Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Ακολουθία Fibonacci

(Ακολουθία Fibonacci)

Έστω η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ και
$\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu \quad \forall\ \nu\geq 1,\ \nu\in\mathbb{N}$.

Να δειχτεί ότι: $\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^\nu-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^\nu\right] \quad \forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$

απόδειξη

I. Για $\nu=1$ έχουμε

επαλήθευση $\quad \alpha_1=\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}\right]=1$ αληθής.

II. Το βήμα της επαγωγής

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από τον ν. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον ν.

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας λοιπόν θα έχουμε:

$$\alpha_{\nu-2}=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}-\lambda_2^{\nu-2}\right],\quad \alpha_{\nu-1}=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-1}-\lambda_2^{\nu-1}\right]$$

όπου $\lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$

Όμως $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2} \Rightarrow$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}-\lambda_2^{\nu-2}+\lambda_1^{\nu-1}-\lambda_1^{\nu-2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}(1+\lambda_1)-\lambda_2^{\nu-2}(1+\lambda_2)\right] \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}\cdot\lambda_1^2-\lambda_2^{\nu-2}\cdot\lambda_2^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^\nu-\lambda_2^\nu\right] \quad \text{αφού} \quad \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt5+5}{4}=\frac{3+\sqrt5}{2}=1+\lambda_1$$

$$\text{και} \quad \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2=1+\lambda_2.$$

Δηλαδή με την προϋπόθεση ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους φυσικούς που είναι μικρότεροι του ν, δείξαμε ότι είναι επίσης αληθής για τον αριθμό ν.

III. Συμπέρασμα

Άρα σύμφωνα με την δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής ο ισχυρισμός θα είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\nu\in\mathbb{N}^*$.