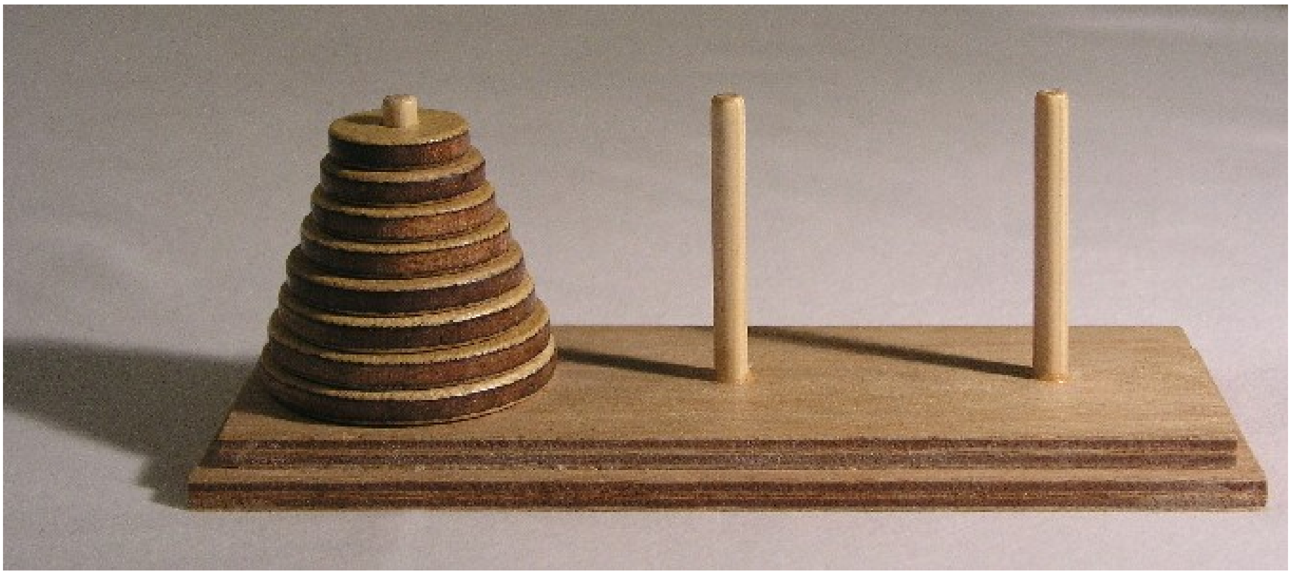
ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

ΟΙ ΠΥΡΓΟΙ ΤΟΥ HANOI



Το πρόβλημα

Να μεταφερθεί ο Πύργος από τη θέση που βρίσκεται σε μια από τις άλλες δυο θέσεις, χρησιμοποιώντας την τρίτη θέση σαν βοηθητική, και μετακινώντας κάθε φορά μόνο ένα δίσκο, αλλά με τον περιορισμό πως δεν μπορεί να τοποθετηθεί ένας μεγαλύτερος δίσκος πάνω σ' ένα μικρότερο.

Να αποδειχτεί ότι για την μεταφορά πύργου με ν δίσκους, απαιτούνται 2^{ν}-1 τουλάχιστον κινήσεις

Παίξτε το παιχνίδι επιλέγοντας έναν από τους παρακάτω συνδέσμους:

http://www.thelo.gr/on_line_games/hanoi/tower_of_hanoi.asp

http://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html

http://38gym-athin.att.sch.gr/pages/hanoi.htm

Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Ιστορική παρένθεση

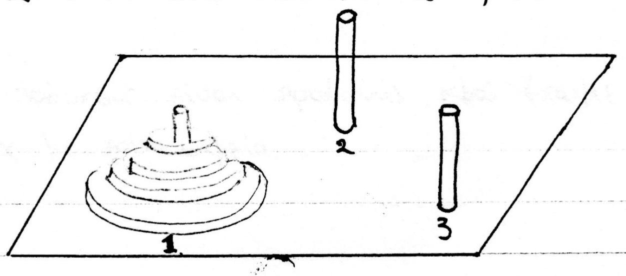
(από την ιστοσελίδα http://3gym-serron.ser.sch.gr/OLDSITE/Anoi.htm)

Το παιχνίδι ονομάσθηκε « Πύργος του Ανόι » από το σχήμα του πύργου που θυμίζει την αρχιτεκτονική των ναών στις χώρες της Άπω ανατολής.
Το παιχνίδι πρωτοεμφανίστηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Έντουαρτ Λούκας γύρω στα 1883 με προέλευση μάλλον από τις Ινδίες.
Υπάρχει για το παιχνίδι ο παρακάτω θρύλος με τίτλο « Πύργος του Βράχμα »
«Όταν ο Βράχμα δημιούργησε τον κόσμο, έστησε σένα ναό στην πόλη Μπενάρες, 64 δακτυλίδια άνισου μεγέθους όλα περασμένα σένα μπαστούνι έτσι ώστε αν κρατήσουμε το μπαστούνι κατακόρυφα να σχηματίζουν τον γνωστό μας πύργο
Οι ιερείς του ναού έπρεπε να δουλεύουν μέρα νύχτα, χωρίς σταμάτημα, για να μεταφέρουν τα δακτυλίδια σένα άλλο μπαστούνι, χρησιμοποιώντας ένα τρίτο σαν βοηθητικό, έτσι ώστε να μην τοποθετήσουν μεγαλύτερο δακτυλίδι πάνω από μικρότερο και μετακινώντας ένα μόνο δακτυλίδι σε κάθε κίνηση.
Ο θρύλος λεει πως πριν προλάβουν οι ιερείς να μεταφέρουν όλα τα δακτυλίδια στο άλλο μπαστούνι, ο ναός θα καταρρεύσει μέσα στην σκόνη και ο κόσμος θα χαθεί μέσα σε τρομακτικό κρότο βροντής».

ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Η λύση του προβλήματος

Έστω τρεις πάσσαλοι, και ν ομόκεντροι κρίκοι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο κατά φθίνουσα διάμετρο, περασμένοι μέσα σε ένα πάσσαλο. Ένας κρίκος επιτρέπεται, από την κορυφή της στοίβας να περάσει σε άλλο πάσσαλο υπό τον όρο να μην τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερο κρίκο.
Αποδείξτε ότι η όλη στοίβα των ν κρίκων μπορεί να μετακινηθεί στον 3^o πάσσαλο με $2^\nu-1$ κινήσεις και όχι λιγότερες.



I. επαλήθευση

Αν $\nu=1$ είναι φανερό ότι με μια ακριβώς κίνηση μπορούμε να μεταφέρουμε τον κρίκο από τον 1^o στον 3^o πάσσαλο. και $2^1-1=1$.

II. το βήμα της επαγωγής

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για ν κρίκους, όπου $\nu>1$.
Τότε θα δείξουμε ότι ισχύει και για τους $\nu+1$ κρίκους.
Ας είναι $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu, \kappa_{\nu+1}$ οι κρίκοι στον 1^o πάσσαλο κατά σειρά αύξοντος μεγέθους.
Μεταφέρουμε τους $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu$ από τον 1^o στο 2^o πάσσαλο με $2^\nu-1$ κινήσεις. Τον $\kappa_{\nu+1}$ τον μεταφέρουμε στον 3^o πάσσαλο και στη συνέχεια μεταφέρουμε τους $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu$ από τον 2^o στον 3^o πάσσαλο με $2^\nu-1$ κινήσεις.
Συνολικά έχουμε κάνει $2^\nu-1+1+2^\nu-1=2^{\nu+1}-1$ κινήσεις
Δηλ. αν ο ισχυρισμός αληθεύει για ν κρίκους, θα αληθεύει και για $\nu+1$ κρίκους.

III. Συμπέρασμα

Σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής ο ισχυρισμός θα είναι αληθής για κάθε πλήθος κρίκων $\nu \geq 1$.