Κασαπίδης Γεώργιος – Μαθηματικός
geokasap@sch.gr

Έστω $A \subset \mathbb{N}$ ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες:

- $1 \in A$
- $\nu \in A \Rightarrow \nu+1 \in A$

Δείξτε ότι $A = \mathbb{N}^*$

απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $\nu \in A$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Προφανώς $1 \in A$.
Έστω $\nu \in A$ τότε και $\nu+1 \in A$ από τον ορισμό του A.
Άρα σύμφωνα με την αρχή της τέλειας επαγωγής θα ισχύει $\nu \in A$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ δηλ. $\mathbb{N}^* \subseteq A$, και αφού $A \subseteq \mathbb{N}^*$ θα έχουμε τελικά $A = \mathbb{N}^*$.

(Αρχή της καλής διάταξης) Αν A μη κενό υποσύνολο, του συνόλου των φυσικών αριθμών, να δειχτεί ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ με $A \neq \emptyset$, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θα δείξουμε ότι

$$\forall \alpha \in A \Rightarrow \alpha \geq \nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Για $\nu = 0$ προφανώς $\alpha \geq 0$ αφού $\alpha \in \mathbb{N}$
Έστω ότι για το $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha \geq \nu$ $\forall \alpha \in A$.
Τότε $\nu \notin A$, διαφορετικά το ν θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του A. Επομένως $\alpha \geq \nu+1$ και έτσι σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $\forall \alpha \in A$, $\alpha \geq \nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$
Ειδικά όταν $\nu = \alpha+1$ έχουμε $\alpha \geq \alpha+1$ άτοπο.

* Μπορεί να αποδειχτεί ότι το αξίωμα της επαγωγής, είναι ισοδύναμο με την αρχή της καλής διάταξης.