

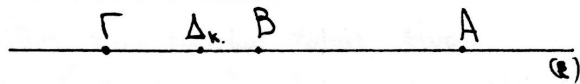


Θεώρημα Helly στην ευθεία

(Θεώρημα Helly): Πάνω σε μια ευθεία θεωρούμε n ($n \geq 2$) ευθ. τμήματα που ανά δυο έχουν κοινό σημείο.

Τότε και τα n τμήματα έχουν κοινό σημείο.

απόδειξη



I. Για $n=2$ η πρόταση είναι προφανής, και έχουμε επαλήθευση δυο ευθ. τμήματα με κοινό σημείο.

II. Έστω ότι ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει για τον το βήμα της επαγωγής φυσικό αριθμό n . Τότε θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $n+1$.

Θεωρούμε λοιπόν $n+1$ ευθ. τμήματα, πάνω στην ευθεία ϵ τα οποία έχουν ανά δυο κοινό σημείο.

Ας είναι $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$ τα ευθ. τμήματα, A το κοινό σημείο των T_1, T_2, \dots, T_n , και B, Γ τα άκρα του ευθ. τμήματος T_{n+1} . Αν το A ανήκει στο T_{n+1} τότε η πρόταση ισχύει. Έστω λοιπόν ότι A δεν ανήκει στο T_{n+1} . Σύμφωνα με την υπόθεση το T_{n+1} έχει κοινό σημείο με καθενα από τα T_i , $i=1, 2, \dots, n$. Ας είναι Δ_i αυτό το κοινό σημείο σε κάθε περίπτωση, και Δ_k το αριστερότερο απ'όλα.

Τότε στο τμήμα $A\Delta_k$ περιέχεται το σημείο B το οποίο είναι κοινό για όλα τα T_1, T_2, \dots, T_{n+1} .

III. Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης επαγωγής, η παραπάνω συλλογή είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.