ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Θεώρημα Steiner

(Θεώρημα Steiner).

ν συνεπίπεδες ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε $\frac{\nu^2+\nu+2}{2}$ το πολύ μέρη.

απόδειξη

Αν $\tau(\nu)$ είναι το μέγιστο πλήθος των τμημάτων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από ν ευθείες, παρατηρούμε ότι: $\tau(2)=4$, $\tau(3)=7$, $\tau(4)=11$
(Προφανώς για να έχουμε μέγιστο πλήθος τμημάτων, θα πρέπει, οι ευθείες να μην συντρέχουν και να μην είναι παράλληλες).
Είναι $\tau(2)=\tau(1)+2$, $\tau(3)=\tau(2)+3$, $\tau(4)=\tau(3)+4$. Θα δείξουμε ότι $\tau(\nu)=\tau(\nu-1)+\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

I. Αν $\nu=1$, $\tau(1)=2=\tau(0)+1$

II. Έστω ότι για τον φυσικό αριθμό ν ισχύει $\tau(\nu)=\tau(\nu-1)+\nu$.
Τότε $\tau(\nu+1)=\tau(\nu)+(\nu+1)$. Πράγματι
η $(\nu+1)$ ευθεία τέμνεται από τις ν ευθείες σε ν σημεία που τη διαιρούν σε $\nu+1$ μέρη. Καθένα από αυτά τα μέρη ανήκει σε ένα από τα $\tau(\nu)$ μέρη που οι ν ευθείες χωρίζουν το επίπεδο, και το διαιρεί σε δυο μέρη.
Άρα $\tau(\nu+1)=\tau(\nu)+\nu+1$.

III Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της τέλειας επαγωγής θα ισχύει
$$\tau(\nu)=\tau(\nu-1)+\nu \quad \forall\, \nu\in\mathbb{N}^*$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:
$$\begin{aligned}\tau(2)&=\tau(1)+2\\ \tau(3)&=\tau(2)+3\\ &\vdots\\ \tau(\nu)&=\tau(\nu-1)+\nu\end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
$$\tau(\nu)=\tau(1)+2+3+\cdots+\nu=2+(2+3+\cdots+\nu)=2+\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2}$$

άρα $\tau(\nu)=\frac{\nu^2+\nu+2}{2}$.