ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

(Δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής)

Έστω ότι ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ ισχύει για $\nu=0$. Υποθέτουμε ότι από την ισχύ της $P(\kappa)$ για όλα τα $\kappa<\nu$ προκύπτει η ισχύς της $P(\nu)$. Τότε η $P(\nu)$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

απόδειξη.

Ας είναι M το σύνολο των φυσικών για τους οποίους δεν ισχύει η $P(\nu)$. Θα δείξουμε ότι $M=\emptyset$.

Έστω $M\neq\emptyset$. Αφού $M\subset\mathbb{N}$ και $M\neq\emptyset$ θα υπάρχει κάποιο ελάχιστο στοιχείο στο M, έστω το μ_0.

Είναι $\mu_0>0$ διότι $0\notin M$

Για $\mu<\mu_0$ η $P(\mu)$ είναι αληθής (από τον ορισμό του μ_0)

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, προκύπτει ότι $P(\mu_0)$ αληθής, άτοπο αφού $\mu_0\in M$.

Συνεπώς $M=\emptyset$ δηλαδή η $P(\nu)$ είναι αληθής για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

ΓΥΜΝΑΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ
Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

(Ακολουθία Fibonacci)

Έστω η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ και

$\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu \quad \forall\ \nu\geq 1,\ \nu\in\mathbb{N}$.

Να δειχτεί ότι: $\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^\nu-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^\nu\right] \quad \forall\ \nu\in\mathbb{N}^*$

απόδειξη

I. Για $\nu=1$ έχουμε

επαλήθευση $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}\right]=1$ αληθής.

II. Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από τον ν. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον ν.

Το βήμα της επαγωγής

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας λοιπόν θα έχουμε:

$$\alpha_{\nu-2}=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}-\lambda_2^{\nu-2}\right],\quad \alpha_{\nu-1}=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-1}-\lambda_2^{\nu-1}\right]$$

όπου $\lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$

Όμως $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2} \Rightarrow$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}-\lambda_2^{\nu-2}+\lambda_1^{\nu-1}-\lambda_1^{\nu-2}\right]\iff$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}(1+\lambda_1)-\lambda_2^{\nu-2}(1+\lambda_2)\right]\iff$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^{\nu-2}\cdot\lambda_1^2-\lambda_2^{\nu-2}\cdot\lambda_2^2\right]\iff$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{\sqrt5}\left[\lambda_1^\nu-\lambda_2^\nu\right]$$ αφού $\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt5+5}{4}=\frac{3+\sqrt5}{2}=1+\lambda_1$

και $\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2=1+\lambda_2$.

Δηλαδή με την προϋπόθεση ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους φυσικούς που είναι μικρότεροι του ν, δείξαμε ότι είναι επίσης αληθής για τον αριθμό ν.

III. Συμπέρασμα: Άρα σύμφωνα με την δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής ο ισχυρισμός θα είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\nu\in\mathbb{N}^*$.