεων

Το υλικό αυτής που παρουσιάζουμε εδώ θα χρησιμοποιηθεί στις παραγράφους που ακολουθούν.

Πρώτα παράγουμε διάφορες σημαντικές σχέσεις.

Εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n, b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \qquad (10)$$

όπου n είναι θετικός ακέραιος. Προφανώς

$$a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}, b_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \qquad (11)$$

Από την (10) έχουμε

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{a_n}{n} \qquad (12)$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \qquad (13)$$

και $b_n - a_{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

παραγοντοποιώντας το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n(n+1)}[(1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^{n-1}(1+\frac{1}{n+1}) + \ldots \\ &\ldots + (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})^{n-1} + (1+\frac{1}{n+1})^n] \end{aligned} \qquad (14)$$

Τώρα αντικαθιστώντας $1+\frac{1}{n}$ για κάθε συμπαράγοντα $1+\frac{1}{n+1}$ μέσα στις αγκύλες αυξάνουμε την έκφραση (14) η οποία μετά τις απλοποιήσεις δίνει

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n$$

Από αυτήν μέσω της εξίσωσης (12), έχουμε

$$b_n - \alpha_{n+1} < b_n - \alpha_n$$

ή $\alpha_{n++1}>a_n$

Συνεπώς η α_n είναι αύξουσα..

Τώρα αντικαθιστούμε $1+\dfrac{1}{n+1}$ σε κάθε συμπαράγοντα $1+\dfrac{1}{n}$ μέσα στις αγκύλες της εξίσωσης (14) η οποία εξ' αυτού μειώνεται. Μετά τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$b_n-\alpha_{n+1}>\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n+1})^n \qquad (15)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n+1})^n>\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \qquad (16)$$

πράγματι, μετά τις απλοποιήσεις η έκφραση αυτή ανάγεται στην $\dfrac{1}{n}>\dfrac{n+2}{(n+1)^2}\Leftrightarrow (n+1)^2>n(n+2)$ η οποία είναι προφανώς ορθή. Από τις (15),(16), και (13) προκύπτει $b_n-\alpha_{n+1}>b_{n+1}-\alpha_{n+1}$ κι έτσι $b_n>b_{n+1}$ δηλαδή η ακολουθία b_n φθίνει καθώς το n αυξάνει.

Αφού $\alpha_1=2$ και $b_1=4$, συμπεραίνουμε από αυτή την ανάλυση ότι

$$2\le\alpha_n<b_n\le4$$

Από αυτή την ανισότητα και την εξ.(12) προκύπτει ότι

$$b_n-\alpha_n<\frac{4}{n} \qquad (17)$$

Εφόσον καθώς το n αυξάνει, α_n αυξάνει, b_n μειώνεται και η διαφορά $b_n-\alpha_n$ τείνει στο μηδέν, όπως προκύπτει από την (17), οι τιμές των α_n και b_n οφείλουν να τείνουν στο ίδιο όριο το οποίο συνήθως συμβολίζεται με e, και θα είναι $\alpha_n<e<b_n$. Έτσι

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} \qquad (18)$$

και $$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1} \qquad (19)$$

ειδικότερα για n=1 έχουμε $2<e<4$ (20)

Από την εξ.(19) προκύπτει η προσεγγιστική ισότητα

$$(1+\frac{1}{n})^n \approx e \qquad (21)$$

Το σφάλμα αυτής είναι μικρότερο από την διαφορά b_n-α_n και επομένως μικρότερο από $\frac{4}{n}$.

Έστω χ θετικός ρητός που εκφράζεται με γνήσιο κλάσμα, και θεωρούμε ότι ο θετικός ακέραιος παίρνει τέτοια τιμή ώστε nx=k να είναι ακέραιος. Τότε από την σχέση (19) θα έχουμε

$$(1+\frac{x}{k})^k < e^x < (1+\frac{x}{k})^{k+x}$$

Συνεπώς η ακόλουθη προσέγγιση θα ικανοποιείται:

$$(1+\frac{x}{k})^k \approx e^x \qquad (22)$$

με ένα σφάλμα μικρότερο από

$$(1+\frac{x}{k})^{k+x} - (1+\frac{x}{k})^k = (1+\frac{x}{k})^k[(1+\frac{x}{k})^k - 1] < \frac{xe^x}{k} \qquad (23)$$

Επιπλέον, από το τον τύπο του διώνυμου του Νεύτωνα έχουμε

$$(1+\frac{x}{k})^k = 1 + x + \frac{k(k-1)}{2k^2} + \frac{k(k-1)(k-2))}{6k^3}x^3 + \ldots + \frac{1}{k^k}x^k \qquad (24)$$

από την οποία έχουμε την προσεγγιστική σχέση

$$(1+\frac{x}{k})^k \approx 1 + x \qquad (25)$$

σημειώνοντας το σφάλμα της προσέγγισης αυτής με σ , είναι φανερό ότι

$$\sigma = \frac{x^2}{2}[\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{3k^2}x + \ldots + \frac{2}{k^k}x^{k-2}] < \frac{x^2}{2}(1 + x + x^2 + \ldots)$$

κι έτσι σ$<\frac{x^2}{2(1-x)}$ (26)

Από τις (22),(25) και (26) συμπεραίνουμε ότι

$$e^x \approx 1 + x \qquad (27)$$

Το σφάλμα της (27) δεν ξεπερνά το $\dfrac{x^2}{2(1-x)}$, αφού το όριο της έκφρασης $\dfrac{xe^x}{k}$ (βλέπε εξ.23) είναι μηδέν όταν το κ αυξάνει απεριόριστα. Αυτό το σφάλμα μπορούμε να το κάνουμε όσο μικρό επιθυμούμε αν το χ πάρει ικανοποιητικά μικρές τιμές.

Η εξίσωση (27) είναι επίσης έγκυρη στην περίπτωση που ο χ<1 είναι θετικός άρρητος αριθμός όπως μπορούμε να δικαιολογήσουμε θεωρώντας ρητές προσεγγίσεις των τιμών της.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η (27) είναι επίσης έγκυρη για αρνητικές τιμές του χ με απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδας. Το σφάλμα στην περίπτωση αυτή δεν ξεπερνάει την τιμή $\dfrac{x^2}{2\left(1+x\right)}$.

Από τις εξισώσεις (22), (24) μπορούμε να αποκτήσουμε μια ακόμη προσεγγιστική σχέση , ακριβέστερη από την (27). Αφού $k \to \infty$, το όριο του τρίτου όρου στο δεξί μέλος της (24) είναι $\frac{1}{2}x^2$, παίρνουμε

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \qquad (28)$$

Αυτός ο τύπος έχει να κάνει με το ότι, όταν το χ είναι μικρό το χ^3 μπορεί να αγνοηθεί. Δεν θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση του σφάλματος του τύπου (28).

Θεωρούμε τώρα το σύστημα των λογαρίθμων με βάση e, τους αποκαλούμενους **φυσικούς λογαρίθμους** που παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά.

Ο φυσικός λογάριθμος του αριθμού χ σημειώνεται σαν lnx. Δυνάμει των γνωστών ιδιοτήτων των λογαρίθμων είναι ln1=0 και lne=1.

Λαμβάνοντας τον λογάριθμο στα δυο μέλη της (27) αποκτούμε την ακόλουθη προσέγγιση:

$$\ln(1+x) \approx x \qquad (29)$$

η οποία ισχύει όταν χ είναι αρκετά μικρός.

Οι **Υπερβολικές συναρτήσεις,** υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο (που συμβολίζονται με sinh και cosh) ορίζονται μέσω του αριθμού e, ως εξής:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (30)$$

Δυο ακόμη υπερβολικές συναρτήσεις , η υπερβολική εφαπτομένη και η υπερβολική συνεφαπτομένη (που συμβολίζονται μεtanh και coth) ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad (31)$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν διάφορες ιδιότητες παρόμοιες με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι παρακάτω προσεγγιστικοί τύποι προκύπτουν από τις (27),(30) και (31) για ικανοποιητικά μικρές τιμές του χ:

$$\sinh x \approx x, \ \cosh x \approx 1, \ \tanh x \approx x \qquad (32)$$

και από τις (28),(30) και (31)

$$\sinh x \approx x, \ \cosh x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \ \tanh x \approx \frac{2x}{2+x^2} \quad (33)$$

παράγραφος 11. Μέτρηση τμημάτων Υπερβολικών Ευθειών Γραμμών

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πως μπορεί να υπολογιστεί το υπερβολικό μήκος, υπερβολικών ευθυγράμμων τμημάτων.

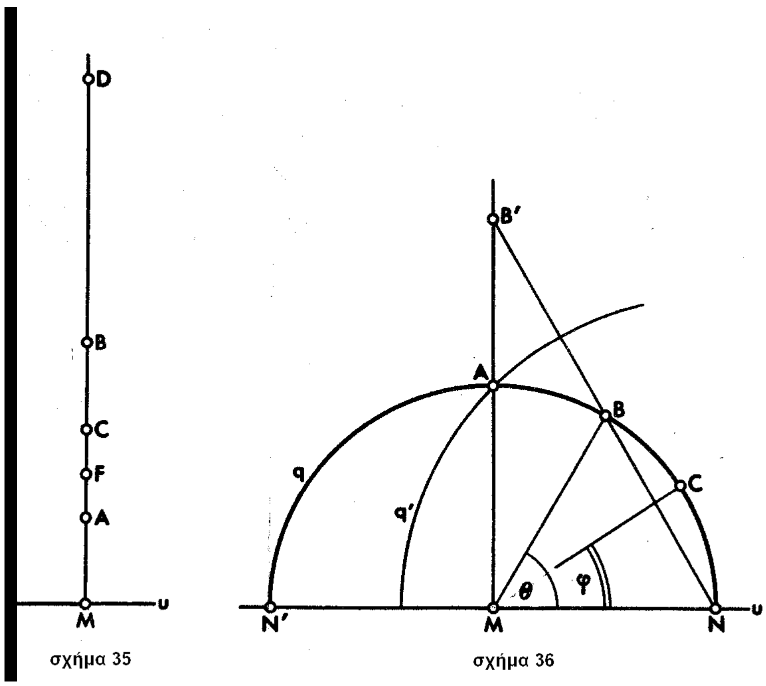
Ας θεωρήσουμε πρώτα μια Ευκλείδεια ακτίνα στο ημιεπίπεδο τ, κάθετη στην γραμμή u στο σημείο της M (σχ.35) και πάνω σ’ αυτήν τα σημεία A, B, C, D έτσι ώστε $\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC}$ ή πράγμα ισοδύναμο

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}$$

Συμβολίζοντας καθεμιά από τις σχέσεις αυτές με μ βλέπουμε ότι η ο μετασχηματισμός ομοιότητας με κέντρο M και συντελεστή μ μεταφέρει το τμήμα CD στο AB. Επομένως τα υπερβολικά μήκη των τμημάτων αυτών είναι ίσα.

Από αυτά προκύπτει ότι το υπερβολικό μήκος του τμήματος AB (το οποίο θα συμβολίζουμε με AB_h) χαρακτηρίζεται από τον λόγο $\frac{MB}{MA}$, ή, μ' άλλα λόγια είναι μια συνάρτηση αυτού του λόγου. Θα δείξουμε ότι ο λογάριθμος μπορεί να επιλεγεί γι' αυτήν την συνάρτηση, δηλαδή ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$AB_h = \log \frac{MB}{MA} \tag{34}$$



Έστω F σημείο του τμήματος AB. Τότε $\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA}\frac{MB}{MF}$.

Παίρνοντας λογαρίθμους σ' αυτήν την σχέση από την (34) έχουμε

$$AB_h = AF_h + FB_h$$

το οποίο αντιστοιχεί στον κανόνα της πρόσθεσης τμημάτων.

Γενικά μιλώντας , για βάση του λογαρίθμου στην σχέση (34) μπορούμε να πάρουμε κάποιον άλλο-τον ίδιο βέβαια για όλα τα τμήματα- (διάφορο της μονάδας) θετικό αριθμό. Ωστόσο για να ταιριάξει ο κανόνας με υποθέσεις που περιέχονται στην παράγραφο 4, περιορίζουμε την επιλογή μας στο φυσικό λογάριθμο και συνεπώς γράφουμε την εξ. (34) στην μορφή

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA} \qquad (35)$$

Πράγματι, όταν το τμήμα AB είναι επαρκώς μικρό συγκρινόμενο με το τμήμα MA, τότε, από τις σχέσεις

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln(1 + \frac{AB}{MA})$$

δυνάμει των εξ. (29) και (35), έχουμε $AB_h \approx \frac{AB}{MA}$ η οποία αντιστοιχεί σε μια αρχή που υποθέσαμε στην παράγραφο 4.

Να σημειώσουμε εν συντομία ότι τα υπερβολικά μήκη των τμημάτων AB και BA, υπολογισμένα μέσω της εξ. (35) , είναι ίσα κατ' απόλυτη τιμή αλλά έχουν αντίθετα πρόσημα. Αυτό εξηγεί το ότι αντιστρέφοντας την κατεύθυνση ενός τμήματος αλλάζει το πρόσημο του υπερβολικού μήκους. Αν η κατεύθυνση ενός τμήματος δεν μας ενδιαφέρει, τότε το δεξί μέλος της εξ. (35) πρέπει να περιέχει την απόλυτη τιμή του λογαρίθμου.

Τώρα θεωρούμε το Ευκλείδειο ημικύκλιο q με κέντρο M πάνω στην γραμμή u το οποίο τέμνει την u στα σημεία N΄ και N, και την Ευκλείδεια κάθετο στο M στο σημείο A. (σχ. 36).

Έστω B σημείο του τόξου AN. Φέρνουμε την Ευκλείδεια ευθεία NB και σημειώνουμε το σημείο τομής της με την MA με B΄. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι τα τμήματα AB και AB΄ των υπερβολικών ευθειών q και MA είναι ίσα. Πράγματι , η αντιστροφή που αντιστοιχεί στον κύκλο q΄ (με ακτίνα NA και κέντρο N) μεταφέρει την q στην Ευκλείδεια ευθεία MA. Έτσι το A μεταφέρεται στον εαυτό του και το σημείο B στο B΄, αφού αμφότερα τα B και B΄ κείνται πάνω στην Ευκλείδεια ευθεία που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής. Συνεπώς

$$AB_h = AB'_h = \ln\frac{MB'}{MA}$$

Σημειώνοντας την γωνία NMB με θ, θα είναι $\widehat{MNB} = 90^0 - \frac{\theta}{2}$

και

$$\frac{\mathrm{MB}'}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MB}'}{\mathrm{MN}} = \tan(90^0 - \frac{\theta}{2}) = \cot\frac{\theta}{2}$$

Έτσι

$$\mathrm{AB}_h = \ln\cot\frac{\theta}{2} \qquad (36)$$

Αν C είναι σημείο του τόξου BN (σχ.36) και $\angle NMC = \varphi$ τότε από την εξ. (36) προκύπτει

$$AC_h = \ln\cot\frac{\varphi}{2},\ \ BC_h = AC_h - AB_h = \ln\cot\frac{\varphi}{2} - \ln\cot\frac{\theta}{2}$$

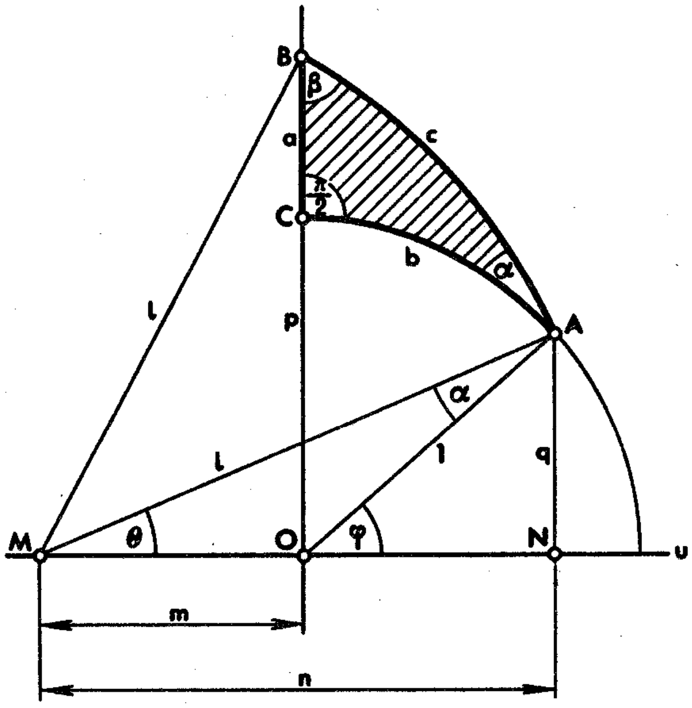
Έτσι

$$BC_h = \ln(\cot\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\theta}{2}) \qquad (37)$$

Έχουμε αποκτήσει λοιπόν τους τύπους για τον υπολογισμό του υπερβολικού μήκους ενός τμήματος, είτε αυτό περιέχεται πάνω σε Ευκλείδεια ακτίνα κάθετη στην u, είτε πάνω σε Ευκλείδειο ημικύκλιο.

Παράγραφος 12. Βασικοί τύποι της υπερβολικής τριγωνομετρίας

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC στο τ-ημιεπίπεδο (σχ.37). Η πλευρά του BC είναι τμήμα της Ευκλείδειας ευθείας OB (OB$\perp$u), η πλευρά CA είναι το τόξο ενός Ευκλειδείου κύκλου με ακτίνα 1 και κέντρο O και η πλευρά AB είναι τόξο Ευκλειδείου κύκλου ακτίνας l και κέντρου M. Η $\angle C$ είναι ορθή, $\angle A = a \ \ \angle B = \beta$.



σχήμα 37

Φέρνουμε από το A την κάθετο AN στην u και εισάγουμε τον συμβολισμό:

OB=p, NA=q, MO=m, MN=n, $\angle NMA=\theta$, $\angle \mathrm{NOM}=\varphi$

Συμβολίζουμε τα υπερβολικά μήκη των πλευρών BC, CA και AB του δοσμένου τριγώνου με α,b και c αντίστοιχα. (τα l,m,n,p,q είναι Ευκλείδεια μήκη).

Ισχύει $\angle OAM = a$, $\angle OMB = \beta$

αφού οι εφαπτόμενες στις πλευρές της γωνίας A στο A είναι κάθετες στις πλευρές της γωνίας OAM, και οι εφαπτόμενες στο B στις πλευρές της γωνίας B είναι κάθετες προς τις πλευρές της γωνίας OMB.

Θα εγκαθιδρύσουμε τώρα ένα πλήθος σχέσεων μεταξύ των παραπάνω ποσοτήτων.

Από τα τρίγωνα OMB και OAM έχουμε

$$p^2 = l^2 - m^2$$

$$1 = l^2 + m^2 - 2mn (= OA^2)$$

Έτσι

$$p^2 - 1 = 2m(n-m),\ \ p^2 + 1 = 2(l^2 - mn) \qquad (38)$$

επιπλέον δυνάμει της εξ. (35),

$$a = \ln\frac{p}{1} = \ln p$$

Συνεπώς

$$e^a = p \quad e^{-a} = \frac{1}{p}$$

$$\sinh a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{1}{2}(p - \frac{1}{p}) = \frac{p^2-1}{2p}$$

$$\cosh a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{1}{2}(p + \frac{1}{p}) = \frac{p^2+1}{2p}$$

Λόγω των παραπάνω η εξ. (38) μας δίνει

$$\sinh a = \frac{m(n-m)}{p} \quad \cosh a = \frac{l^2 - mn}{p} \qquad (39)$$

Από το τρίγωνο OAN έχουμε

$$\sin\varphi = q, \qquad \cos\varphi = n - m \qquad (40)$$

Επομένως

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1+n-m}{q}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-n+m}{q}$$

Όμως από την εξ. (36) $b = \ln\cot\frac{\varphi}{2}$ άρα

$$e^b = \cot\frac{\varphi}{2} = \frac{1+n-m}{q},\ \ e^{-b} = \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-n+m}{q}$$

Έτσι $\sinh b = \frac{n-m}{q},\ \ \cosh b = \frac{1}{q}$ (41)

επιπλέον από τα τρίγωνα OBM και OAN έχουμε

$$\sin\theta = \frac{q}{l},\quad \cos\theta = \frac{n}{l} \qquad (42)$$

$$\sin\beta = \frac{p}{l},\quad \cos\beta = \frac{m}{l} \qquad (43)$$

Άρα

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{l+n}{q},\quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{l-n}{q}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{l-m}{p},\quad \cot\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{l+m}{p}$$

Αφού από την εξ. (37)

$c = (\ln\cot\frac{\theta}{2}\tan\frac{\beta}{2})$ θα έχουμε

$$e^{c} = \cot\frac{\theta}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{(l+n)(l-m)}{pq} = \frac{l^2 + l\cdot n - lm - mn}{pq}$$

$$e^{-c} = \tan\frac{\theta}{2}\cot\frac{\beta}{2} = \frac{(l-n)(l+m)}{pq} = \frac{l^2 - nl - lm - mn}{pq}$$

επομένως

$$\sinh c = \frac{l(n-m)}{pq} \quad \cosh c = \frac{l^2 - mn}{pq}$$

Τέλος από το τρίγωνο ΟΑΜ έχουμε α=φ-θ

Βάζοντας τις εξισώσεις (40) και (42) στο λογαριασμό παίρνουμε:

$$\sin a = \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta = \frac{qn - q(n-m)}{l}$$

$$\cos a = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta = \frac{n(n-m)+q^2}{l} = \frac{n(n-m)+l^2-n^2}{l}$$

αφού $q^2 = l^2 - n^2$. Έτσι

$$\sin a = \frac{qm}{l},\quad \cos a = \frac{l^2 - mn}{l} \qquad (45)$$

Από τις (39),(41), (43), (44) και (45) προκύπτει

$$\tanh a = \frac{m(n-m)}{l^2 - mn},\ \tanh b = n - m,\ \tanh c = \frac{l(n-m)}{l^2 - mn} \quad (46)$$

$$\tan a = \frac{qm}{l^2 - mn},\ \cot a = \frac{l^2 - mn}{qm} \quad (47)$$

$$\tan \beta = \frac{p}{m},\ \cot \beta = \frac{m}{p} \quad (48)$$

Δεν είναι δύσκολο μέσω των εξισώσεων (39),(41), και (43)-(48), να επαληθεύσουμε την εγκυρότητα των παρακάτω τύπων οι οποίοι αποτελούν τους **βασικούς τύπους της υπερβολικής γεωμετρίας**:

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \quad (49)$$
$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin \alpha \quad (50)$$
$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin \beta \quad (51)$$
$$\tanh a = \sinh b \cdot \tan \alpha \quad (52)$$
$$\tanh b = \sinh b \cdot \tan \beta \quad (53)$$
$$\tanh a = \tanh c \cdot \cos \beta \quad (54)$$
$$\tanh b = \tanh c \cdot \cos \alpha \quad (55)$$
$$\cos \alpha = \cosh a \cdot \sin \beta \quad (56)$$
$$\cos \beta = \cosh b \cdot \sin \alpha \quad (57)$$
$$\cosh c = \cot \alpha \cdot \cot \beta \quad (58)$$

Οι εξισώσεις (49)-(58) μπορούν να αναδιατυπωθούν σε ακόμη γενικότερη μορφή αν οι ποσότητες a,b,c μέσα σ’ αυτές αντικατασταθούν με $\frac{a}{r},\frac{b}{r},\frac{c}{r}$ αντιστοίχως, το οποίο είναι ισοδύναμο εναλλαγή της κλίμακας του υπερβολικού μήκους. Το r είναι μια σταθερή κοινή για όλα τα τμήματα.

Είναι τυπικό ότι προσεγγιστικές σχέσεις παρόμοιες με τους τύπους της Ευκλείδειας τριγωνομετρίας , μπορούν να παραχθούν από τις προηγούμενες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός ορθογωνίου τριγώνου, δεδομένων επαρκώς μικρών τιμών των a,b.c.

Για παράδειγμα, από τις (32) και (33) βάσει των (50),(52) και (54) έχουμε:

$$a \approx c\sin\alpha,\ \ a \approx b\tan\alpha,\ \ a \approx c\cos\alpha$$

Από την (49) βρίσκουμε

$$1+\frac{1}{2}c^2 \approx (1+\frac{1}{2}b^2)(1+\frac{1}{2}c^2)$$

κι έτσι προκύπτει

$$\frac{1}{2}c^2 \approx \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{4}a^2b^2$$

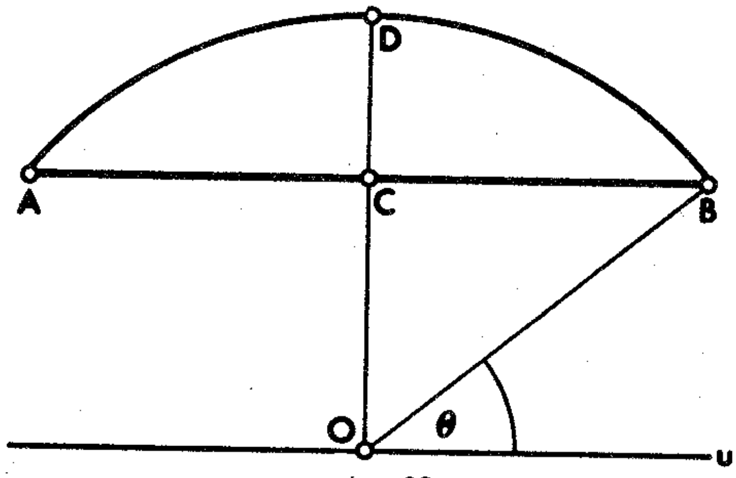
Μετά τις απλοποιήσεις, και αγνοώντας τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος αφού είναι πολύ μικρός, φτάνουμε στην

$$c^2 \approx a^2+b^2$$

Έτσι ο τύπος (49) αντιστοιχεί στο Πυθαγόρειο Θεώρημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

παράγραφος 13. Το μήκος κάποιων επίπεδων καμπύλων στην Λομπατσέφσκια Γεωμετρία

Μήκος του τόξου ενός ορокύκλου. Στο σχ. 38 το τόξο ADB του Ευκλείδειου κύκλου με κέντρο O πάνω στην γραμμή u αναπαριστάνει ένα τμήμα μιας υπερβολικής ευθείας, και το Ευκλείδειο τμήμα AB, παράλληλο στην u, αναπαριστά το τόξο ενός ορόκυκλου το υπερβολικό μήκος των οποίων συμβολίζουμε με 2α και 2s αντίστοιχα.



σχήμα 38

Από την εξ. (36) έχουμε $a=\ln\cot\frac{\theta}{2}$, απ' όπου προκύπτει $\cot\frac{\theta}{2}=e^{a}$. Επιπλέον , η εφαρμογή της αρχής 1^0 (παρ.4) οδηγεί

$$\text{στην}\quad s=\frac{AC}{OC}=\cot\theta=\frac{1}{2}(\cot\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2})=\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})$$

Από τον ορισμό του υπερβολικού ημιτόνου έχουμε

s=sinhα (59)

συνεπώς 2s=2sinhα. Έτσι το μήκος του τόξου του οροκύκλου είναι διπλάσιο του υπερβολικού ημιτόνου του μισού της χορδής που υποτείνει αυτό το τόξο.

Αφού α<s από την (59) βρίσκουμε ότι

α< sinhα (αν α>0) (60)

Μήκος κύκλου. Προκαταρκτικά αποδεικνύουμε δυο βοηθητικές προτάσεις.

(α) Αν α είναι επαρκώς μικρός αριθμός, τότε tanhα<α [1] .

Πράγματι από την εξ .(33) έχουμε

[1] Αναφέρουμε δίχως απόδειξη, ότι αυτή η ανισότητα είναι έγκυρη για κάθε θετική τιμή του α.

$$\tanh a \approx \frac{2a}{2+a^2} < a \qquad (\text{αν } α<0)$$

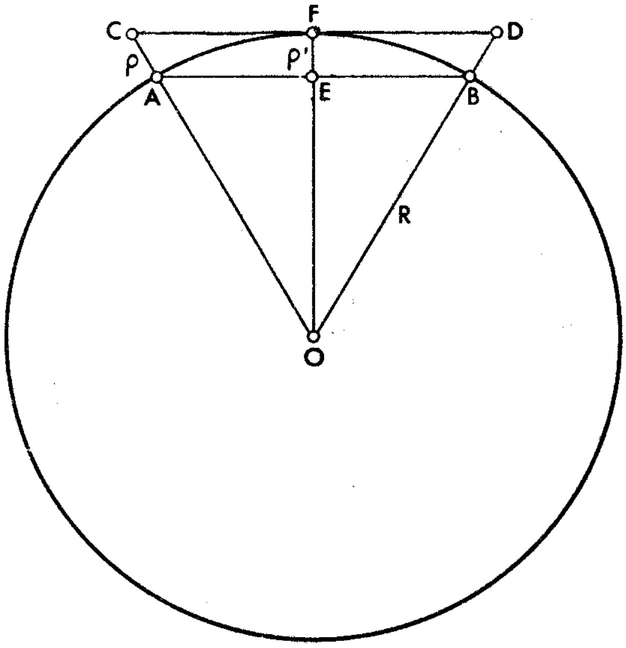
(β) Βάζοντας μέσα στους υπολογισμούς ότι οι περίμετροι των κανονικών n-γώνων που είναι ταυτόχρονα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας 1, τείνουν όταν το n αυξάνει απεριόριστα στο ίδιο όριο που είναι το μήκος αυτού του κύκλου,

βρίσκουμε $$\lim_{n\to\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 2n\tan\frac{\pi}{n} = 2\pi \qquad (61)$$

Ας βρούμε τώρα το μήκος s του υπερβολικού κύκλου ακτίνας R. (όλα τα σύμβολα εδώ αναφέρονται σε υπερβολικά μήκη.) Έστω AB και CD είναι οι πλευρές των κανονικών n-γώνων που είναι εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σ' αυτόν τον κύκλο.[1]

Σημειώνουμε με p και P, τις περιμέτρους αυτών των πολυγώνων και τα μήκη των τμημάτων AC και EF με ρ και ρ΄. (σχ.39: τα υπερβολικά σχήματα αναπαρίστανται σε αυτό ως Ευκλείδεια).

[1] Έστω A σημείο του υπερβολικού κύκλου q με κέντρο O. Κατασκευάζουμε την γωνία $AOM = \frac{\pi}{m}$ όπου m δοσμένος θετικός ακέραιος, και φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο A. Αυτή η εφαπτομένη και η ακτίνα OM μπορεί είτε να τέμνονται σε κάποιο σημείο B, είτε να μην τέμνονται. Στην πρώτη περίπτωση το τμήμα AB θα είναι το μισό της πλευράς του κανονικού m-γώνου που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο q. Στην δεύτερη περίπτωση δεν υπάρχει κανονικό m-γωνο περιγεγραμμένο στον q, αν και ένα κανονικό n- γωνο υπάρχει αν ο ακέραιος n, μεγαλύτερος του m, είναι επαρκώς μεγάλος.



σχήμα 39

Από τι εξ. (52) και (50) για τα ορθογώνια τρίγωνα OAE και OCF, όπου O είναι το κέντρο του δοσμένου κύκλου,

$$\tanh AE = \sinh OE \cdot \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\sinh CF = \sin OC \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$\tanh\frac{p}{2n} = \sinh(R-\rho')\cdot\tan\frac{\pi}{n} \qquad (62)$$

$$\sinh\frac{P}{2n} = \sinh(R+\rho)\cdot\sin\frac{\pi}{n} \qquad (63)$$

Έστω n αρκετά μεγάλος έτσι ώστε $\tanh\frac{p}{2n} < \frac{p}{2n}$. Σύμφωνα με την (60) , $\frac{P}{2n} < \sinh\frac{P}{2n}$, πολλαπλασιάζοντας τις εξ. (62) και (63) όρο προς όρο με 2n , έχουμε

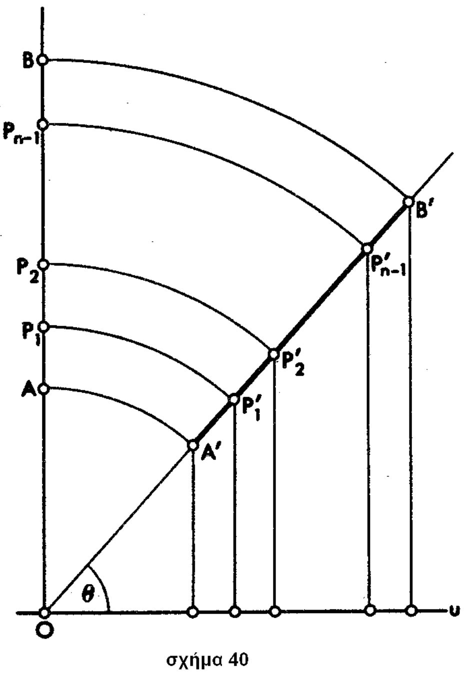
$$\sinh(R-\rho')\cdot 2n\tan\frac{\pi}{n} < p < s < P < \sinh(R+\rho)\cdot 2n\sin\frac{\pi}{n} \qquad (64)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ισότητες (61) και αφού τα ρ, ρ΄ τείνουν στο μηδέν όταν το ν αυξάνει απεριόριστα, προκύπτει ότι ο πρώτος και ο τελευταίος όρος στην σειρά ανισοτήτων (64) τείνει στο ίδιο όριο 2π·sinhR, που συμπίπτει με την ποσότητα s:

$$s=2\pi\sinh R$$

Έτσι το μήκος ενός κύκλου στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία είναι ίσο με το υπερβολικό ημίτονο της ακτίνας του, πολλαπλασιασμένο με 2π.

Μήκος τόξου ισαπέχουσας καμπύλης. Έστω $P_1,P_2,\dots,P_{n-1}$ είναι σημεία που βρίσκονται σε Ευκλείδειες αποστάσεις $y_1,y_2,\dots,y_{n-1}$ από την γραμμή u, τα οποία διαιρούν το τμήμα AB σε n ίσα μέρη (με την Ευκλείδεια έννοια), και ότι το Ευκλείδειο μήκος των τμημάτων OB και AB είναι ίσο με y_n και ζ αντίστοιχα. (σχ. 40, OB⊥u).



σχήμα 40

Θεωρούμε τα τόξα AA΄,$P_1P'_1$, … , BB΄ των Ευκλείδειων κύκλων κοινού κέντρου O, που παριστάνουν τις κάθετες που άγονται από τα σημεία της ισαπέχουσας OB΄ πάνω στην βάση της OB. Το υπερβολικό μήκος h καθεμιάς από τις κάθετες αυτές είναι ορισμένο, σύμφωνα με την εξ. (36), από την σχέση $h=\ln\cot\frac{\theta}{2}$.

Ας συμβολίσουμε το υπερβολικά μήκη του τόξου Α΄Β΄ της δοθείσας ισαπέχουσας ευθείας και του τμήματος ΑΒ της βάσης της με s και α. Αφού οι Ευκλείδειες αποστάσεις των σημείων Ρ΄$_1$,Ρ΄$_2$,…,Β΄ από την u είναι ίσες αντιστοίχως με $y_1\sin\theta$, $y_2\sin\theta$,…,$y_n\sin\theta$, και τα Ευκλείδεια μήκη κάθε κομματιού στα οποία είναι χωρισμένα τα τμήματα ΑΒ και Α΄Β΄, είναι ίσα με $\frac{\zeta}{n}$, τότε δυνάμει των συμπερασμάτων της παρ.4, θα έχουμε

$$a = \lim_{n\to\infty} Z, \quad s = \lim_{n\to\infty} Z' \text{ όπου}$$

$$Z = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}\right)$$

$$Z' = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1 \sin\theta} + \frac{1}{y_2 \sin\theta} + \ldots + \frac{1}{y_n \sin\theta}\right)$$

Έτσι

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Αφού ο λόγων των ποσοτήτων Ζ΄ και Ζ παραμένει σταθερός, ο λόγος των ορίων τους θα έχει την ίδια σταθερή τιμή:

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^h + e^{-h}) = \cosh h$$

Επομένως

$$s = a \cdot \cosh h$$

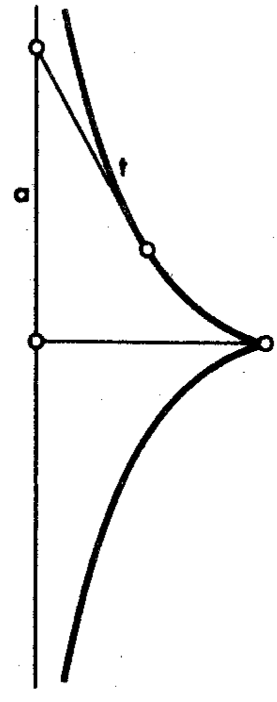
Δηλαδή, το μήκος τόξου μιας ισαπέχουσας καμπύλης είναι ίσο με την ορθή προβολή του τόξου πάνω στη βάση της ισαπέχουσας πολλαπλασιασμένο επί το υπερβολικό συνημίτονο της απόστασης των σημείων της από τη βάση.

Επίλογος

Κλείνοντας αυτό το βιβλιαράκι θα θέλαμε να κάνουμε γνωστές στον αναγνώστη (χωρίς να μπούμε σε αποδείξεις) κάποιες προτάσεις οι οποίες αποδίδουν τον ειδικό χαρακτήρα της Λομπατσέφσκιας γεωμετρίας.

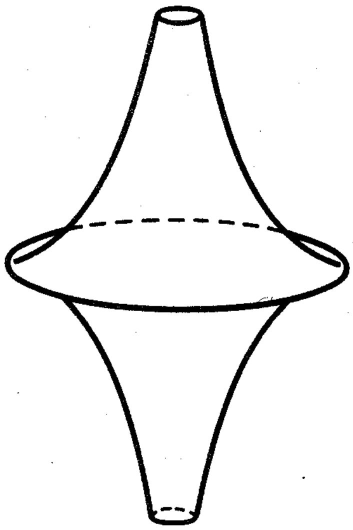
Πρώτα θα περιγράψουμε μια επιφάνεια του Ευκλείδειου χώρου την οποία μνημονεύσαμε μόνο περνώντας από την παρ.2.

Στο σχ. 41 έχουμε ένα Ευκλείδειο επίπεδο στο οποίο υπάρχει μια ευθεία α και η καμπύλη t (**tractix)** με την ιδιότητα ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από την εφαπτομένη της t σε κάποιο σημείο της και την τομή της με την ευθεία α, έχει σταθερό μήκος ανεξάρτητα από την επιλογή του σημείου της t.

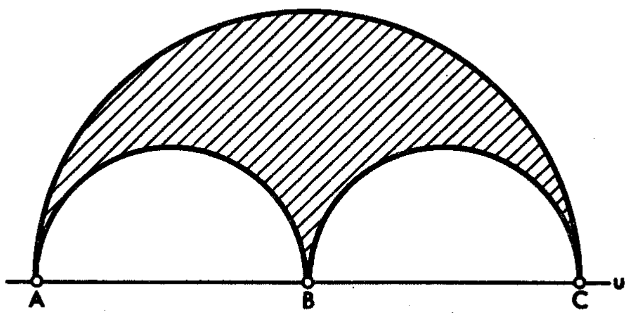


σχήμα 41

Αν η καμπύλη t περιστραφεί γύρω από την ευθεία α, παράγεται μια επιφάνεια γνωστή ως **ψευδοσφαίρα** (σχ. 42).



σχήμα 42



σχήμα 43

Η Ψευδοσφαίρα είναι η επιφάνεια που μελετήθηκε από τον Beltrami, ο οποίος απέδειξε ότι αυτή έχει ιδιότητες που προσιδιάζουν με τα τμήματα του Λομπατσέφσκιου επιπέδου (αν ο συντομότερος δρόμος πάνω στην επιφάνεια θεωρηθεί ως "ευθύς").

Παρόμοια , υπάρχει μια επιφάνεια του Λομπατσέφσκιου χώρου στην οποία (δοσμένης της ίδιας ερμηνείας "ευθεία γραμμή") οι προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας για το επίπεδο ικανοποιούνται. Η επιφάνεια είναι γνωστή ως **οροσφαίρα** και γεννιέται με περιστροφή ενός ορόκυκλου γύρω από έναν άξονά του.

Ας συγκεντρώσουμε τώρα κάποιες από τις απλούστερες προτάσεις που είναι χαρακτηριστικές της Λομπατσέφσκιας γεωμετρίας.

1. Δυο παράλληλες ευθείες προσεγγίζουν η μια την άλλη κατά την διεύθυνση της παραλληλίας τους. (Δηλαδή η απόσταση μεταξύ ενός σημείου πάνω στην μια απ' αυτές και πάνω στην άλλη μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή) και αποκλίνουν δίχως όρια στην αντίθετη κατεύθυνση.
2. Έστω ότι η ευθεία γραμμή c τέμνει δυο αποκλίνουσες ευθείες α και b στα σημεία A και B. Το μήκος του τμήματος AB θα είναι ελάχιστο όταν η c συμπίπτει με την κοινή κάθετη στις δοσμένες αποκλίνουσες ευθείες (οι α και b αποκλίνουν δίχως όρια και προς τις δυο πλευρές της κοινής καθέτου τους).
3. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ABC είναι $r^2\left(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}\right)$ όπου οι γωνίες είναι μετρημένες σε ακτίνια και r είναι η σταθερή που μνημονεύσαμε στην παρ.12 κοινή για όλα τα τρίγωνα. Τα τρίγωνα στα οποία και οι τρεις γωνίες τους είναι μηδενικές έχουν το μέγιστο εμβαδόν πr^2 (ένα τέτοιο τρίγωνο φαίνεται στο σχ. 43).
4. Μια γωνία εγγεγραμμένη σε κύκλο δεν είναι πάντοτε ίση με το μισό του αντίστοιχου τόξου της. Ειδικότερα μια γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι πάντοτε οξεία. (και όχι ορθή όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία).
5. Δοθέντος τυχαίου ακεραίου n, n>6, μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο τέτοιον ώστε η πλευρά του κανονικού n-γώνου που εγγράφεται σ' αυτόν να είναι ίση με την ακτίνα του. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.
6. Σε κάποιες περιπτώσεις η Λομπατσέφσκια γεωμετρία δίνει την δυνατότητα να τετραγωνίσουμε τον κύκλο, δηλαδή να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας μόνα χάρακα και διαβήτη,

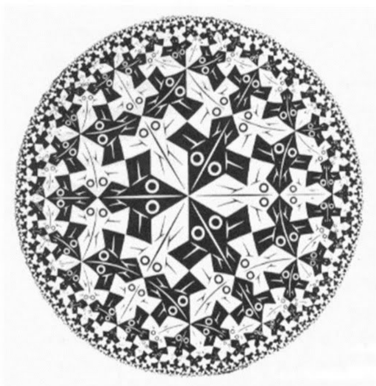
ένα τετράγωνο ισοδύναμο του κύκλου. (ακριβέστερα, έναν ισογώνιο ρόμβο, αφού στην υπερβολική γεωμετρία δεν μπορεί να υπάρχει τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες). Στην Ευκλείδεια γεωμετρία φυσικά ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος.

Τα παραδείγματα που δώσαμε παραπάνω δείχνουν πόσο μεγάλες σε κάποιες περιπτώσεις είναι οι διαφορές των δυο γεωμετριών.

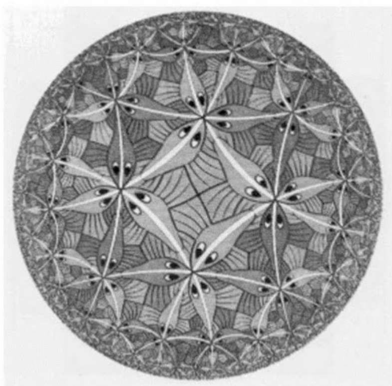
* * *

Έχουμε ιχνηλατήσει μόνο λίγα ορόσημα πάνω στο δρόμο που οδηγεί βαθύτερα στην υπερβολική γεωμετρία. Θα είμαστε ευτυχείς αν ο αναγνώστης που έχει εισαχθεί στις αρχές αυτής της αξιοθαύμαστης επιστήμης με την δική μας παρουσίαση, επαυξήσει το ενδιαφέρον του γι’ αυτήν, και θελήσει να μελετήσει επιπλέον κάποιες ειδικότερες πραγματείες που την αφορούν, συμπεριλαμβανομένου και του έργου του ιδρυτή της **N. I. Lobachevsky**.

Ο συγγραφέας, ο εκλιπών, Alexander Smogorzhevsky, D.Sc. ήταν καθηγητής μαθηματικών στο Πολυτεχνικό Ινστιτούτο του Κιέβου και ένας σπεσιαλίστας στην Λομπατσέφσκια γεωμετρία. Άρχισε την καριέρα του σαν σχολικός καθηγητής στην Vinnitsa Region της Ουκρανίας και αργότερα δίδαξε στο Πολυτεχνικό Ινστιτούτο του Κιέβου για σχεδόν σαράντα χρόνια. Δημοσίευσε πάνω από εκατό εργασίες άλλες ερευνητικές, κι άλλες εκλαϊκευτικού χαρακτήρα, πολλές από τις οποίες είναι αφιερωμένες στην μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, όπως: The Theory of Geometrical constructions in Lobachevkian Space, On some plane curves in Lobachevkian geometry, Lobachevky's basic ideas.

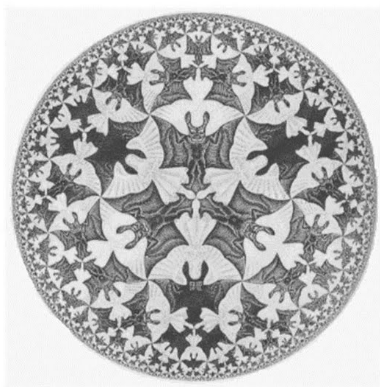


Circle limit I



Circle limit III

Circle limit II



Circle limit IV