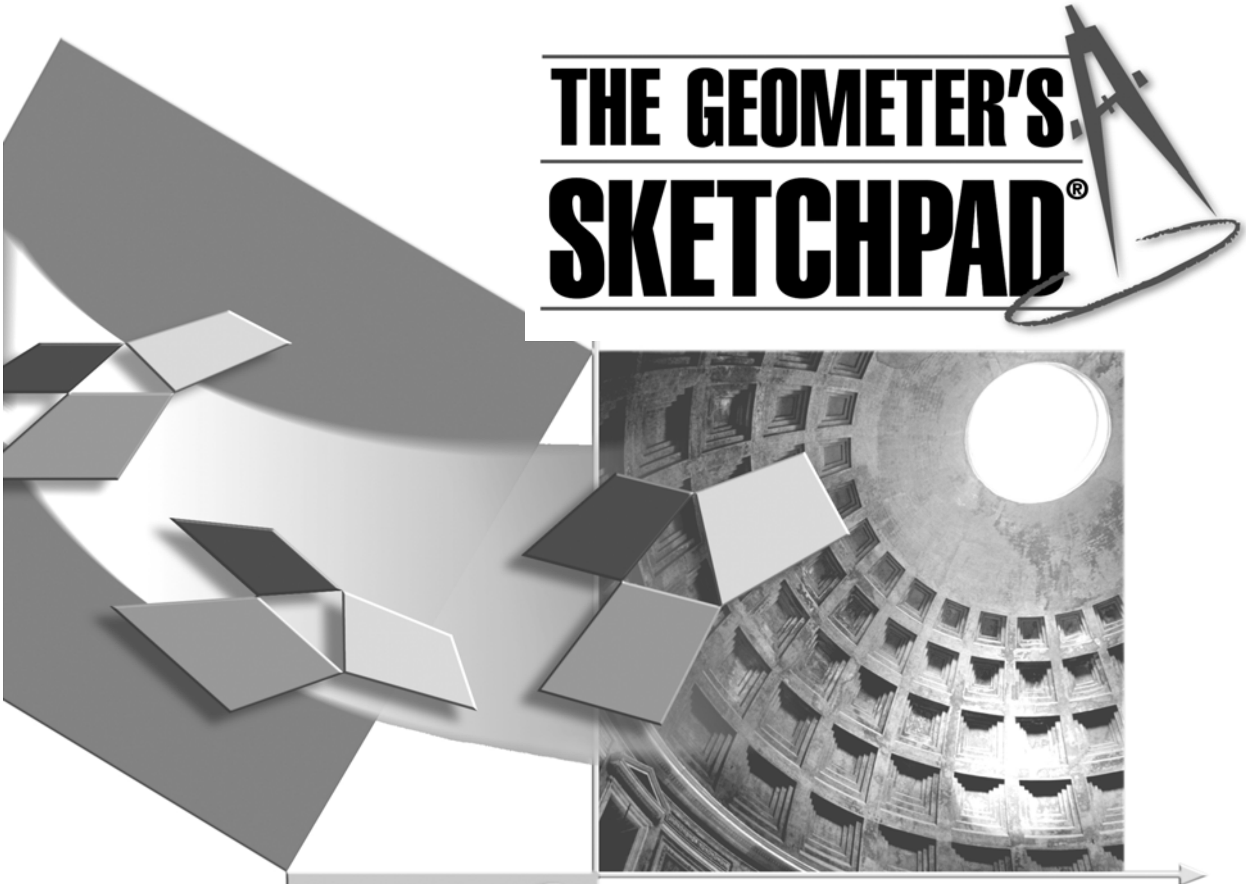
Διδάσκοντας Γεωμετρία

με το



Βιβλίο Καθηγητή

Key Curriculum Press

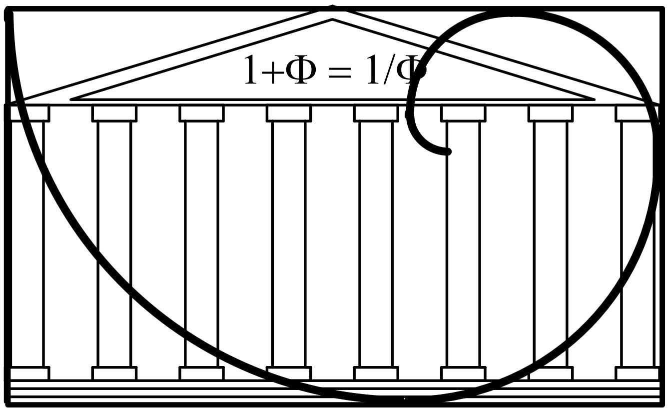
THE GEOMETER'S SKETCHPAD®

ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ
ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Βιβλίο Καθηγητή

Περιεχόμενα

Σημειώσεις διδασκαλίας



Παρ' ότι αποτελεί αντικείμενο σχετικής διαμάχης, ορισμένοι αρχιτέκτονες και μαθηματικοί θεωρούν ότι ο Παρθενώνας σχεδιάστηκε βάσει του κανόνα της χρυσής τομής. Το σχέδιο αυτό δείχνει, σε αδρές γραμμές, την ένταξη του Παρθενώνα σε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Εάν έχετε μελετήσει τον *Οδηγό Εκμάθησης*, γνωρίζετε πώς να χρησιμοποιείτε το Sketchpad και πιθανότατα έχετε διαπιστώσει ότι το εύρος των εφαρμογών του λογισμικού αυτού υπερβαίνει όσα είχατε αρχικά φανταστεί. Ωστόσο, παρά τις δυνητικές εφαρμογές του Sketchpad, το πρόγραμμα αυτό σχεδιάστηκε πρώτιστα ως εργαλείο διδασκαλίας και μάθησης. Στην ενότητα αυτή θεμελιώνουμε ένα πλαίσιο χρήσης του Sketchpad στη διδασκαλία της γεωμετρίας και παρουσιάζουμε προτάσεις για διάφορους τρόπους εφαρμογής του Sketchpad σε διαφορετικές ρυθμίσεις στη σχολική τάξη. Αυτές οι σημειώσεις διδασκαλίας συνοδεύονται από 31 υποδειγματικές δραστηριότητες. Προσπαθήστε να πραγματοποιήσετε με τους μαθητές σας αυτές τις δραστηριότητες, ώστε να αποκτήσετε μια εικόνα των δυνατοτήτων του Sketchpad.

Η προέλευση του Sketchpad

Το *The Geometer's Sketchpad* αναπτύχθηκε ως μέρος του Προγράμματος Οπτικής Γεωμετρίας, ενός προγράμματος χρηματοδοτούμενου από το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών (NSF) υπό τη διεύθυνση του δρα Eugene Klotz στο Swarthmore College και της δρα Doris Schattschneider στο Moravian College, Pennsylvania. Πέραν του Sketchpad, το Πρόγραμμα Οπτικής Γεωμετρίας έχει παραγάγει τα Stella Octangula και τα Πλατωνικά Στερεά: βίντεο, βιβλία δραστηριοτήτων και άλλο υλικό, όλα δημοσιευμένα από τις Εκδόσεις *Key Curriculum Press*. Το καλοκαίρι του 1987 άρχισε τη συνεργασία του με το Πρόγραμμα Οπτικής Γεωμετρίας ο δημιουργός και προγραμματιστής του Sketchpad Nicholas Jackiw. Ένα χρόνο αργότερα ο Jackiw ξεκίνησε ένα σοβαρό έργο προγραμματισμού. Το Sketchpad για Macintosh αναπτύχθηκε σε ένα ανοιχτό ακαδημαϊκό περιβάλλον στο οποίο πολλοί καθηγητές και άλλοι χρήστες πειραματίζονταν με προηγούμενες εκδόσεις του προγράμματος και αλληλεπίδρασαν με τον Jackiw. Ο τελευταίος προσελήφθη από τις Key Curriculum Press το 1990 για την παραγωγή της δεύτερης έκδοσης του λογισμικού που είχε δοκιμαστεί σε σχολικές τάξεις. Ένας πυρήνας τριάντα σχολείων αυξήθηκε σύντομα σε μια ομάδα που περιλάμβανε περισσότερα από πενήντα σχολεία, καθώς «το μήνυμα διαδιδόταν» και πολλοί είχαν πληροφορηθεί ή παρακολουθήσει επιδείξεις του Sketchpad σε συνέδρια. Το ανοιχτό περιβάλλον δημιουργίας του Sketchpad προκάλεσε μια απίστευτη πληθώρα δημιουργικής ανάδρασης και έναν έντονο ενθουσιασμό υπέρ του προγράμματος. Την εποχή της έκδοσής του, την άνοιξη του 1991, είχε ήδη χρησιμοποιηθεί από εκατοντάδες καθηγητές και μαθητές, αλλά και από άλλους λάτρεις της γεωμετρίας, και αποτελούσε το πλέον συζητημένο έως τότε και αναμενόμενο κομμάτι λογισμικού των σχολικών μαθηματικών.

Το πρώτο έτος του Sketchpad ο οίκος Key Curriculum Press άρχισε μια μελέτη σχετικά με τον τρόπο αποτελεσματικής χρήσης του προγράμματος στα σχολεία. Επιχορηγούμενη εν μέρει από ένα κονδύλι του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών για μικρές επιχειρήσεις, η έρευνα αυτή αντανακλάται σε αυτές τις σημειώσεις διδασκαλίας, στη σχολική ύλη και σε νέες εκδόσεις του Sketchpad. Η έκδοση του προγράμματος η οποία παρουσιάστηκε στην αγορά τον Απρίλιο του 1992 εισήγαγε βελτιωμένες δυνατότητες μετασχηματισμού και παρουσίασης. Επίσης, τα αναδρομικά αρχεία εντολών στην έκδοση αυτή κατέστησαν δυνατή, μεταξύ άλλων, την κατασκευή φράκταλ. Η πρώτη έκδοση του Sketchpad για Windows παρουσιάστηκε το Μάρτιο του 1993. Η έκδοση 3 για Macintosh και Windows, μια αρκετά αναβαθμισμένη έκδοση, παρουσιάστηκε τον Απρίλιο του 1995 και εμπεριείχε αναλυτικές και γραφικές δυνατότητες, κατασκευάσιμους γεωμετρικούς τόπους, τόξα, βελτιωμένο μαθηματικό συμβολισμό, εργαλεία αρχείων εντολών και μετασχηματισμούς κατά μετρήσεις. Η Έκδοση 4 του λογισμικού, η οποία κυκλοφορήθηκε το φθινόπωρο του 2001, επεκτείνει σημαντικά τη χρησιμότητα του προγράμματος σε μαθήματα άλγεβρας και λογισμού, εξελίσσοντας παράλληλα τόσο την ευκολία χειρισμού στις μικρότερες τάξεις όσο και τα εργαλεία συγγραφής υλικού με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα. Η έρευνα στις σχολικές τάξεις συνεχίζεται με σκοπό το σχηματισμό μιας βάσης για την περαιτέρω ανάπτυξη του λογισμικού καθώς και συνοδευτικού υλικού.

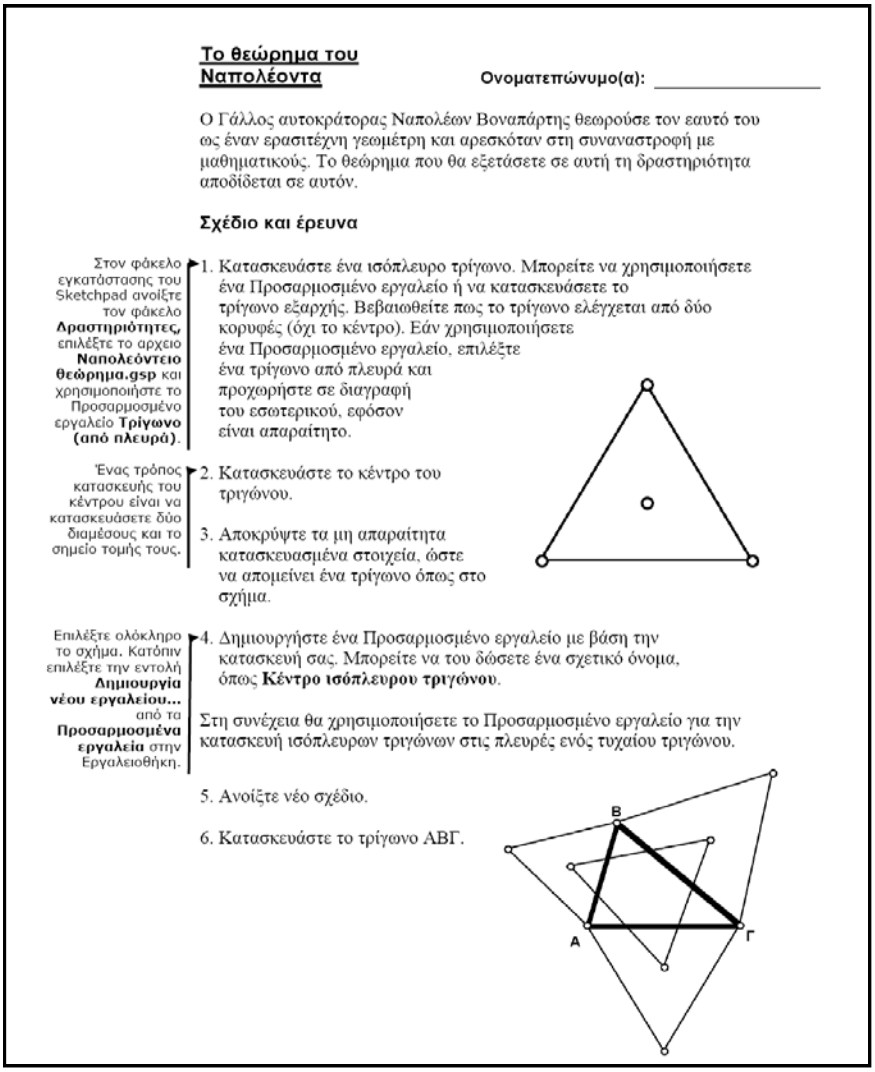
Χρήση του Sketchpad στην τάξη

Το Sketchpad σχεδιάστηκε κυρίως για χρήση σε μαθήματα γεωμετρίας στο γυμνάσιο και στο λύκειο. Ωστόσο, η δοκιμή έδειξε πως η ευκολία στο χειρισμό του Sketchpad καθιστά επιτυχή τη χρήση του από νεαρούς φοιτητές και η ισχύς των χαρακτηριστικών του είναι ελκυστική για διδάσκοντες μαθηματικών σε πρωτοετείς φοιτητές καθώς και για προπαρασκευαστικά μαθήματα. Ιδιαίτερα ελκυστικές είναι οι ισχυρές δυνατότητες του Sketchpad αναφορικά με μετασχηματισμούς και τη δημιουργία Προσαρμοσμένων εργαλείων για την εξερεύνηση μη ευκλείδειων γεωμετριών. Όμως, ακόμη και ζωγράφοι και τεχνικοί σχεδιαστές έχουν γοητευτεί από την κομψότητα και δύναμη του Sketchpad. Η ευκολία χειρισμού και οι δυνατότητες του Sketchpad, ώστε το ίδιο εργαλείο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξερεύνηση νέων γεωμετρικών εννοιών τόσο από μαθητές του δημοτικού όσο και από καθηγητές πανεπιστημίου, καθιστούν το λογισμικό αυτό μοναδικό. Εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στους τρόπους χρήσης του Sketchpad σε ένα μάθημα σχολικής γεωμετρίας.

Ως καθηγητές σχολικής γεωμετρίας, ίσως θέλετε να καθοδηγήσετε τους μαθητές σας στη διαδικασία ανακάλυψης μιας ειδικής ιδιότητας ή ενός μικρού συνόλου ιδιοτήτων ή να θέσετε ένα ανοιχτό ερώτημα ή πρόβλημα και να ζητήσετε από τους μαθητές σας να ανακαλύψουν όσο το δυνατόν περισσότερα σχετικά με αυτό. Εναλλακτικά, μπορείτε να προετοιμάσετε για τους μαθητές σας μια επίδειξη στην οποία μοντελοποιείται μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Σε κάθε περίπτωση, είναι καλό να επιθυμείτε τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών και τη διάδοση των ευρημάτων τους. Τα συνοδευόμενα από σχόλια σχέδια και Προσαρμοσμένα εργαλεία του Sketchpad ενθαρρύνουν τους μαθητές στη διατύπωση μαθηματικών ιδεών. Με οποιονδήποτε τρόπο κι αν χρησιμοποιήσετε το Sketchpad μπορεί να χρησιμεύσει ως εφαλτήριο για συζήτηση και επικοινωνία. Θα εξετάσουμε παραδείγματα τριών προσεγγίσεων για τη χρήση του Sketchpad στη σχολική τάξη: την καθοδηγούμενη έρευνα, την ατέρμονη εξερεύνηση και την επίδειξη.

<u>Μια καθοδηγούμενη έρευνα: Το ναπολεόντειο θεώρημα</u>

Σκοπός αυτής της έρευνας είναι η καθοδήγηση των μαθητών στη διατύπωση ορισμένων ειδικών υποθέσεων. Δίνονται οδηγίες για την κατασκευή ενός σχήματος με συγκεκριμένες, ειδικά ορισμένες σχέσεις: στην περίπτωση αυτή ένα τρίγωνο με ισόπλευρα τρίγωνα κατασκευασμένα στις πλευρές του. Οι μαθητές διερευνούν την κατασκευή τους ώστε να διαπιστώσουν ποιες από τις σχέσεις που θα ανακαλύψουν μπορούν να γενικευτούν σε όλα τα τρίγωνα. Μετά από αυτό το πείραμα ζητείται από τους μαθητές η γραπτή διατύπωση υποθέσεων.



<u>Το θεώρημα του Ναπολέοντα</u> **Ονοματεπώνυμο(α):** ________________

Ο Γάλλος αυτοκράτορας Ναπολέων Βοναπάρτης θεωρούσε τον εαυτό του ως έναν ερασιτέχνη γεωμέτρη και αρεσκόταν στη συναναστροφή με μαθηματικούς. Το θεώρημα που θα εξετάσετε σε αυτή τη δραστηριότητα αποδίδεται σε αυτόν.

Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες,** επιλέξτε το αρχείο **Ναπολεόντειο θεώρημα.gsp** και χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τρίγωνο (από πλευρά)**.

1. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο ή να κατασκευάσετε το τρίγωνο εξαρχής. Βεβαιωθείτε πως το τρίγωνο ελέγχεται από δύο κορυφές (όχι το κέντρο). Εάν χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο, επιλέξτε ένα τρίγωνο από πλευρά και προχωρήστε σε διαγραφή του εσωτερικού, εφόσον είναι απαραίτητο.

Ένας τρόπος κατασκευής του κέντρου είναι να κατασκευάσετε δύο διαμέσους και το σημείο τομής τους.

2. Κατασκευάστε το κέντρο του τριγώνου.
3. Αποκρύψτε τα μη απαραίτητα κατασκευασμένα στοιχεία, ώστε να απομείνει ένα τρίγωνο όπως στο σχήμα.

Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου...** από τα **Προσαρμοσμένα εργαλεία** στην Εργαλειοθήκη.

4. Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο με βάση την κατασκευή σας. Μπορείτε να του δώσετε ένα σχετικό όνομα, όπως **Κέντρο ισόπλευρου τριγώνου**.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσετε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων στις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου.

5. Ανοίξτε νέο σχέδιο.
6. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.

Μια σημαντική πτυχή αυτής και, ουσιαστικά, κάθε έρευνας με το Sketchpad είναι ότι με το χειρισμό ενός συγκεκριμένου σχήματος ο μαθητής δυνητικά διαπιστώνει κάθε δυνατή περίπτωση αυτού του σχήματος. Εδώ δίνεται μια οπτική απόδειξη σύμφωνα με την οποία το ναπολεόντειο τρίγωνο ενός τυχαίου τριγώνου είναι πάντοτε ισόπλευρο, ακόμη και όταν το αρχικό τρίγωνο αλλάζει από οξυγώνιο σε ορθογώνιο ή σε αμβλυγώνιο, από σκαληνό σε ισοσκελές ή σε ισόπλευρο.

Για μαθητές που ολοκληρώνουν πρώτοι την εργασία τους δίνονται προτάσεις για περαιτέρω, ανοιχτή έρευνα. Στην εντολή *Περαιτέρω εξερεύνηση* οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν ότι τα εξεταζόμενα ευθύγραμμα τμήματα είναι όμοια, συντρέχουν και τέμνονται υπό γωνίες 60°.

Μετά τη συζήτηση των ευρημάτων κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες, είναι σημαντική η εξέτασή τους από τους μαθητές ως μεγάλη ομάδα. Ζητήστε από τους μαθητές να αναφέρουν οποιεσδήποτε ειδικές περιπτώσεις ανακάλυψαν και χρησιμοποιήστε τις ερωτήσεις σας ώστε να δώσετε έμφαση στις σχέσεις που μπορούν να γενικευτούν σε όλα τα τρίγωνα: «Παρέμεινε το ναπολεόντειο τρίγωνο διαρκώς ισόπλευρο κατά την αλλαγή του αρχικού τριγώνου από οξυγώνιο σε αμβλυγώνιο; Ήταν τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που κατασκευάσατε με την εντολή *Περαιτέρω εξερεύνηση* όμοια και συντρέχοντα ανεξαρτήτως του σχήματος του τριγώνου σας;». Σε αυτή την ακολουθία ερωτήσεων μπορείτε να εισάγετε ειδικούς όρους για ιδιότητες που ανακαλύπτουν οι μαθητές (για παράδειγμα, το σημείο τομής που ανακαλύπτουν με την *Περαιτέρω εξερεύνηση* ονομάζεται σημείο Fermat) και να συμφωνήσετε ως τάξη στην ορολογία που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τις υποθέσεις τους. Αυτός είναι ένας τρόπος ελέγχου του βαθμού κατανόησής τους.

Μια ατέρμονη εξερεύνηση: Κατασκευή ρόμβων

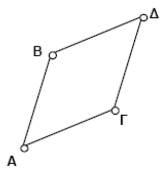
Σε μια *ατέρμονη εξερεύνηση* δεν υπάρχει κάποιο ειδικό σύνολο ιδιοτήτων που αναμένεται να ανακαλυφθεί ως αποτέλεσμα του μαθήματος. Ένα ερώτημα ή πρόβλημα τίθεται με λίγες οδηγίες σχετικά με τον τρόπο χρήσης του Sketchpad στη διερεύνηση του προβλήματος. Διαφορετικοί μαθητές θα ανακαλύψουν ή θα χρησιμοποιήσουν διαφορετικές σχέσεις στις κατασκευές τους και θα καταγράψουν τα ευρήματά τους με δικά τους λόγια.

Στο παράδειγμα αυτό ζητείται από τους μαθητές να ανακαλύψουν όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους κατασκευής ενός ρόμβου.

Και πάλι οι διάφορες μέθοδοι κατασκευής πρέπει να συζητηθούν σε μικρές ομάδες και κατόπιν με ολόκληρη την τάξη. Για το κλείσιμο του μαθήματος, ίσως θέλετε να καταγράψετε στον πίνακα όλες τις ιδιότητες που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Δίνοντας στους μαθητές ένα πρόβλημα ατέρμονης κατασκευής, παρέχετε επίσης τη δυνατότητα έμφασης στη σημαντική διάκριση μεταξύ μιας σχεδίασης και μιας κατασκευής. Για παράδειγμα, αν οι μαθητές ουσιαστικά έχουν χρησιμοποιήσει τον ορισμό των ιδιοτήτων ενός ρόμβου στην κατασκευή τους, πρέπει να είναι δυνατή η ένταξη του σχήματός τους σε ένα ρόμβο οποιουδήποτε σχήματος ή μεγέθους και επίσης να είναι αδύνατη η παραμόρφωση του σχήματος σε οτιδήποτε δεν αποτελεί ρόμβο.

Κατασκευή ρόμβων Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Πόσους τρόπους μπορείτε να σκεφτείτε για την κατασκευή ενός ρόμβου; Εξετάστε μεθόδους που χρησιμοποιεί το μενού Κατασκευή, το μενού Μετασχηματισμός ή συνδυασμούς αυτών. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις διαγώνιους. Γράψτε μια σύντομη περιγραφή κάθε μεθόδου κατασκευής μαζί με τις ιδιότητες των ρόμβων στις οποίες βασίζεται κάθε μέθοδος.



Μέθοδος 1:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 2:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 3:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 4:

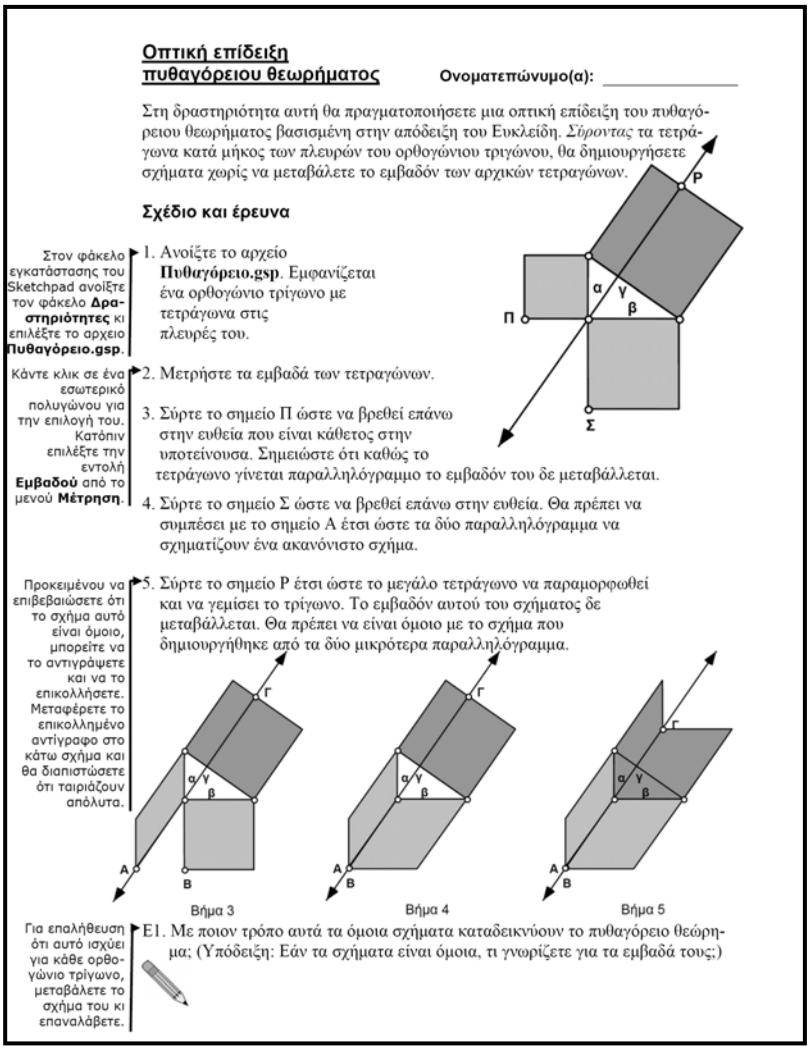
Ιδιότητες:

Μια επίδειξη: Οπτική επίδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος

Ο καθηγητής (ή, στην περίπτωση αυτή, και ο μαθητής) μπορεί να χρησιμοποιήσει το Sketchpad για την προετοιμασία μιας επίδειξης. Ορισμένες φορές μια πολύπλοκη κατασκευή μπορεί να αποκαλύπτει με ωραίο τρόπο μια ιδιότητα, αλλά ίσως δεν είναι πρακτικό να ζητηθεί η κατασκευή αυτή από κάθε μαθητή ξεχωριστά. Στην περίπτωση αυτή οι καθηγητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα σχέδιο επίδειξης ή ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο συνοδευόμενο από ένα φύλλο δραστηριότητας.

Πριν από τη χρήση αυτής της επίδειξης, οι μαθητές μπορούν ουσιαστικά να ανακαλύψουν το πυθαγόρειο θεώρημα σε μια καθοδηγούμενη έρευνα. Ωστόσο, σκοπός αυτού του μαθήματος είναι η οπτική απόδειξη του θεωρήματος. Το σχέδιο που χρησιμοποιείται στο μάθημα είναι ένα προκατασκευασμένο σχέδιο κάποιου βαθμού πολυπλοκότητας. Δε ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν αυτή την κατασκευή για την ανακάλυψη του πυθαγόρειου θεωρήματος, αλλά με αφορμή αυτή την επίδειξη μπορούν να παρατηρήσουν την κατασκευή με ένα νέο και ενδιαφέροντα τρόπο.

Η επίδειξη αυτή επιτυγχάνεται με τον πλέον αποτελεσματικό τρόπο ως επίδειξη σε ολόκληρη την τάξη αν συνοδεύεται από έναν προβολέα. Εναλλακτικά, μπορείτε να κάνετε αντίγραφα του αρχείου της δραστηριότητας ώστε οι μαθητές να τη μελετήσουν στον ελεύθερο χρόνο τους ή να την παρουσιάσετε στο τέλος μιας εργαστηριακής περιόδου κατά την οποία οι μαθητές διερεύνησαν άλλες πτυχές του πυθαγόρειου θεωρήματος.



Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος Ονοματεπώνυμο(α): ______________

Στη δραστηριότητα αυτή θα πραγματοποιήσετε μια οπτική επίδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος βασισμένη στην απόδειξη του Ευκλείδη. *Σύροντας* τα τετράγωνα κατά μήκος των πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου, θα δημιουργήσετε σχήματα χωρίς να μεταβάλετε το εμβαδόν των αρχικών τετραγώνων.

Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** κι επιλέξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**.

1. Ανοίξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τετράγωνα στις πλευρές του.

Κάντε κλικ σε ένα εσωτερικό πολυγώνου για την επιλογή του. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εμβαδού** από το μενού **Μέτρηση**.

2. Μετρήστε τα εμβαδά των τετραγώνων.
3. Σύρτε το σημείο Π ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία που είναι κάθετος στην υποτείνουσα. Σημειώστε ότι καθώς το τετράγωνο γίνεται παραλληλόγραμμο το εμβαδόν του δε μεταβάλλεται.
4. Σύρτε το σημείο Σ ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία. Θα πρέπει να συμπέσει με το σημείο Α έτσι ώστε τα δύο παραλληλόγραμμα να σχηματίζουν ένα ακανόνιστο σχήμα.

Προκειμένου να επιβεβαιώσετε ότι το σχήμα αυτό είναι όμοιο, μπορείτε να το αντιγράψετε και να το επικολλήσετε. Μεταφέρετε το επικολλημένο αντίγραφο στο κάτω σχήμα και θα διαπιστώσετε ότι ταιριάζουν απόλυτα.

5. Σύρτε το σημείο Ρ έτσι ώστε το μεγάλο τετράγωνο να παραμορφωθεί και να γεμίσει το τρίγωνο. Το εμβαδόν αυτού του σχήματος δε μεταβάλλεται. Θα πρέπει να είναι όμοιο με το σχήμα που δημιουργήθηκε από τα δύο μικρότερα παραλληλόγραμμα.

Για επαλήθευση ότι αυτό ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, μεταβάλετε το σχήμα του κι επαναλάβετε.

E1. Με ποιον τρόπο αυτά τα όμοια σχήματα καταδεικνύουν το πυθαγόρειο θεώρημα; (Υπόδειξη: Εάν τα σχήματα είναι όμοια, τι γνωρίζετε για τα εμβαδά τους;)

Με κατάλληλο λογισμικό συστήματος μπορείτε, τέλος, να οδηγήσετε την επίδειξη στο δίκτυο ενός εργαστηρίου υπολογιστών.

Χρήση του Sketchpad σε διαφορετικές ρυθμίσεις στην τάξη

Διαφορετικά σχολεία διαθέτουν διαφορετικές ρυθμίσεις στην τάξη με βάση τις οποίες χρησιμοποιούνται υπολογιστές. Αυτό ελήφθη υπόψη στο σχεδιασμό του Sketchpad και τα χαρακτηριστικά λειτουργίας του μπορούν να βελτιστοποιηθούν για αυτές τις ρυθμίσεις. Επίσης, είναι απαραίτητη η προσαρμογή των στρατηγικών διδασκαλίας στις διαθέσιμες πηγές. Στη συνέχεια θα δοθούν ορισμένες προτάσεις για τη χρήση και τη διδασκαλία με το Sketchpad σε τάξη με έναν υπολογιστή ή έναν υπολογιστή και έναν προβολέα ή μια ομάδα υπολογιστών ή ένα εργαστήριο υπολογιστών.

Τάξη με έναν υπολογιστή

Ίσως η καλύτερη λύση για την περίπτωση ενός υπολογιστή χωρίς προβολέα είναι η χρήση του από τους μαθητές κατά ομάδες. Κάθε ομάδα μπορεί να διερευνήσει ή να επαληθεύσει εικασίες που διατυπώθηκαν στον πίνακα ή στο τετράδιο χρησιμοποιώντας καθιερωμένα γεωμετρικά εργαλεία όπως κανόνα και διαβήτη. Στην περίπτωση αυτή κάθε ομάδα έχει μια ευκαιρία κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου να χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή για κάποιο διάστημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να κρατήσετε μια ημέρα χρήσης του υπολογιστή για κάθε ομάδα, ενόσω οι υπόλοιπες ομάδες θα ασχολούνται με την ίδια ή άλλες έρευνες στο θρανίο. Ένας υπολογιστής δίχως προβολέα ή διάταξη μεγάλης οθόνης έχει περιορισμένες δυνατότητες χρήσης ως εργαλείο επίδειξης. Αν και οι προτιμήσεις μπορούν να ρυθμιστούν στο Sketchpad για οποιοδήποτε μέγεθος ή στυλ γραφής, μια μεγάλη τάξη θα έχει δυσκολία να παρακολουθήσει τι συμβαίνει σε μια μικρή οθόνη υπολογιστή.

Ένας υπολογιστής και ένας προβολέας

Υπάρχει μια ποικιλία διατάξεων που συνδέονται με έναν υπολογιστή έτσι ώστε η προβολή να οδηγείται σε έναν προβολέα, δηλαδή σε μια μεγάλη οθόνη, ή σε μια διάταξη LCD σε συνδυασμό με έναν προβολέα. Το Sketchpad έχει σχεδιαστεί ώστε να λειτουργεί καλά σε συνδυασμό με διατάξεις αυτού του είδους. Έτσι, οι δυνατότητες για χρήσεις στην τάξη αυξάνονται σημαντικά. Εσείς ή ένας μαθητής μπορείτε να δράσετε ως συντονιστής έρευνας, θέτοντας συνολικά στην τάξη ερωτήματα όπως «Τι να δοκιμάσουμε στη συνέχεια; Πού πρέπει να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα; Ποια αντικείμενα πρέπει να ανακλαστούν; Τι παρατηρείτε κατά τη μετακίνηση αυτού του σημείου;». Με έναν προβολέα εσείς και οι μαθητές σας μπορείτε να προετοιμάσετε επιδείξεις ή οι μαθητές μπορούν να κάνουν παρουσιάσεις ευρημάτων που ανακάλυψαν χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή ή άλλα μέσα. Το Sketchpad καθίσταται ένας δυναμικός μαυροπίνακας, στον οποίο εσείς ή οι μαθητές σας μπορείτε να σχεδιάσετε με μεγαλύτερη ακρίβεια περισσότερο πολύπλοκα σχήματα, τα οποία, στην καλύτερη περίπτωση, μπορούν να παραμορφωθούν και να μετασχηματιστούν κατά άπειρους τρόπους δίχως την ανάγκη σβησίματος και εκ νέου σχεδίασης. Συνιστούμε τη ρύθμιση των προτιμήσεων προβολής σε μεγάλους και έντονους χαρακτήρες και τη χρήση γραμμών μεγάλου πάχους, ώστε κείμενο και σχήματα να φαίνονται καθαρά από όλες τις γωνίες της τάξης.

Τάξη με πολλούς υπολογιστές

Εάν μπορείτε να χωρίσετε την τάξη σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων μαθητών, έτσι ώστε κάθε ομάδα να έχει πρόσβαση σε έναν υπολογιστή, μπορείτε να σχεδιάσετε ολόκληρα μαθήματα σχετικά με έρευνες μέσω του υπολογιστή. Βεβαιωθείτε ότι:

- εξηγείτε σε ολόκληρη την τάξη τι πρέπει να κάνουν.
- οι μαθητές έχουν κάποιο είδος γραπτής εξήγησης της έρευνας ή του προβλήματος το οποίο επεξεργάζονται. Συχνά είναι χρήσιμο η εξήγηση αυτή να γράφεται σε χαρτί στο οποίο υπάρχει χώρος για την καταγραφή ορισμένων από τα ευρήματά τους. Πάντως, για ορισμένες ατέρμονες εξερευνήσεις το πρόβλημα ή ερώτημα μπορεί απλώς να γραφεί στον πίνακα ή στο ίδιο το σχέδιο. Ομοίως, η γραπτή εργασία των μαθητών μπορεί να συνοδεύεται από λεζάντες και σχολιασμένα σχέδια και Προσαρμοσμένα εργαλεία.

- οι μαθητές εργάζονται έτσι ώστε κάθε μέλος μιας ομάδας να έχει την ευκαιρία να εργαστεί με τον υπολογιστή.
- τα μέλη μιας ομάδας που δεν εργάζονται άμεσα στον υπολογιστή αναμένεται ότι θα συνεισφέρουν στη συζήτηση της έρευνας στην ομάδα και θα βοηθούν το μέλος της ομάδας που εργάζεται με τον υπολογιστή.
- θέτετε ερωτήματα στις ομάδες, βοηθάτε τους μαθητές κατά τη διάρκεια της εργασίας και τους υπενθυμίζετε τον τελικό σκοπό.
- τα ευρήματα των μαθητών συνοψίζονται σε μια συζήτηση με ολόκληρη την τάξη στο τέλος του μαθήματος.

Εργαστήριο υπολογιστών

Η εμπειρία των καθηγητών με τη χρήση του Sketchpad στην τάξη υποδηλώνει ότι, ακόμη και αν είναι διαθέσιμοι αρκετοί υπολογιστές για ατομική εργασία, ίσως είναι καλύτερο οι μαθητές να εργάζονται σε ζεύγη. Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα όταν συνεργάζονται μεταξύ τους, καθώς αφομοιώνουν καλύτερα ιδέες και βοηθούν ο ένας τον άλλο. Εάν υπάρχουν μαθητές που εργάζονται ατομικά σε υπολογιστές, ενθαρρύνετέ τους να συζητήσουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με τους συμμαθητές τους που κάθονται στα διπλανά θρανία. Σε ένα δικτυωμένο εργαστήριο οι μαθητές μπορούν να συνεργάζονται ανταλλάσσοντας Προσαρμοσμένα εργαλεία στον Φάκελο εργαλείων. Θέσετε τον Φάκελο εργαλείων με τα Προσαρμοσμένα εργαλεία σε κάθε μηχανή σε έναν κοινό, δικτυωμένο κατάλογο. Καθώς οι μαθητές προσθέτουν τα Προσαρμοσμένα εργαλεία τους στον κοινό Φάκελο εργαλείων, τα Προσαρμοσμένα εργαλεία εμφανίζονται ως εργαλεία σε κάθε μεμονωμένη μηχανή. Επίσης, μπορείτε να εισάγετε εργαλεία σε αλληλεπίδραση με την τάξη, με την προσθήκη τους από εσάς στο δικτυωμένο κατάλογο. Οι παραπάνω προτάσεις για μαθητές που εργάζονται σε μικρές ομάδες εφαρμόζονται και σε μαθητές που εργάζονται κατά ζεύγη.

Εάν η ρύθμιση του εργαστηρίου σας διαθέτει τόσο υπολογιστές Macintosh όσο και υπολογιστές με Windows, οι μαθητές σας μπορούν να μελετήσουν στο ένα είδος μηχανής σχέδια δημιουργημένα στο άλλο είδος μηχανής. Χρησιμοποιήστε δισκέτες μορφοποιημένες σε PC (οι Macintosh μπορούν να τις διαβάσουν, ενώ τα PC δεν μπορούν να διαβάσουν δισκέτες μορφοποιημένες σε Macintosh) ή το δίκτυο για την ανταλλαγή εγγράφων από διαφορετικές πλατφόρμες.

Χρήση του Sketchpad ως εργαλείου παρουσίασης

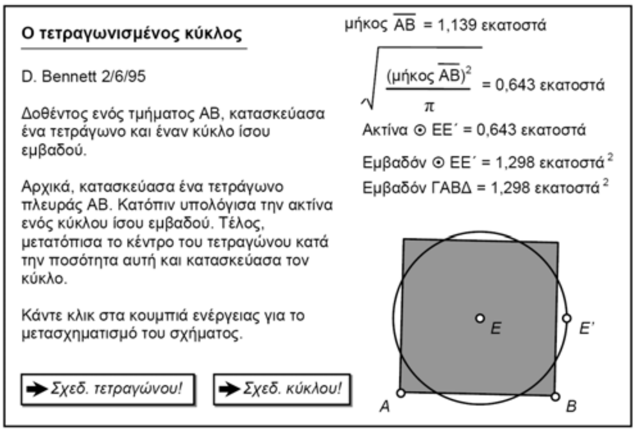
Θα διαπιστώσετε ότι τα χαρακτηριστικά του Sketchpad, ειδικότερα οι δυνατότητες κειμένου, τα κουμπιά ενεργειών και τα έγγραφα με πολλές σελίδες το καθιστούν ιδανικό για παρουσιάσεις από καθηγητές και μαθητές. Το Sketchpad αποτελεί ένα ισχυρό περιβάλλον για μαθηματική επικοινωνία.

Με το εργαλείο κειμένου μαθητές και καθηγητές μπορούν να σχολιάσουν τα σχέδιά τους με λεζάντες που περιγράφουν σημαντικά χαρακτηριστικά μιας κατασκευής. Οι λεζάντες μπορούν να τονίζουν ιδιότητες που επιδεικνύει μια κατασκευή ή μπορούν να παρέχουν οδηγίες για το χειρισμό μιας κατασκευής, συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων που πρέπει να παρατηρήσουμε κατά τη μεταβολή της κατασκευής. Με αυτό τον τρόπο μαθητές και καθηγητές μπορούν να παρουσιάσουν την εργασία τους σε ένα σχέδιο.

Καθηγητές και μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν κουμπιά ενεργειών για την απλοποίηση πολύπλοκων σχεδίων. Τα κουμπιά μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για διαδοχική εκτέλεση, έτσι ώστε οι διαδικασίες και επεξηγήσεις μιας κατασκευής να μπορούν να εκτελεστούν με το πάτημα ενός κουμπιού. Με άλλα λόγια, τα κουμπιά ενέργειας μετατρέπουν τα σχέδια σε παρουσιάσεις. Τα κουμπιά επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόκρυψη κι εμφάνιση γεωμετρικών αντικειμένων και κειμένου ή για να την προσθήκη κίνησης.

Το κείμενο, τα κουμπιά ενέργειας, οι λεζάντες καθιστούν δυνατές τις παρουσιάσεις χωρίς παρουσιαστές: ένα αρκούντως σχολιασμένο σχέδιο μιλά από μόνο του όταν ανοιχτεί από έναν άλλο χρήστη, ακόμη και όταν ο δημιουργός του σχεδίου απουσιάζει. Σε αυτό το πλαίσιο μια παρουσίαση δε σχεδιάζεται κατ' ανάγκη για ένα ομαδικό ακροατήριο που παρακολουθεί την προβολή σε μια οθόνη. Το ακροατήριο ενός σχολιασμένου σχεδίου μπορεί να είναι ένας συμμαθητής ή ένας συνάδελφος. Οι καθηγητές που ζητούν από τους μαθητές την παράδοση εργασιών στη μορφή σχεδίων μπορούν εξίσου να ζητήσουν τη δημιουργία παρουσιάσεων με τη χρήση κουμπιών ενέργειας και την επεξήγηση της εργασίας των μαθητών στις λεζάντες του σχεδίου τους.

Τα σχόλια στα Προσαρμοσμένα εργαλεία παρέχουν ένα άλλο μέσο για μαθηματική επικοινωνία. Σχόλια επισκόπησης μπορούν να δώσουν μια γενική περιγραφή της εργασίας ενός Προσαρμοσμένου εργαλείου, συμπεριλαμβανομένων των οδηγιών για τη διευθέτηση παραμέτρων, ώστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο να λειτουργεί όπως προβλέπεται. Αναφορικά με τα σχέδια, οι καθηγητές μπορούν να ζητήσουν από τους μαθητές την παράδοση σχολιασμένων Προσαρμοσμένων εργαλείων.



Σχέδιο με λεζάντα

Ξεφυλλίζοντας τα σχέδια δειγμάτων και τα Προσαρμοσμένα εργαλεία που συνοδεύουν το Sketchpad, μπορείτε να πάρετε ιδέες για διάφορους τρόπους χρήσης λεζαντών σχεδίων και σχολίων στα Προσαρμοσμένα εργαλεία, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μαθηματική επικοινωνία.

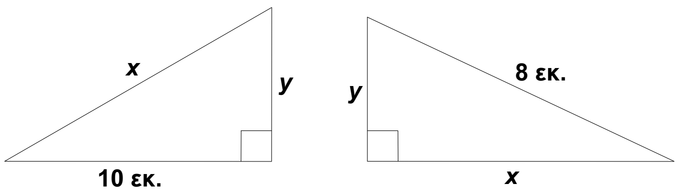
Οι λειτουργίες ενσωμάτωσης υπερδεσμών και παραπομπών στο Διαδίκτυο δίνουν στο Sketchpad τη δυνατότητα να έχετε στο σχέδιό σας κουμπιά δεσμού που σας παραπέμπουν σε πηγές στο Διαδίκτυο (αν υπάρχει σύνδεση) για περισσότερες εξερευνήσεις, πρακτικές εφαρμογές, αναζήτηση ιστορικών δεδομένων ή εγκυκλοπαιδικών πληροφοριών. Επιπλέον, αν θέλετε να δημοσιεύσετε δικές σας ιστοσελίδες με μαθηματικό περιεχόμενο στο Διαδίκτυο, το Sketchpad σας δίνει τη δυνατότητα αυτή απευθείας μέσα από το πρόγραμμα. Οι χρήστες του Διαδικτύου θα μπορούν να δουν το υλικό σας, είτε διαθέτουν κι έχουν εγκατεστημένο το Sketchpad οι ίδιοι είτε όχι!

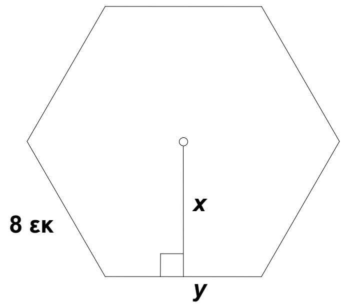
Χρήση του Sketchpad ως εργαλείου παραγωγικότητας

Το *Εγχειρίδιο Αναφοράς* περιγράφει τον τρόπο χρήσης του μενού Επεξεργασία για την αποκοπή, αντιγραφή και επικόλληση αντικειμένων του Sketchpad σε άλλες εφαρμογές, όπως γραφικά ή προγράμματα επεξεργασίας κειμένου. Αυτά τα χαρακτηριστικά καθιστούν το Sketchpad ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο παραγωγικότητας για όλους εκείνους, συμπεριλαμβανομένων καθηγητών και μαθητών, που θέλουν εύκολα να δημιουργούν και να αποθηκεύουν γεωμετρικά σχήματα. Για παράδειγμα, οι καθηγητές μπορούν να δημιουργούν σχήματα στο Sketchpad και να τα ενσωματώνουν σε ένα φύλλο εργασίας που έχουν κατασκευάσει με ένα πρόγραμμα επεξεργασίας κειμένου. Όλα τα γραφικά στις υποδειγματικές δραστηριότητες και τα περισσότερα γραφικά στο *Εγχειρίδιο Αναφοράς* δημιουργήθηκαν στο Sketchpad και επικολλήθηκαν στο Microsoft Word.

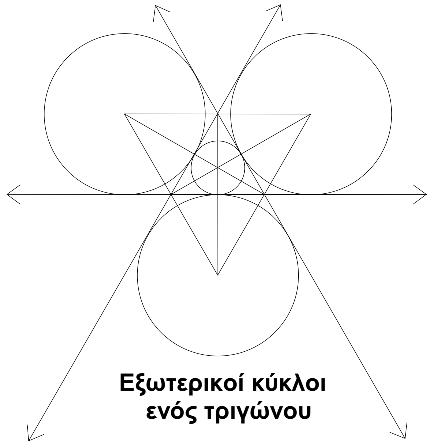
Το Sketchpad αποθηκεύει αντικείμενα στο *Πρόχειρο* τόσο ως αντικείμενα Sketchpad, τα οποία συμπεριφέρονται ανάλογα όταν επικολληθούν σε ένα σχέδιο, όσο και ως εικόνες γραφικών, οι οποίες αναγνωρίζονται, ουσιαστικά, από κάθε πρόγραμμα που περιλαμβάνει γραφικά. Τα γραφικά του Sketchpad δρουν ακριβώς όπως οι εικόνες που παράγονται στα περισσότερα προγράμματα γραφικών και δίνουν θαυμάσια αποτελέσματα όταν εκτυπωθούν στο έγγραφό σας. Εάν γράφετε ένα βιβλίο ή άρθρο που θα τυπωθεί με επαγγελματικό τρόπο, τα γραφικά του Sketchpad μπορούν επίσης να οδηγηθούν σε μια μηχανή στοιχειοθέτησης με αποτελέσματα πολύ υψηλής ποιότητας. Σημειώστε ότι οι πλήρεις ευθείες και ημιευθείες αποκόπτονται όταν επικολλούνται σε άλλα προγράμματα, ακριβώς όπως κατά την εκτύπωση σχεδίων στο Sketchpad. Είναι δυνατή η ρύθμιση προτιμήσεων για την προβολή (ή μη προβολή) αιχμής βελών σε ευθείες ή ημιευθείες που έχουν εκτυπωθεί ή εξαχθεί.

Λύση ως προς x και y:





Μπορείτε να αποθηκεύσετε σχέδια του Sketchpad ως βιβλιοθήκες σχημάτων, τις οποίες χρησιμοποιείτε σε εξετάσεις ή φύλλα εργασίας. Επίσης, μπορείτε εύκολα να αλλάξετε τα σχήματα εφόσον χρειάζεστε κάποιες παραλλαγές τους. Μπορείτε να επεξεργαστείτε ετικέτες και να γράψετε μετρήσεις γωνιών και μηκών. Ακόμη και τα σχήματα που σχεδιάζετε με το χέρι έχουν το πλεονέκτημα, όταν σχεδιαστούν με το Sketchpad, να μπορούν να αποθηκευτούν, να τροποποιηθούν εύκολα και να χρησιμοποιηθούν εκ νέου όσες φορές θέλετε.



Εξωτερικοί κύκλοι ενός τριγώνου

Sketchpad και κείμενο γεωμετρίας

Η ποικιλία τρόπων χρήσης του Sketchpad το καθιστά ιδανικό εργαλείο για τη γεωμετρική εξερεύνηση, ανεξαρτήτως του βιβλίου που χρησιμοποιείτε. Χρησιμοποιήστε το Sketchpad για την επίδειξη εννοιών που εμφανίζονται στο κείμενο. Εάν στο κείμενο υπάρχουν θεωρήματα και οι αποδείξεις τους (ενδεχομένως, υπό μορφή ασκήσεων για τους μαθητές), δώστε στους μαθητές την ευκαιρία εξερεύνησης των εννοιών με το Sketchpad, προτού απαιτήσετε από αυτούς την πραγματοποίηση μιας απόδειξης. Η επεξεργασία κατασκευών με το Sketchpad θα εμβαθύνει την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές και θα καταστήσει την απόδειξη περισσότερο προσιτή απ' ότι συνήθως.

Το Sketchpad είναι ιδανικό για χρήση μαζί με βιβλία τα οποία υιοθετούν μια προσέγγιση ανακάλυψης ως προς τη διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στο βιβλίο του Michael Serra *Discovering Geometry* οι μαθητές που εργάζονται σε μικρές ομάδες ανακαλύπτουν γεωμετρικές έννοιες προτού αποπειραθούν να εκτελέσουν κάποια απόδειξη. Πολλές από τις έρευνες αυτές απαιτούν κατασκευές εφικτές με το Sketchpad. Πολλές άλλες έρευνες που αφορούν μετασχηματισμούς, μετρήσεις, υπολογισμούς ή γραφήματα μπορούν επίσης να διεξαχθούν αποτελεσματικά με το Sketchpad. Ουσιαστικά, οι περισσότερες έρευνες του *Discovering Geometry* της Key Curriculum Press ή οποιουδήποτε άλλου βιβλίου με παρόμοια προσέγγιση είναι πραγματοποιήσιμες με το Sketchpad.

Το εγχειρίδιο του *Discovering Geometry* για το μαθητή περιλαμβάνει δέκα ασκήσεις για το Sketchpad και πολυάριθμες έρευνες και προτάσεις για τη χρήση του Sketchpad. Υπάρχουν περισσότερα από 60 μαθήματα κατάλληλα για εξερεύνηση με το Sketchpad στο βοηθητικό βιβλίο *Discovering Geometry with Geometer's Sketchpad*. Τα μαθήματα αυτά φέρουν τους ίδιους τίτλους και καθοδηγούν τους μαθητές στη διατύπωση των ίδιων υποθέσεων όπως στα αντίστοιχα μαθήματα του βιβλίου *Discovering Geometry*. Το βιβλίο συνοδεύεται από CD-ROM με σχέδια. Το *Discovering Geometry Teacher's Resource Book* συνοδεύεται από CD-ROM που περιλαμβάνει σχέδια επίδειξης αντίστοιχα των μαθημάτων του *Discovering Geometry*.

Επικουρικό υλικό για το Sketchpad διατίθεται επίσης μαζί με ορισμένα άλλα βιβλία γεωμετρίας, αν και κανένα δεν παρέχει ένα πακέτο τόσο πλήρες όσο το *Discovering Geometry* σε συνδυασμό με το Sketchpad. Εάν χρησιμοποιείτε κάποιο διαφορετικό βιβλίο γεωμετρίας, πληροφορηθείτε αν για το βιβλίο αυτό υπάρχει επικουρικό υλικό του Sketchpad.

Το βιβλίο *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad* από τις Εκδόσεις Key Curriculum Press περιέχει περισσότερες από 100 εφαρμόσιμες δραστηριότητες, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί με οποιοδήποτε συνοδευτικό κείμενο. Ένα CD-ROM με παραδείγματα σχεδίων συνοδεύει τις δραστηριότητες. Επίσης, υπάρχουν και άλλα σχετικά βιβλία με πιο εξειδικευμένες δραστηριότητες από τις εκδόσεις Key Curriculum Press. Στο βιβλίο που κρατάτε εμπεριέχονται υποδειγματικές δραστηριότητες από ορισμένα από αυτά τα βιβλία.

Το *Exploring Geometry* περιέχει υλικό δραστηριοτήτων με το Sketchpad για την κάλυψη σχεδόν ολόκληρου του περιεχομένου ενός ετήσιου μαθήματος σχολικής γεωμετρίας. Ασφαλώς, άλλα βιβλία με δραστηριότητες μπορούν επίσης να καλύψουν ένα μεγάλο μέρος της ύλης άλλων τομέων των μαθηματικών. Ωστόσο, δεν υποστηρίζουμε την εγκατάλειψη όλων των διαφορετικών μεθόδων διδασκαλίας και την αποκλειστική χρήση του υπολογιστή. Αποτελεί πεποίθησή μας ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα από μια ποικιλία διαφορετικών εμπειριών. Οι μαθητές χρειάζονται την εμπειρία των κατασκευών με το χέρι, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη, με μολύβι και χαρτί, καθώς επίσης και την εμπειρία των συζητήσεων. Οι μαθητές πρέπει να εφαρμόζουν τη γεωμετρία σε πραγματικές καταστάσεις. Είναι αναγκαίο να διαπιστώσουν τη χρήση της γεωμετρίας στην τέχνη και στην αρχιτεκτονική, αλλά και γενικότερα στη φύση. Παρ' ότι το Sketchpad μπορεί να εξυπηρετήσει ως μέσο σε πολλές από αυτές τις εμπειρίες, η ισχύς του βρίσκει την πλήρη έκφρασή της όταν οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν σε διαφορετικές καταστάσεις όσα έμαθαν με το Sketchpad. Όσο ελκυστικό και αν είναι το Sketchpad, είναι σημαντικό οι μαθητές να μην αποκομίσουν την εσφαλμένη εντύπωση πως η γεωμετρία υπάρχει μόνο στα βιβλία και στην οθόνη του υπολογιστή τους.

Υποδειγματικές δραστηριότητες

Εισαγωγή

Οι υποδειγματικές δραστηριότητες για τη σχολική τάξη θα σας δώσουν μια ιδέα για ορισμένα από τα είδη μαθησιακών εμπειριών τα οποία είναι δυνατά με το Sketchpad. Στις Σημειώσεις διδασκαλίας είδατε τρία διαφορετικά είδη μαθημάτων: μια *έρευνα*, μια *εξερεύνηση* και μια *επίδειξη*. Ακολούθως θα βρείτε περισσότερες δραστηριότητες για καθεμία από τις παραπάνω κατηγορίες. Η συλλογή αυτή δεν αποτελεί ένα πλήρες πρόγραμμα σπουδών ούτε ένα περιεκτικό σύνολο δραστηριοτήτων για ολόκληρο το σχολικό έτος κάθε τάξης στην οποία διδάσκεται το μάθημα της γεωμετρίας με βάση το *Ενιαίο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών*.

Τα θέματα των δραστηριοτήτων κυμαίνονται από τη δημιουργία γεωμετρικών μορφών τέχνης έως τη μη ευκλείδεια γεωμετρία. Ο βαθμός δυσκολίας τους είναι κατάλληλος για μαθητές γυμνασίου και λυκείου αλλά και σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμη και για πρωτοετείς φοιτητές. Παρουσιάζονται 31 δραστηριότητες και προφανώς δεν είναι δυνατή η χρησιμοποίηση όλων στην ίδια τάξη.

Το λογισμικό περιλαμβάνει επίσης πάνω από 100 δείγματα σχεδίων (αρχεία τύπου .gsp) δραστηριοτήτων, κατάλληλα για εξερεύνηση και πειραματισμό σε θέματα ευκλείδειας γεωμετρίας αλλά και γενικότερων γεωμετρικών εννοιών.

Η παρακάτω λίστα παραθέτει τα ονόματα των υποδειγματικών δραστηριοτήτων του παρόντος βιβλίου.

- Ιδιότητες της ανάκλασης
- Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων
- Η ευθεία του Euler
- Το θεώρημα του Morley
- Το θεώρημα του Ναπολέοντα
- Κατασκευή ρόμβων
- Τετράπλευρα μέσων
- Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο
- Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού
- Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος
- Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
- Λόγοι εμβαδών
- Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων
- Η απόδειξη του Leonardo da Vinci
- Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους
- Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα
- Μέσα χορδών
- Γραφήματα οικογένειας παραβολών
- Διάμεσοι ενός τριγώνου
- Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου
- Ύψη ενός τριγώνου
- Διχοτόμοι ενός τριγώνου
- Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων
- Ιδιότητες ρόμβων
- Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων
- Εμβαδόν/Περίμετρος τριγώνου
- Εμβαδόν ενός τραπεζίου
- Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας
- Επίδειξη: Ισότητα Τριγώνων – υπγ
- Επίδειξη: Ισότητα Τριγώνων - ππγ
- Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

Οι *Σημειώσεις διδασκαλίας* για καθεμιά από αυτές τις δραστηριότητες παρουσιάζονται αμέσως μετά από την τελευταία δραστηριότητα.
Εξετάστε ορισμένες ή όλες τις δραστηριότητες στο Sketchpad μόνοι σας ή μαζί με τους μαθητές σας και βρείτε τρόπους χρήσης τους στην τάξη. Στη συνέχεια καλείστε να συμμετάσχετε στη δημιουργία του πλέον περιεκτικού υλικού λογισμικού υποστήριξης της νέας σχολικής τάξης, υλικού που αντανακλά τα επιτεύγματα καθηγητών και μαθητών με τη βοήθεια σύγχρονων εργαλείων διδασκαλίας και εκμάθησης.

Ιδιότητες της ανάκλασης

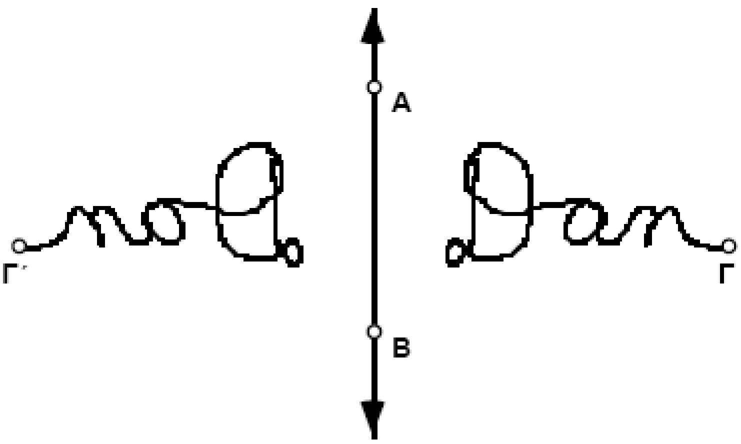
Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Όταν παρατηρείτε τον εαυτό σας σε έναν καθρέφτη, σε ποια απόσταση μέσα στον καθρέφτη φαίνεται το είδωλό σας; Γιατί το είδωλο είναι ανεστραμμένο; Οι ανακλάσεις στη γεωμετρία διαθέτουν ορισμένες από τις ιδιότητες που παρατηρείτε σε έναν καθρέφτη. Στη δραστηριότητα αυτή θα ερευνήσετε τις ιδιότητες των ανακλάσεων, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση του κατοπτρικού ειδώλου του πραγματικού αντικειμένου.

Σχέδιο και έρευνα: Γράψιμο στον άξονα συμμετρίας

1. Κατασκευάστε κατακόρυφη ευθεία *AB*.

2. Κατασκευάστε σημείο Γ δεξιά της ευθείας.



Κάντε διπλό κλικ στην ευθεία.

3. Επιλέξτε την ευθεία *AB* ως άξονα συμμετρίας.

4. Δημιουργήστε την ανάκλαση του σημείου Γ για να κατασκευαστεί το σημείο Γ΄.

Επιλέξτε τα δύο σημεία. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων** από το μενού **Προβολή**. Ένα σύμβολο επιλογής υποδηλώνει ότι η εντολή έχει ενεργοποιηθεί. Επιλέξτε την εντολή Διαγραφή ιχνών, για να διαγράψετε τα ίχνη.

5. Ενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση Ίχνους: Σημεία για τα σημεία Γ και Γ΄.

6. Κάντε κλικ στον κενό χώρο και μετά επιλέξτε το σημείο Γ.

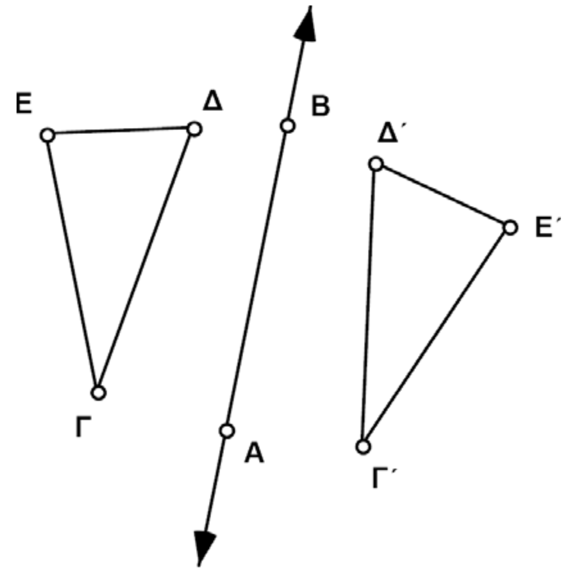
7. Μεταφέρετε το σημείο Γ έτσι ώστε να σχεδιάσει το όνομά σας.

Ε1. Τι σχεδιάζει το σημείο Γ΄;

8. Προσπαθήστε να μεταφέρετε το σημείο Γ΄ έτσι ώστε το σημείο Γ να σχεδιάσει το όνομά σας.

Ιδιότητες της ανάκλασης (συνέχεια)

Σχέδιο και έρευνα: Ανάκλαση γεωμετρικών σχημάτων



Επιλέξτε τα σημεία Γ και Γ΄. Στο μενού **Προβολή** θα δείτε επιλεγμένη την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων**. Επιλέξτε εκ νέου την εντολή, ώστε να αναιρεθεί η επιλογή της.

9. Απενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείων για τα σημεία Γ και Γ΄.

10. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΓΔΕ.

Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα (όλες τις κορυφές και τις ακμές). Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Ανάκλαση** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

11. Κατασκευάστε την ανάκλαση του τριγώνου ΓΔΕ (πλευρές και κορυφές) ως προς την ευθεία ΑΒ.

12. Σύρτε τα διάφορα τμήματα κάθε τριγώνου και παρατηρήστε τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται τα τρίγωνα. Επίσης, σύρτε τον άξονα συμμετρίας.

13. Μετρήστε το μήκος των πλευρών των τριγώνων ΓΔΕ και Γ΄Δ΄Ε΄.

Επιλέξτε τρία σημεία που ορίζουν τη γωνία με την κορυφή στο μέσο. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Γωνίας** από το μενού **Μέτρηση**.

14. Μετρήστε μια γωνία του τριγώνου ΓΔΕ και την αντίστοιχη γωνία του τριγώνου Γ΄Δ΄Ε΄.

Ε2. Τι επίδραση έχει η ανάκλαση στα μεγέθη του μήκους και της γωνίας;

Ε3. Ένα σχήμα και το είδωλό του είναι πάντοτε όμοια; Διατυπώστε την απάντησή σας ως υπόθεση.

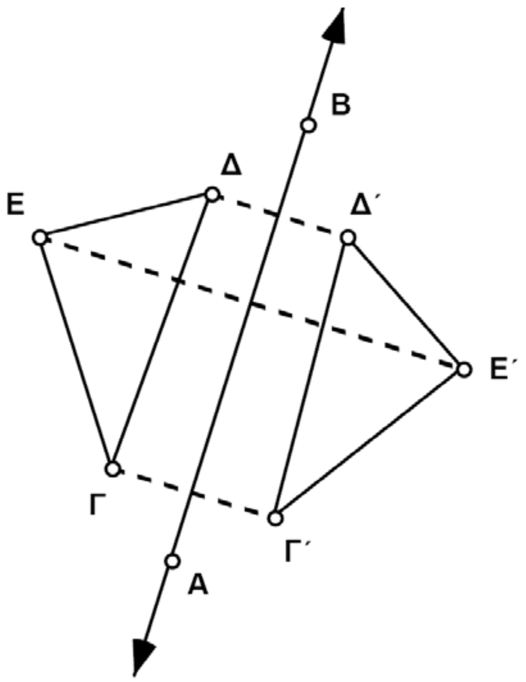
Η απάντησή σας στο ερώτημα Ε4. δείχνει, ότι μια ανάκλαση αντιστρέφει τον προσανατολισμό ενός σχήματος.

Ε4. Η αλφαβητική σειρά από το Γ στο Δ και στο Ε αντιστοιχεί σε δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο προσανατολισμό των κορυφών του τριγώνου ΓΔΕ; Ποιος είναι ο προσανατολισμός των κορυφών Γ΄, Δ΄ και Ε΄ στο ανακλασθέν τρίγωνο;

Ιδιότητες της ανάκλασης (συνέχεια)

Το **Πάχος γραμμής** ορίζεται από το μενού **Προβολή**.

15. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν κάθε σημείο με το είδωλό του: το Γ με το Γ΄, το Δ με το Δ΄ και το Ε με το Ε΄. Τα τμήματα να είναι διακεκομμένα.



Ίσως θέλετε να κατασκευάσετε σημεία τομής και να μετρήσετε αποστάσεις για την αναζήτηση σχέσεων μεταξύ του άξονα συμμετρίας και των διακεκομμένων τμημάτων.

16. Μεταφέρετε τα διάφορα μέρη του σχεδίου και παρατηρήστε τις σχέσεις μεταξύ των διακεκομμένων τμημάτων και του άξονα συμμετρίας.

Ε5. Πώς σχετίζεται ο άξονας συμμετρίας με ένα τμήμα που συνδέει ένα σημείο και το ανακλασθέν είδωλό του;

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι το Sketchpad δε διέθετε το μενού **Μετασχηματισμός**. Πώς θα κατασκευάζατε το κατοπτρικό είδωλο ενός δοθέντος σημείου ως προς μια ευθεία; Προσπαθήστε να απαντήσετε. Αρχίστε με ένα σημείο και μια ευθεία. Κατασκευάστε την ανάκλαση του σημείου ως προς την ευθεία χρησιμοποιώντας απλώς τα εργαλεία και το μενού **Κατασκευή**. Περιγράψτε τη μέθοδό σας.

2. Χρησιμοποιήστε μια ανάκλαση για την κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου. Εξηγήστε τις ενέργειές σας.

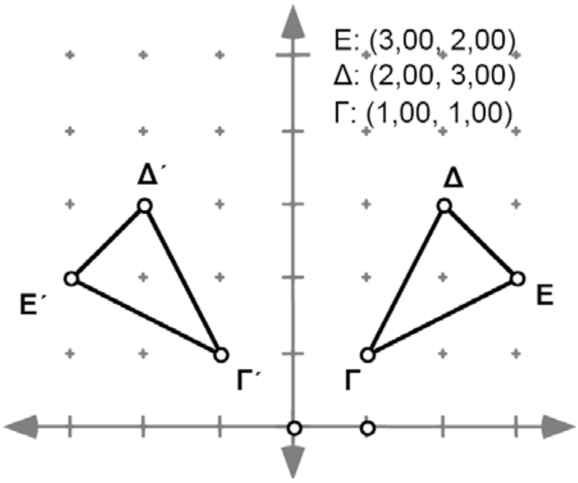
Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Στη δραστηριότητα αυτή θα εξετάσετε τι συμβαίνει στις συντεταγμένες σημείων κατά την ανάκλασή τους ως προς τους άξονες x και y στο επίπεδο συντεταγμένων.

Από το μενού **Γράφημα** επιλέξτε την εντολή **Εμφάνιση πλέγματος**. Βεβαιωθείτε ότι η εντολή **Τοποθέτηση σημείων** είναι επιλεγμένη στο μενού **Γράφημα**.

1. Εμφανίστε το πλέγμα.



2. Σχεδιάστε το τρίγωνο ΓΔΕ με τις κορυφές στο πλέγμα.

3. Μετρήστε τις συντεταγμένες κάθε κορυφής.

Κάντε διπλό κλικ στον άξονα για την επιλογή του ως άξονα συμμετρίας.

4. Επιλέξτε τον άξονα y ως άξονα συμμετρίας.

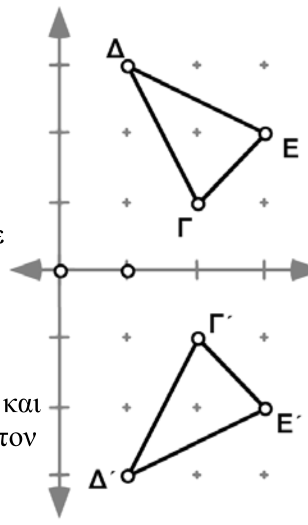
Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Ανάκλαση** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

5. Δημιουργήστε την ανάκλαση του τριγώνου.

6. Μετρήστε τις συντεταγμένες των κορυφών του ειδώλου.

7. Σύρτε τις κορυφές σε διαφορετικά σημεία στο πλέγμα και αναζητήστε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου και των συντεταγμένων του ανακλασθέντος ως προς τον άξονα y ειδώλου.

Ε1. Περιγράψτε οποιαδήποτε σχέση παρατηρείτε μεταξύ των συντεταγμένων των κορυφών του αρχικού τριγώνου και των συντεταγμένων των ανακλασθέντων ως προς τον άξονα y ειδώλων τους.



8. Επιλέξτε τον άξονα x ως άξονα συμμετρίας και δημιουργήστε ανάκλαση του αρχικού τριγώνου.

9. Πριν από τη μέτρηση των συντεταγμένων, μπορείτε να μαντέψετε την τιμή τους; Μετρήστε τις συντεταγμένες για να επιβεβαιώσετε την εικασία.

Ε2. Περιγράψτε οποιαδήποτε σχέση παρατηρείτε μεταξύ των συντεταγμένων των αρχικών σημείων και των συντεταγμένων των ανακλασθέντων ως προς τον άξονα x ειδώλων τους.

Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

Σχεδιάστε μια ευθεία στο πλέγμα η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία 45^{o} με τον άξονα x (με άλλα λόγια, η ευθεία $y = x$). Δημιουργήστε την ανάκλαση του τριγώνου σας ως προς την ευθεία αυτή. Τι παρατηρείτε σχετικά με τις συντεταγμένες των κορυφών αυτού του ειδώλου;

Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler

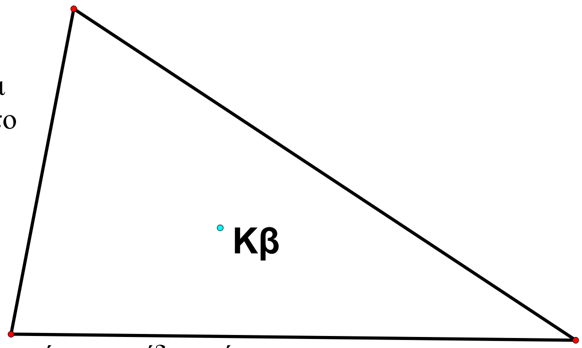
Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Σε αυτή την έρευνα αναζητάτε μια σχέση μεταξύ τεσσάρων ειδικών σημείων ενός τριγώνου: του έγκεντρου, του περίκεντρου, του ορθόκεντρου και του κέντρου βάρους. Για αυτά τα ειδικά σημεία του τριγώνου θα χρειαστείτε Προσαρμοσμένα εργαλεία. Χρησιμοποιήστε τα σχετικά Προσαρμοσμένα εργαλεία που συνοδεύουν το Sketchpad.

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες**.

1. Ανοίξτε το αρχείο **Ευθύγραμμο τμήμα του Euler.gsp**. Αυτό το αρχείο περιέχει τέσσερα Προσαρμοσμένα εργαλεία με όνομα: Κέντρο βάρους, Περίκεντρο, Έγκεντρο και Ορθόκεντρο. Πρόκειται για προκατασκευασμένα εργαλεία που σας διευκολύνουν να σχεδιάσετε τα παραπάνω τέσσερα ειδικά κέντρα του τριγώνου.

2. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Κέντρο βάρους** και κάντε κλικ με το ποντίκι σε τρία σημεία του κενού σχεδίου σας, για να ορίσετε τις τρεις κορυφές του τριγώνου.



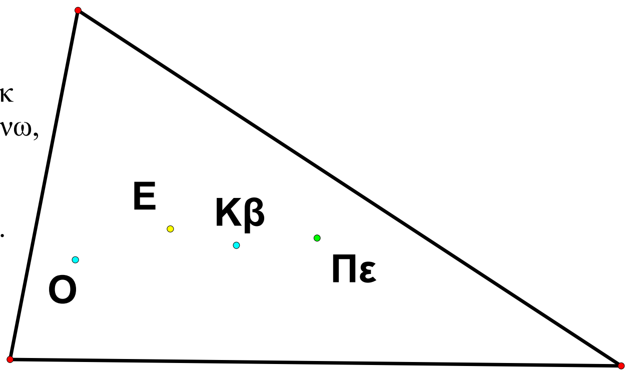
3. Στο τρίγωνο που δημιουργείται παρατηρήστε ότι εμφανίζεται το σημείο **Κβ** (Κέντρο βάρους).

4. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Περίκεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι σε τρία ίδια σημεία του τριγώνου σας όπως πριν, για να ορίσετε το ίδιο τρίγωνο στο οποίο θα σχεδιαστεί το περίκεντρό του.

5. Εμφανίζεται το σημείο **Πε** (Περίκεντρο).

6. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Έγκεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι και πάλι σε τρία ίδια σημεία του τριγώνου σας όπως πριν, για να ορίσετε το ίδιο τρίγωνο στο οποίο θα σχεδιαστεί το έγκεντρό του. Εμφανίζεται το σημείο **Ε** (Έγκεντρο).

7. Επιλέξτε τέλος το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Ορθόκεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι όπως παραπάνω, για να σχεδιαστεί το ορθόκεντρο. Εμφανίζεται το σημείο **Ο** (Ορθόκεντρο).



9. Τώρα θα πρέπει να έχετε ένα τρίγωνο και τα τέσσερα κέντρα του.

Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler (συνέχεια)

10. Σύρτε το τρίγωνο. Παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα τέσσερα σημεία.

Ε1. Τρία από τα τέσσερα σημεία είναι πάντοτε συγγραμμικά. Ποια είναι αυτά;

10. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει τα τρία συγγραμμικά σημεία και ονομάζεται *ευθύγραμμο τμήμα του Euler*.

11. Σύρτε και πάλι το τρίγωνο και αναζητήστε ενδιαφέρουσες σχέσεις αναφορικά με το ευθύγραμμο τμήμα του Euler. Εξετάστε ειδικά τρίγωνα, όπως το ισοσκελές και το ορθογώνιο.

Ε2. Περιγράψτε τυχόν ενδιαφέροντα ειδικά τρίγωνα που σχηματίζουν τα κέντρα του τριγώνου ή που βρίσκονται σε ενδιαφέρουσες θέσεις.

Ε3. Ποια από τα τρία σημεία είναι πάντοτε άκρα του ευθύγραμμου τμήματος του Euler και ποιο σημείο βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στα άκρα του;

Για τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων, επιλέξτε τα δύο σημεία. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Απόστασης** από το μενού **Μέτρηση**. (Η μέτρηση της απόστασης μεταξύ σημείων είναι ένας εύκολος τρόπος μέτρησης του μήκους ενός τμήματος μιας ευθείας.)

12. Μετρήστε τις αποστάσεις κατά μήκος των δύο τμημάτων του ευθύγραμμου τμήματος του Euler.

13. Σύρτε το τρίγωνο και αναζητήστε μια σχέση μεταξύ αυτών των μηκών.

Ε4. Πώς σχετίζονται μεταξύ τους τα μήκη των δύο τμημάτων του ευθύγραμμου τμήματος του Euler; Ελέγξτε την υπόθεσή σας μέσω του Υπολογιστή.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Κατασκευή ενός κύκλου με κέντρο στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος του Euler διερχόμενου από το μέσο μιας από τις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος ονομάζεται *κύκλος των εννέα σημείων* ή *κύκλος του Euler*. Το μέσο το οποίο διέρχεται είναι ένα από τα εννέα σημεία. Ποια είναι τα υπόλοιπα οκτώ; Υπόδειξη: έξι από αυτά σχετίζονται με τα ύψη και το ορθόκεντρο.

2. Μετά από την κατασκευή του κύκλου των εννέα σημείων, όπως περιγράφεται προηγουμένως, σύρτε το τρίγωνό σας και ερευνήστε ειδικά τρίγωνα. Περιγράψτε τρίγωνα στα οποία τα εννέα σημεία συμπίπτουν.

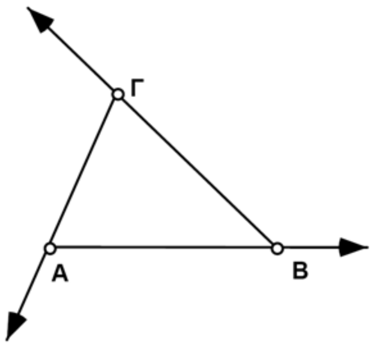
Το θεώρημα του Morley

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Ίσως γνωρίζετε ότι η τριχοτόμηση μιας γωνίας με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη. Ωστόσο, το Sketchpad καθιστά εύκολη την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Στην έρευνα αυτή θα τριχοτομήσετε τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου και θα ανακαλύψετε ένα εκπληκτικό γεγονός σχετικά με τις τομές αυτών των τριχοτόμων.

Σχέδιο και έρευνα

1. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο ημιευθειών για να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ. Σχεδιάστε τις ημιευθείες σας με αριστερόστροφη φορά όπως στο σχήμα.



Βήμα 1

2. Μετρήστε τη γωνία *∠ΒΑΓ*.

Κάντε κλικ σε μια μέτρηση για την εισαγωγή της σε έναν υπολογισμό.

3. Χρησιμοποιήστε τον Υπολογιστή για τη δημιουργία μιας έκφρασης για το μέτρο *∠ΒΑΓ/3*.

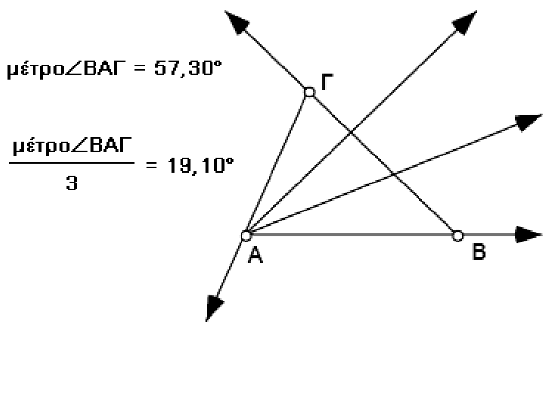
Κάντε διπλό κλικ στο σημείο Α για την επιλογή του ως κέντρου.

4. Επιλέξτε το σημείο Α ως κέντρο περιστροφής.

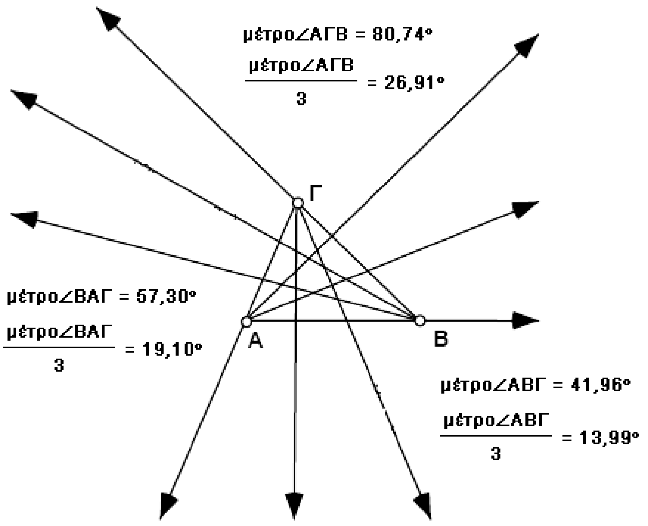
Επιλέξτε τον υπολογισμό. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Επιλογή γωνίας** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

5. Επιλέξτε τη μέτρηση γωνίας μέτρο *∠ΒΑΓ/3*.

6. Περιστρέψτε την ημιευθεία ΑΒ κατά την επιλεγμένη γωνία. Περιστρέψτε την ημιευθεία που προκύπτει για την τριχοτόμηση της γωνίας *∠ΓΑΒ*.



Βήματα 2-6



Βήμα 7

Το θεώρημα του Morley (συνέχεια)

7. Μετρήστε τις δύο άλλες γωνίες και επαναλάβετε τα βήματα 3-6 για τις γωνίες αυτές για την τριχοτόμησή τους.

8. Σύμφωνα με το θεώρημα του Morley, συγκεκριμένες τομές αυτών των τριχοτόμων σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μπορείτε να το βρείτε; Σύρτε τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε τις τομές των τριχοτόμων.

Κατασκευάστε σημεία τομής και επιλέξτε τα. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικό πολυγώνου** από το μενού **Κατασκευή**.

9. Αν πιστεύετε πως έχετε ανακαλύψει ποιες τομές σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, κατασκευάστε αυτά τα σημεία τομής και το εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου.

10. Σύρτε με τη βοήθεια του ποντικιού, ώστε να επαληθεύσετε ότι κατασκευάσατε το τρίγωνο με τα σωστά σημεία τομής. Εάν δεν είστε βέβαιοι με την πρώτη ματιά, προχωρήστε στις αναγκαίες μετρήσεις για να επιβεβαιώσετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Ε1. Διατυπώστε το θεώρημα του Morley.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε άλλες σχέσεις ή ειδικά τρίγωνα στο σχήμα σας.

2. Κατασκευάστε τις ημιευθείες που διέρχονται από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και τις απέναντι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου. Τι παρατηρείτε;

3. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο χρησιμοποιώντας ευθείες αντί των ημιευθειών. Τριχοτομήστε ένα σύνολο εξωτερικών γωνιών. Μπορείτε να βρείτε ένα ισόπλευρο τρίγωνο μεταξύ των τομών αυτών των τριχοτόμων;

Το θεώρημα του Ναπολέοντα

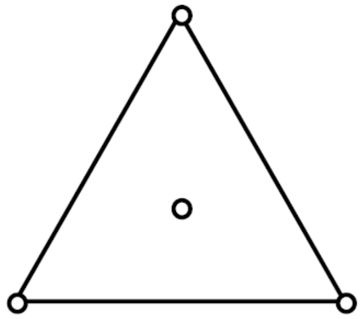
Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Ο Γάλλος αυτοκράτορας Ναπολέων Βοναπάρτης θεωρούσε τον εαυτό του ως έναν ερασιτέχνη γεωμέτρη και αρεσκόταν στη συναναστροφή με μαθηματικούς. Το θεώρημα που θα εξετάσετε σε αυτή τη δραστηριότητα αποδίδεται σε αυτόν.

Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες,** επιλέξτε το αρχείο **Ναπολεόντειο θεώρημα.gsp** και χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τρίγωνο (από πλευρά)**.

1. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο ή να κατασκευάσετε το τρίγωνο εξαρχής. Βεβαιωθείτε πως το τρίγωνο ελέγχεται από δύο κορυφές (όχι το κέντρο). Εάν χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο, επιλέξτε ένα τρίγωνο από πλευρά και προχωρήστε σε διαγραφή του εσωτερικού, εφόσον είναι απαραίτητο.



Ένας τρόπος κατασκευής του κέντρου είναι να κατασκευάσετε δύο διαμέσους και το σημείο τομής τους.

2. Κατασκευάστε το κέντρο του τριγώνου.

3. Αποκρύψτε τα μη απαραίτητα κατασκευασμένα στοιχεία, ώστε να απομείνει ένα τρίγωνο όπως στο σχήμα.

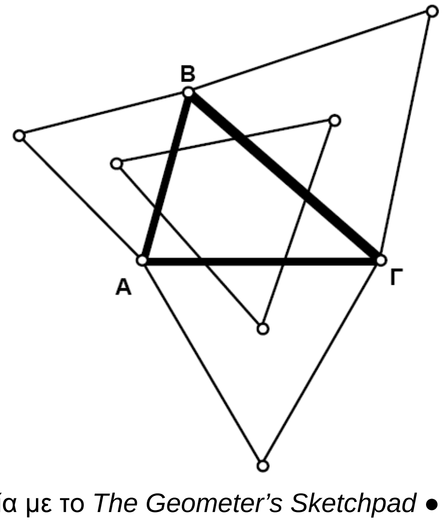
Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου...** από τα **Προσαρμοσμένα εργαλεία** στην Εργαλειοθήκη.

4. Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο με βάση την κατασκευή σας. Μπορείτε να του δώσετε ένα σχετικό όνομα, όπως **Κέντρο ισόπλευρου τριγώνου**.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσετε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων στις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου.

5. Ανοίξτε νέο σχέδιο.

6. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.



Το θεώρημα του Ναπολέοντα (συνέχεια)

Βεβαιωθείτε για τη σύνδεση κάθε ισόπλευρου τριγώνου με ένα ζεύγος κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ. Εάν το ισόπλευρο τρίγωνό σας δεν είναι σωστό (επικαλύπτει το εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ) ή δε συνδέεται κατάλληλα με τις κορυφές, αναιρέστε την ενέργεια και προσπαθήστε εκ νέου.

7. Χρησιμοποιήστε το νέο Προσαρμοσμένο εργαλείο που δημιουργήσατε για την κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων σε κάθε πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

8. Σύρτε το σχήμα ώστε να βεβαιωθείτε πως κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει συνδεθεί κατάλληλα με κάθε πλευρά.

9. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα κέντρα των ισόπλευρων τριγώνων.

10. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και παρατηρήστε το τριγώνο που σχηματίζεται από τα κέντρα των ισόπλευρων τριγώνων. Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται εξωτερικό ναπολεόντειο τρίγωνο του τριγώνου ΑΒΓ.

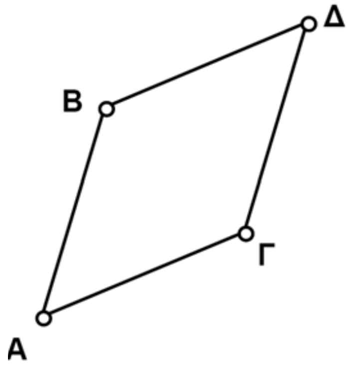
Ε1. Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το θεώρημα του Ναπολέοντα;

Περαιτέρω εξερεύνηση

Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν κάθε κορυφή του αρχικού τριγώνου με την πλέον απόμακρη κορυφή του ισόπλευρου τριγώνου στην απέναντι πλευρά. Τι μπορείτε να συμπεράνετε γι' αυτά τα τρία ευθύγραμμα τμήματα;

<u>Κατασκευή ρόμβων</u>

Ονοματεπώνυμο(α): ____________________



Πόσους τρόπους μπορείτε να σκεφτείτε για την κατασκευή ενός ρόμβου; Εξετάστε μεθόδους που χρησιμοποιούν το μενού **Κατασκευή**, το μενού **Μετασχηματισμός** ή συνδυασμούς αυτών. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις διαγώνιους. Γράψτε μια σύντομη περιγραφή κάθε μεθόδου κατασκευής μαζί με τις ιδιότητες των ρόμβων στις οποίες βασίζεται κάθε μέθοδος.

Μέθοδος 1:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 2:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 3:

Ιδιότητες:

Μέθοδος 4:

Ιδιότητες:

Τετράπλευρα μέσων

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε κάτι το εκπληκτικό σχετικά με το τετράπλευρο που σχηματίζεται αν συνδέσετε τα μέσα των πλευρών ενός άλλου τετράπλευρου.

Σχέδιο και έρευνα

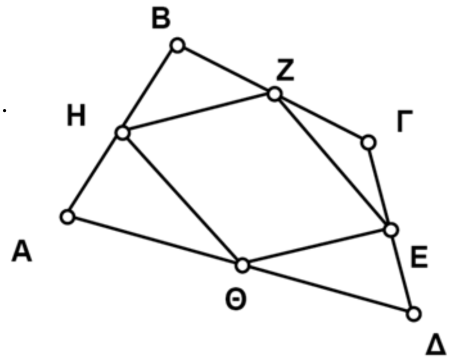
Εάν επιλέξετε όλες τις πλευρές, μπορείτε να κατασκευάσετε ταυτόχρονα και τα τέσσερα μέσα σημεία.

1. Κατασκευάστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

2. Κατασκευάστε τα μέσα των πλευρών του.

3. Συνδέστε τα μέσα για την κατασκευή ενός άλλου τετράπλευρου *ΕΖΗΘ*.

4. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τετράπλευρου και παρατηρήστε τη συμπεριφορά του νέου τετράπλευρου.



5. Μετρήστε το μήκος των τεσσάρων πλευρών του νέου τετράπλευρου.

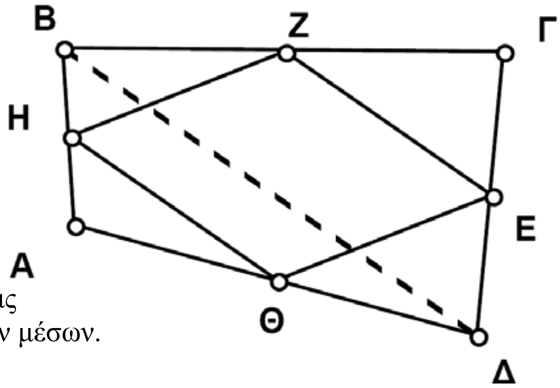
6. Μετρήστε την κλίση των τεσσάρων πλευρών του νέου τετράπλευρου.

Ε1. Τι είδους τετράπλευρο φαίνεται πως είναι το τετράπλευρο των μέσων; Πώς υποστηρίζουν οι μετρήσεις αυτή την εικασία;

7. Κατασκευάστε μια διαγώνιο.

8. Μετρήστε το μήκος και την κλίση της διαγωνίου.

9. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τετράπλευρου και παρατηρήστε τη σχέση μήκους και κλίσης της διαγωνίου με τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών του τετράπλευρου των μέσων.



Ε2. Η διαγώνιος διαιρεί το αρχικό τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα. Κάθε τρίγωνο έχει ως ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του μια από τις πλευρές του τετράπλευρου των μέσων. Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός και όσα γνωρίζετε περί κλίσης και μήκους της διαγωνίου ώστε να δώσετε μια γραπτή εξήγηση για την ορθότητα της εικασίας στο Ερώτημα 1. Χρησιμοποιήστε ξεχωριστή σελίδα, αν είναι απαραίτητο.

Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο

Ονοματεπώνυμο(α): ________________________

Στη δραστηριότητα αυτή θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ του μήκους ενός κύκλου και της διαμέτρου του. Ακόμη και αν γνωρίζετε αυτή τη σχέση, η έρευνα ίσως την παρουσιάσει κατά ένα διαφορετικό τρόπο.

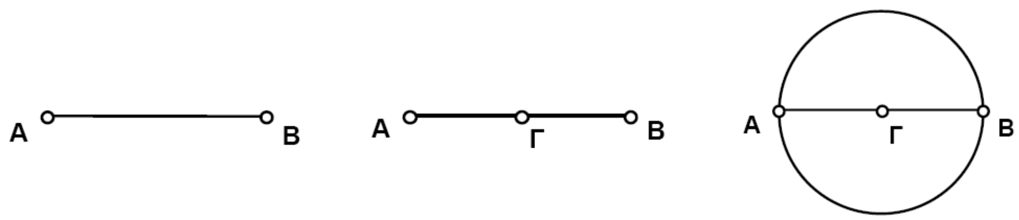
Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα *AB*.

2. Κατασκευάστε το σημείο Γ, δηλαδή το μέσο του *AB*.

Βεβαιωθείτε ότι ο δείκτης βρίσκεται ακριβώς στο σημείο Β όταν αφήσετε ελεύθερο το πλήκτρο του ποντικιού.

3. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ.



Βήμα 1 Βήμα 2 Βήμα 3

Επιλέξτε τον κύκλο και την εντολή **Μήκους κύκλου** από το μενού **Μέτρηση**.

4. Μετρήστε το μήκος του κύκλου.

5. Μετρήστε το τμήμα AB (τη διάμετρο του κύκλου).

6. Μικρύνετε τον κύκλο.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση του μήκους και τη μέτρηση του μήκους κύκλου. Στη συνέχεια επιλέξτε την εντολή **Πινακοποίη-ση** από το μενού **Γράφημα**.

7. Δημιουργήστε έναν πίνακα για τη μέτρηση του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος και τη μέτρηση του μήκους κύκλου.

8. Μεγαλώστε λίγο τον κύκλο. Κατόπιν προχωρήστε σε προσθήκη εγγραφής στον πίνακα.

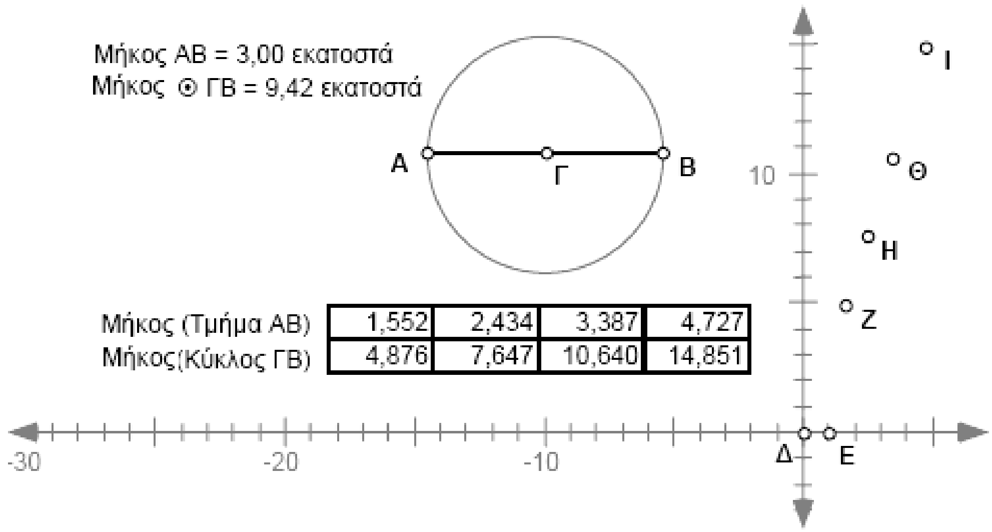
Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο (συνέχεια)

Κάντε διπλό κλικ στο εσωτερικό του πίνακα για την προσθήκη της εγγραφής.

9. Επαναλάβετε το βήμα 8 ωσότου ο πίνακας περιέχει τουλάχιστον τέσσερις εγγραφές.

Κάντε κλικ στο εσωτερικό του πίνακα για να επιλεγεί. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση δεδομένων πίνακα** από το μενού **Γράφημα**. Κάντε κλικ στο **Αποτύπωση**.

10. Αποτυπώστε τα δεδομένα του πίνακα. Ίσως χρειαστεί να σύρετε το σημείο Ε προς το σημείο Δ ώστε να προσαρμόσετε την κλίμακα των αξόνων σας προκειμένου να είναι ορατά τα σημεία.



Μήκος (Τμήμα AB)	1,552	2,434	3,387	4,727
Μήκος(Κύκλος ΓB)	4,876	7,647	10,640	14,851

Ε1. Περιγράψτε τα σημεία που εμφανίζονται στο γράφημα.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση της διαμέτρου και τη μέτρηση του μήκους κύκλου. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**.

11. Αποτυπώστε τις μετρήσεις της διαμέτρου και του μήκους κύκλου με συντεταγμένες (x, y). Αλλάξτε το χρώμα του σημείου, ώστε να διακρίνεται από άλλα σημεία του γραφήματος. Επίσης, ενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείων από το μενού Προβολή.

12. Σύρτε το σημείο Α ή το σημείο Β για να τροποποιηθεί ο κύκλος. Παρατηρήστε το σημείο όπως αποτυπώνεται.

13. Κατασκευάστε μια ημιευθεία από το σημείο Δ προς οποιοδήποτε από τα αποτυπωμένα σημεία.

14. Μετρήστε την κλίση της ημιευθείας.

Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο (συνέχεια)

Ε2. Πώς σχετίζεται η κλίση της ημιευθείας με το λόγο μήκους κύκλου προς διάμετρο;

Ε3. Ποια είναι η σημασία του γεγονότος ότι όλα τα σημεία που αποτυπώνονται βρίσκονται πάνω σε αυτή την ημιευθεία;

Ε4. Ο λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο αναπαρίσταται με το γράμμα π. Συμπληρώστε τις ακόλουθες εκφράσεις χρησιμοποιώντας τον αριθμό π, το γράμμα C για το μήκος κύκλου και το γράμμα D για τη διάμετρο:

π = ______________________

C = ______________________

Ε5. Γράψτε μια σχέση για το μήκος κύκλου χρησιμοποιώντας τα C, π και ρ (ακτίνα κύκλου).

<u>Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού</u>

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Έστω ότι διαθέτετε ένα συγκεκριμένο φράχτη και θέλετε να περιφράξετε τη μεγαλύτερη δυνατή ορθογώνια περιοχή. Ποιο ορθογώνιο θα επιλέγατε; Με άλλα λόγια, ποιο είδος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου έχει το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο; Θα ανακαλύψετε την απάντηση στα πλαίσια αυτής της έρευνας. Επίσης, αν έχετε ήδη μια ιδέα, η έρευνα αυτή θα σας βοηθήσει να επιβεβαιώσετε, αλλά και να θεμελιώσετε την ιδέα σας.

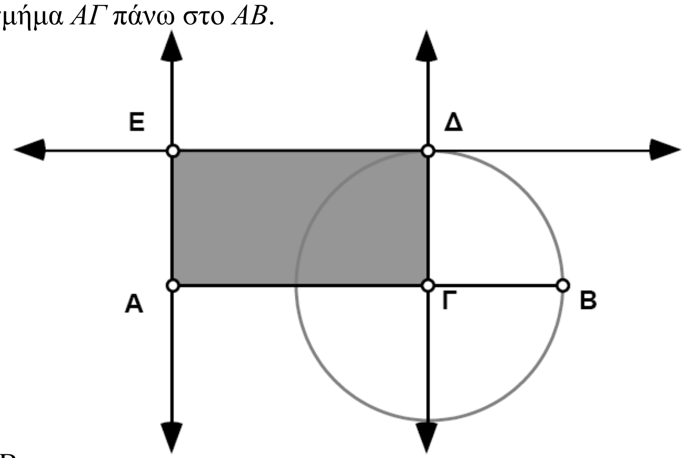
Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ*.

2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΓ* πάνω στο *ΑΒ*.

Επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ*, το σημείο Α και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

3. Κατασκευάστε ευθείες κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ* και διερχόμενες από τα σημεία Α και Γ.



Προσέξτε να αφήσετε ελεύθερο το πλήκτρο του ποντικιού όταν ο δείκτης είναι πάνω στο σημείο Β.

4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ.

5. Κατασκευάστε το σημείο Δ στο σημείο τομής του κύκλου με την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το σημείο Γ.

6. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Δ και παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ*.

7. Κατασκευάστε το σημείο Ε, την τέταρτη κορυφή του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου ΑΓΔΕ.

Επιλέξτε διαδοχικά τις κορυφές του ορθογώνιου. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικού πολυγώνου** από το μενού **Κατασκευή**.

8. Κατασκευάστε το εσωτερικό ΑΓΔΕ.

9. Μετρήστε το εμβαδόν και την περίμετρο αυτού του πολυγώνου.

10. Σύρτε το σημείο Γ εμπρός και πίσω ώστε να παρατηρήσετε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το εμβαδόν και η περίμετρος του παραλληλόγραμμου.

Επιλέξτε το σημείο Α και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Απόσταση** από το μενού **Μέτρηση**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τη μέτρηση του *ΑΕ*.

11. Μετρήστε τα ΑΓ και ΑΕ.

Ε1. Χωρίς να κάνετε μέτρηση, δηλώστε πώς σχετίζεται το ΑΒ με την περίμετρο του ορθογώνιου. Εξηγήστε γιατί το παραλληλόγραμμο αυτό έχει σταθερή περίμετρο.

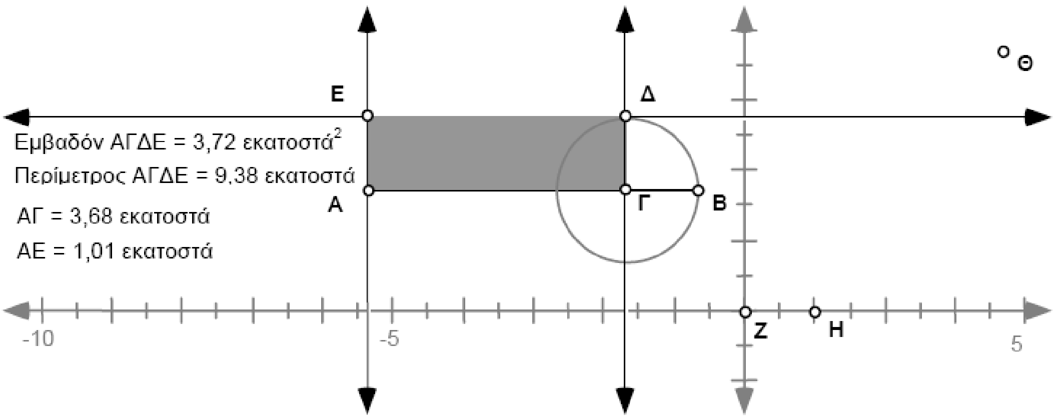
Ε2. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Γ παρατηρήστε ποιο ορθογώνιο σχήμα δίνει το μέγιστο εμβαδόν. Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, αυτό το σχήμα;

Στα βήματα 12-14 θα ανακαλύψετε τη σχέση αυτή με γραφικό τρόπο.

Επιλέξτε κατά σειρά τις μετρήσεις του ΑΓ και του εμβαδού του ΓΔΕΑ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**. Εάν το σημείο Θ δεν είναι ορατό, μεταφέρετε το σημείο Η για την προσαρμογή της κλίμακας των αξόνων.

12. Αποτυπώστε το μέγεθος του *ΑΓ* και του εμβαδού του ΑΓΔΕ με (x, y). Θα πρέπει να λάβετε άξονες και ένα σημείο Θ όπως στο επόμενο σχήμα.

13. Σύρτε το σημείο Γ προκειμένου να μετακινηθεί το σημείο Θ, ώστε να αντιστοιχεί σε διαφορετικά μήκη πλευρών και εμβαδά.



Επιλέξτε το σημείο Θ και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τόπου** από το μενού **Κατασκευή.**

14. Για να δείτε ένα γράφημα όλων των δυνατών εμβαδών του παραλληλόγραμμου αυτού, κατασκευάστε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Θ όπως ορίζεται από το σημείο Γ. Τοποθετήστε το σημείο Γ έτσι ώστε το σημείο Θ να βρίσκεται στη μέγιστη τιμή του εμβαδού του παραλληλόγραμμου.

Μπορείτε να επιλέξετε το σημείο Θ και να μετρήσετε τις συντεταγμένες του.

Ε3. Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου Θ στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

15. Μεταφέρετε το σημείο Γ έτσι ώστε το σημείο Θ να κινηθεί εμπρός και πίσω μεταξύ των δύο σημείων Ζ και Η στο γράφημα.

Ε4. Δώστε τις συντεταγμένες των σημείων Ζ και Η στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

Περαιτέρω εξερεύνηση

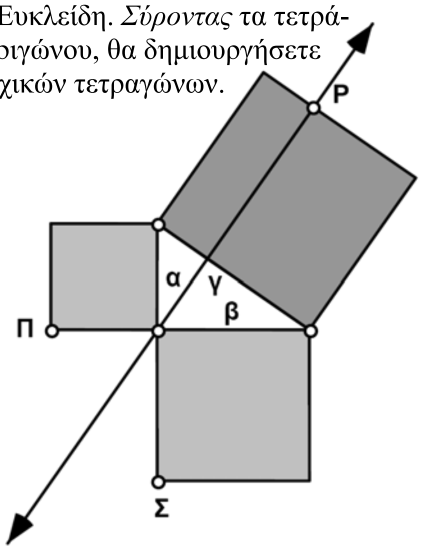
1. Διερευνήστε λόγους εμβαδού προς περίμετρο σε άλλα πολύγωνα. Διατυπώστε μια εικασία σχετικά με το είδος των πολυγώνων που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.

2. Ποια είναι η εξίσωση του γραφήματος που κατασκευάσατε; Έστω ΑΓ = x και ΑΒ = P/2, όπου P είναι η περίμετρος (σταθερά). Γράψτε μια εξίσωση για το εμβαδόν ΑΓΔΕ σε συνάρτηση με τα x, P. Για ποια τιμή του x (σε συνάρτηση με το P) έχουμε μια μέγιστη τιμή του A;

Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος

Ονοματεπώνυμο(α): _______________

Στη δραστηριότητα αυτή θα πραγματοποιήσετε μια οπτική επίδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος βασισμένη στην απόδειξη του Ευκλείδη. *Σύροντας* τα τετράγωνα κατά μήκος των πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου, θα δημιουργήσετε σχήματα χωρίς να μεταβάλετε το εμβαδόν των αρχικών τετραγώνων.



Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** κι επιλέξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**.

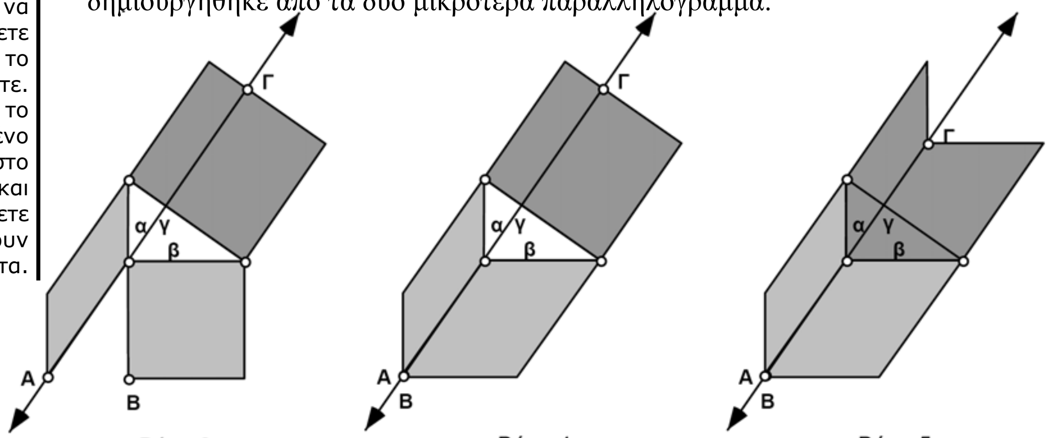
1. Ανοίξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τετράγωνα στις πλευρές του.

Κάντε κλικ σε ένα εσωτερικό πολυγώνου για την επιλογή του. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εμβαδού** από το μενού **Μέτρηση**.

2. Μετρήστε τα εμβαδά των τετραγώνων.
3. Σύρτε το σημείο Π ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία που είναι κάθετος στην υποτείνουσα. Σημειώστε ότι καθώς το τετράγωνο γίνεται παραλληλόγραμμο το εμβαδόν του δε μεταβάλλεται.
4. Σύρτε το σημείο Σ ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία. Θα πρέπει να συμπέσει με το σημείο Α έτσι ώστε τα δύο παραλληλόγραμμα να σχηματίζουν ένα ακανόνιστο σχήμα.

Προκειμένου να επιβεβαιώσετε ότι το σχήμα αυτό είναι όμοιο, μπορείτε να το αντιγράψετε και να το επικολλήσετε. Μεταφέρετε το επικολλημένο αντίγραφο στο κάτω σχήμα και θα διαπιστώσετε ότι ταιριάζουν απόλυτα.

5. Σύρτε το σημείο Ρ έτσι ώστε το μεγάλο τετράγωνο να παραμορφωθεί και να γεμίσει το τρίγωνο. Το εμβαδόν αυτού του σχήματος δε μεταβάλλεται. Θα πρέπει να είναι όμοιο με το σχήμα που δημιουργήθηκε από τα δύο μικρότερα παραλληλόγραμμα.



Βήμα 3 Βήμα 4 Βήμα 5

Για επαλήθευση ότι αυτό ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, μεταβάλετε το σχήμα του κι επαναλάβετε.

Ε1. Με ποιον τρόπο αυτά τα όμοια σχήματα καταδεικνύουν το πυθαγόρειο θεώρημα; (Υπόδειξη: Εάν τα σχήματα είναι όμοια, τι γνωρίζετε για τα εμβαδά τους;)

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Ονοματεπώνυμο(α): ______________

Η χρυσή τομή εμφανίζεται συχνά στη φύση: για παράδειγμα, στις αναλογίες του όστρακου ενός ναυτίλου ή και σε ορισμένες αναλογίες στο σώμα και στο πρόσωπό μας. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές εμφανίζουν τη χρυσή τομή ονομάζεται χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Σε ένα ορθογώνιο αυτού του είδους ο λόγος των διαστάσεων δύο πλευρών προς τη μεγάλη πλευρά ισούται με το λόγο της μεγάλης προς τη μικρή πλευρά. Τα χρυσά ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι ευχάριστα στην όραση, ίσως επειδή προσεγγίζουν το σχήμα του οπτικού πεδίου μας. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται συχνά στην αρχιτεκτονική και ιδιαίτερα στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική. Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και θα βρείτε μια προσέγγιση της χρυσής τομής. Κατόπιν θα ανακαλύψετε πώς μέσα σε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούν να βρεθούν μικρότερα χρυσά παραλληλόγραμμα. Τέλος, θα κατασκευάσετε μια χρυσή σπείρα (σπειροειδή καμπύλη).

Σχέδιο και έρευνα

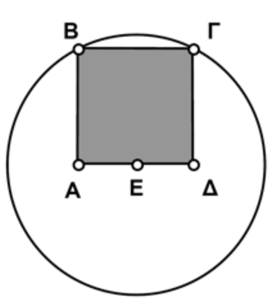
Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** κι επιλέξτε το αρχείο **Τετράγωνο.gsp**. Το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τετράγωνο από από ακμή** κατασκευάζει το τετράγωνο από τα δύο άκρα της πλευράς, όχι από το μέσο.

1. Χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο Τετράγωνο από ακμή για την κατασκευή ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ καθώς και του εσωτερικού του.

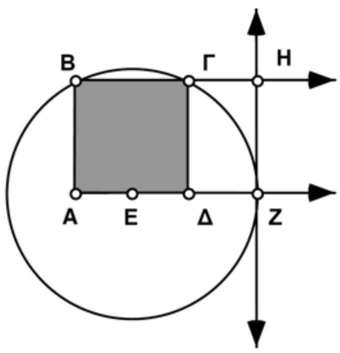
2. Προσανατολίστε το τετράγωνο έτσι ώστε τα σημεία ελέγχου σημεία Α και Β να βρίσκονται στην αριστερή πλευρά, το ένα πάνω από το άλλο.

3. Κατασκευάστε το μέσο Ε του τμήματος ΑΔ.

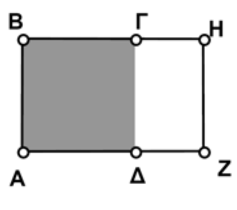
4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΕΓ.



Βήματα 1-4



Βήματα 5-8



Βήματα 9-11

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

Διατηρήστε πατημένο το πλήκτρο του ποντικιού στο εργαλείο τμημάτων για την εμφάνιση της παλέτας εργαλείων σχεδίασης ευθύγραμμων αντικειμένων. Σύρτε το δείκτη προς τα δεξιά για να επιλέξετε το εργαλείο ημιευθειών.

5. Επεκτείνετε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ με ημιευθείες όπως στο σχήμα.

6. Κατασκευάστε το σημείο Ζ στην τομή του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ με τον κύκλο.

7. Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο ΑΔ που διέρχεται από το σημείο Ζ.

8. Κατασκευάστε το σημείο Η στην τομή αυτής της καθέτου με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΖΗΒ είναι ένα χρυσό ορθογώνιο.

Επιλέξτε τα αντικείμενα και έπειτα την εντολή **Απόκρυψη** από το μενού **Προβολή**.

9. Αποκρύψτε την ευθεία, τις ημιευθείες, τον κύκλο και το σημείο Ε.

10. Αποκρύψτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΔΓ και ΒΓ.

11. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΗ, ΗΖ και ΖΑ.

12. Μετρήστε τα ΑΒ και ΑΖ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ και ΑΒ και την εντολή **Λόγου** από το μενού **Μέτρηση**.

13. Μετρήστε το λόγο ΑΖ προς ΑΒ.

14. Υπολογίστε την έκφραση ($\overline{\text{AB}}$ + $\overline{\text{AZ}}$)/ΑΖ.

15. Σύρτε το σημείο Α ή το σημείο Β ώστε να επαληθεύσετε ότι το παραλληλόγραμμό σας παραμένει πάντοτε χρυσό.

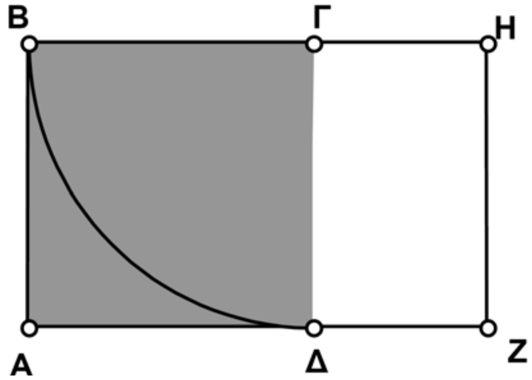
Ε1. Η χρυσή τομή (λόγος) αναπαρίσταται συχνά με το γράμμα Φ. Γράψτε μια προσέγγιση για το Φ.

Συνεχίστε την έρευνα του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και προχωρήστε στην κατασκευή μιας χρυσής σπείρας.

16. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τον κύκλο και τα σημεία Β και Δ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τόξου σε κύκλο** από το μενού **Κατασκευή**.

17. Κατασκευάστε τόξο κύκλου από το σημείο Β στο σημείο Δ. Κατόπιν αποκρύψτε τον κύκλο.



Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα (αλλά όχι τις μετρήσεις). Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου..** από τα Προσαρμοσμένα εργαλεία στην Εργαλειοθήκη.

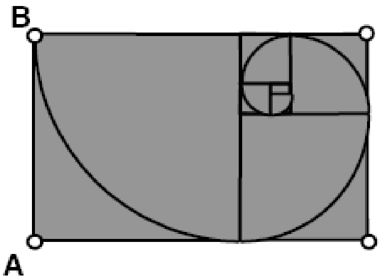
18. Δημιουργήστε Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή.

19. Κατασκευάστε το παραλληλόγραμμο όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για τα σημεία Ζ και Δ. Θα πρέπει να διαπιστώσετε ότι το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από το Προσαρμοσμένο εργαλείο είναι απόλυτα προσαρμοσμένο στην περιοχή ΔΖΗΓ.

Ε2. Διατυπώστε μια υπόθεση σχετικά με την περιοχή ΔΖΗΓ.

Εάν κατά τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου το παραλληλόγραμμό σας δεν είναι κατάλληλο, αναιρέστε την ενέργεια και δοκιμάστε εκ νέου στα σημεία με την αντίθετη σειρά.

20. Συνεχίστε τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου εντός του χρυσού παραλληλόγραμμου για τη δημιουργία μιας χρυσής σπείρας.
Αποκρύψτε μη απαραίτητα σημεία.



Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι η μικρή πλευρά του χρυσού παραλληλόγραμμου έχει μήκος 1 και η μεγάλη πλευρά μήκος Φ. Γράψτε μια σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών, πολλαπλασιάστε χιαστί και χρησιμοποιήστε τον τύπο του τετραγώνου για τον υπολογισμό μιας ακριβούς τιμής του Φ.

2. Υπολογίστε τα Φ^2 και $1/\Phi$. Πώς συνδέονται οι αριθμοί αυτοί με το Φ; Με αλγεβρικές πράξεις, δείξτε γιατί ισχύουν αυτές οι σχέσεις.

Λόγοι εμβαδών

Ονοματεπώνυμο(α): _______________

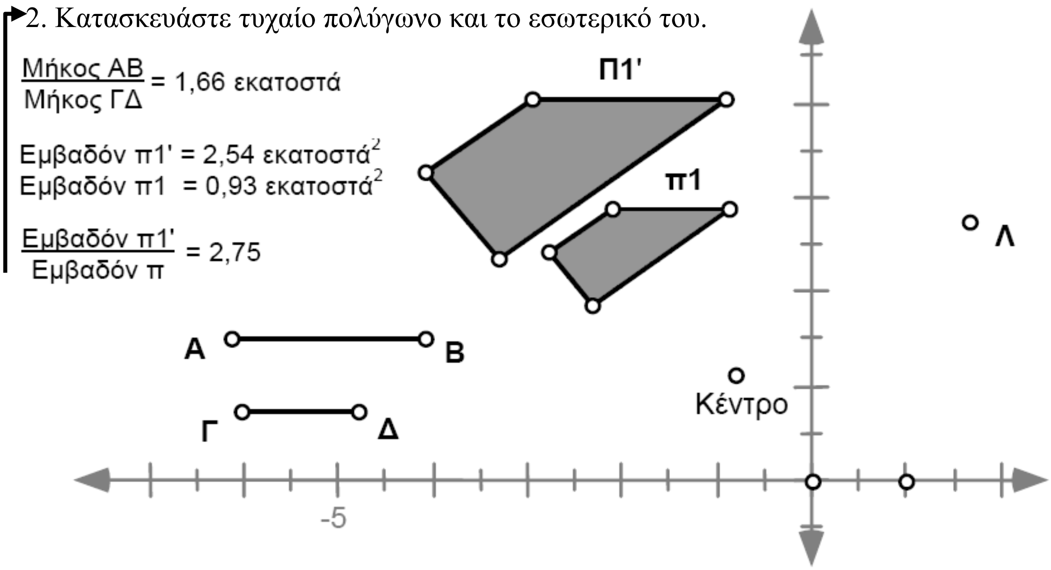
Στην εξερεύνηση αυτή θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ εμβαδών όμοιων σχημάτων.

Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, όπου το μήκος του ΑΒ είναι μεγαλύτερο του μήκους του ΓΔ.

Για την κατασκευή του εσωτερικού, επιλέξτε τις κορυφές. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικού τετράπλευρου** από το μενού **Κατασκευή**.

2. Κατασκευάστε τυχαίο πολύγωνο και το εσωτερικό του.



Κάντε διπλό κλικ στο σημείο για την επιλογή του ως κέντρου.

3. Κατασκευάστε ένα σημείο στο εξωτερικό του πολυγώνου και επιλέξτε το ως κέντρο.

Επιλέξτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και κατόπιν την εντολή **Επιλογή λόγου** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

4. Επιλέξτε το λόγο ΑΒ/ΓΔ.

Διατηρώντας επιλεγμένα τα ΑΒ και ΓΔ, επιλέξτε την εντολή **Λόγου** από το μενού **Μέτρηση**.

5. Μετρήστε το λόγο ΑΒ/ΓΔ.

Επιλέξτε το πολύγωνο και κατόπιν την εντολή **Αυξομείωση** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

6. Εκτελέστε αυξομείωση των κορυφών, των πλευρών και του εσωτερικού του πολυγώνου κατά τον επιλεγμένο λόγο. (Εάν το ΑΒ είναι μεγαλύτερου μήκους από το ΓΔ, το είδωλο πρέπει να είναι μεγαλύτερο του αρχικού αντικειμένου.)

Λόγοι εμβαδών (συνέχεια)

7. Μετρήστε το λόγο μιας πλευράς του μετασχηματισμένου πολυγώνου προς την αντίστοιχη πλευρά του αρχικού πολυγώνου.

8. Μετρήστε το λόγο ενός διαφορετικού ζεύγους αντίστοιχων πλευρών.

9. Σύρτε τα σημεία και παρατηρήστε τους λόγους που μετρήσατε.

Ε1. Πώς σχετίζεται ο λόγος ενός ζεύγους μηκών αντίστοιχων πλευρών με το λόγο αυξομείωσης;

10. Μετρήστε τα εμβαδά των πολυγώνων.

11. Υπολογίστε το λόγο του εμβαδού του μετασχηματισμένου πολυγώνου προς το εμβαδόν του αρχικού πολυγώνου.

12. Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση του λόγου του μήκους των πλευρών και του υπολογισμού του λόγου των εμβαδών. Επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**. Έτσι, θα δημιουργηθεί ένα ζεύγος αξόνων και ένα σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες είναι οι δύο αριθμοί που επιλέξατε παραπάνω. Εάν δεν μπορείτε να δείτε το αποτυπωμένο σημείο, μεταφέρετε το σημείο (1, 0) πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων για να προσαρμοστεί η κλίμακα των αξόνων.

13. Με επιλεγμένο αυτό το σημείο (σημείο Λ στο προηγούμενο διάγραμμα), επιλέξτε την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων** από το μενού **Προβολή**.

14. Σύρτε το σημείο Β ώστε να πειραματιστείτε με διαφορετικούς παράγοντες κλίμακας. Το αποτυπωμένο σημείο θα διαγράψει ένα γράφημα του λόγου του μήκους των πλευρών ως προς το λόγο των εμβαδών για διάφορα παρόμοια σχήματα.

Ε2. Για την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ μήκους πλευρών και εμβαδών, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα για ορισμένους ειδικούς λόγους μήκους πλευρών και κατόπιν γενικεύστε για κάθε συντελεστή κλίμακας α/β.

Λόγοι μήκους πλευρών	2	3	1	1/2	1/10	α/β
Λόγοι εμβαδών						

Ε3. Διατυπώστε τα ευρήματά σας σε μορφή υπόθεσης.

Ε4. Εξηγήστε πώς το σχήμα του γραφήματος στο σχέδιό σας υποστηρίζει την υπόθεσή σας.

Λόγοι εμβαδών (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Μετακινήστε το σημείο Α κοντά στο σημείο Γ. Δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών για την προσθήκη κίνησης στο σημείο Β πάνω στο τμήμα ΓΔ. Περιγράψτε τη δράση του κουμπιού.

2. Σύρτε το κέντρο αυξομείωσης. Εξηγήστε γιατί το σημείο Λ (αποτυπωμένο σημείο) δε μετακινείται.

3. Ποια είναι η σχέση του λόγου όγκων όμοιων στερεών με το λόγο των επιφανειακών εμβαδών τους και το λόγο των αντίστοιχων μηκών; Εξετάστε το θέμα αυτό με υπολογισμό των όγκων και των επιφανειακών εμβαδών δύο κιβωτίων, όπου το μήκος, το πλάτος και το ύψος του ενός είναι διπλάσια των αντίστοιχων διαστάσεων του άλλου.

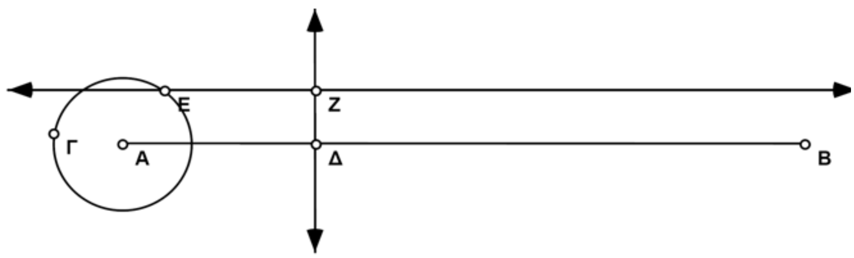
<u>Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων</u>

Ονοματεπώνυμο(α): _______________

Στην εξερεύνηση αυτή θα κατασκευάσετε μια μηχανή κινούμενων γραφικών, η οποία σχεδιάζει μια ειδική καμπύλη γνωστή ως *ημιτονοειδές κύμα*. Παραλλαγές ημιτονοειδών καμπυλών είναι τα γραφήματα *περιοδικών συναρτήσεων*, δηλαδή επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η κίνηση ενός εκκρεμούς και της παλίρροιας της θάλασσας περιγράφονται από περιοδικές συναρτήσεις.

Τα βήματα κατασκευής είναι τα εξής:

1. Κατασκευάστε οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



2. Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΓ.

3. Κατασκευάστε σημείο Δ στο τμήμα ΑΒ.

Επιλέξτε σημείο Δ και τμήμα ΑΒ και κατόπιν την εντολή **Κάθετη ευθεία** από το μενού **Κατασκευή**.

4. Κατασκευάστε ευθεία κάθετη στο ΑΒ και διερχόμενη από το σημείο Δ.

5. Κατασκευάστε σημείο Ε στον κύκλο.

6. Κατασκευάστε ευθεία παράλληλη στο τμήμα ΑΒ και διερχόμενη από το σημείο Ε.

7. Κατασκευάστε σημείο Ζ, δηλαδή το σημείο τομής της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ με την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο Ε.

Ε1. Σύρτε το σημείο Δ και περιγράψτε τι συμβαίνει στο σημείο Ζ. (Μην ανησυχείτε, δεν πρόκειται για πονηρή ερώτηση!)

Ε2. Σύρτε το σημείο Ε γύρω από τον κύκλο και περιγράψτε τη συμπεριφορά του σημείου Ζ.

Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων (συνέχεια)

Ε3. Σύντομα θα δημιουργήσετε μια κίνηση στο σχέδιό σας η οποία συνδυάζει αυτές τις δύο κινήσεις. Όμως πρώτα προσπαθήστε να μαντέψετε τη διαδρομή του σημείου Ζ όταν το σημείο Δ κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος και το σημείο Ε κινείται γύρω από τον κύκλο. Σχεδιάστε τη διαδρομή που θεωρείτε σωστή παρακάτω.

Επιλέξτε, κατά σειρά, το σημείο Δ, το τμήμα ΑΒ, το σημείο Ε και τον κύκλο. Έπειτα επιλέξτε την εντολή **Κουμπιά ενεργειών: Προσθήκη κίνησης** από το μενού **Επεξεργασία**. Χρησιμοποιήστε τα αναδυόμενα μενού στην καρτέλα Προσθήκη κίνησης για την επιλογή των ρυθμίσεων των κινούμενων γραφικών σε κάθε περίπτωση.

8. Δημιουργήστε κουμπί ενεργειών για την προσθήκη κίνησης μονής κατεύθυνσης στο σημείο Δ του τμήματος ΑΒ και στο σημείο Ε του κύκλου.

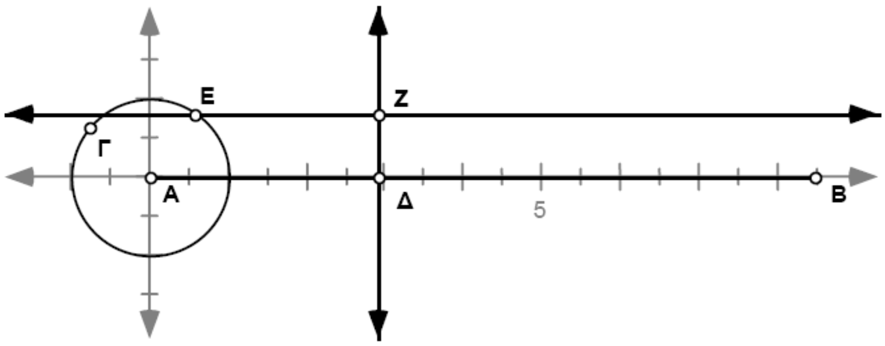
9. Επιλέξτε το σημείο Ζ και κατόπιν την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείου από το μενού Προβολή.

10. Μετακινήστε το σημείο Δ έτσι ώστε να βρίσκεται δεξιά του κύκλου.

11. Κάντε κλικ στο κουμπί Προσθήκη κίνησης.

Ε4. Σχεδιάστε τη διαδρομή που διαγράφει το σημείο Ζ. Μοιάζει η πραγματική διαδρομή με εκείνη που μαντέψατε στο ερώτημα Ε3.; Σε τι διαφέρουν;

12. Επιλέξτε τον κύκλο και κατόπιν την εντολή Ορισμός μοναδιαίου κύκλου από το μενού Γράφημα. Πρέπει να σχεδιαστεί ένα γράφημα με την αρχή των αξόνων στο σημείο Α. Το σημείο Β πρέπει να ανήκει στον άξονα x. Η συντεταγμένη y του σημείου Ζ πάνω από το τμήμα ΑΒ είναι η τιμή του ημιτόνου της γωνίας ΕΑΔ.



Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων (συνέχεια)

Ε5. Εάν ο κύκλος έχει ακτίνα ίση με μια μονάδα του γραφήματος, πόσο είναι το μήκος κύκλου του σε μονάδες γραφήματος; Υπολογίστε το μόνοι σας. Μη χρησιμοποιήσετε το Sketchpad για τη μέτρηση του μήκους κύκλου, επειδή το πρόγραμμα θα τη μετρήσει σε ίντσες ή εκατοστά (ανάλογα με τη ρύθμισή σας στην καρτέλα «Επεξεργασία/Προτιμήσεις») και όχι σε μονάδες γραφήματος.

13. Μετρήστε τις συντεταγμένες του σημείου B.

14. Τροποποιήστε το ευθύγραμμο τμήμα και τον κύκλο και συνεχίστε να πειραματίζεστε με τα κινούμενα γραφικά ωσότου η καμπύλη αρχίσει να διαγράφει ξανά την τροχιά που διέγραψε προηγουμένως, αντί να σχεδιάζει μια νέα καμπύλη κάθε φορά (διατηρήστε το σημείο B στον άξονα x).

Ε6. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της συντεταγμένης x του σημείου B και του μήκους του κύκλου (σε μονάδες γραφήματος); Εξηγήστε την απάντησή σας.

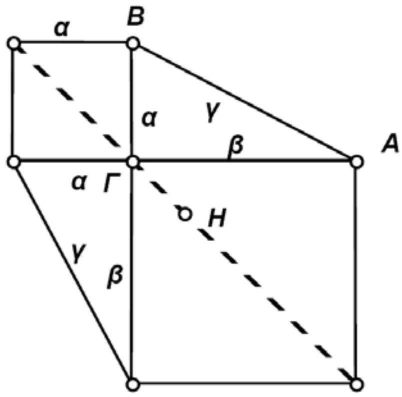
Η απόδειξη του Leonardo da Vinci

Ο Ιταλός Leonardo da Vinci (1452-1519) ήταν ζωγράφος, μηχανικός, και εφευρέτης την εποχή της Αναγέννησης. Έγινε διάσημος από τον πίνακά του *Mona Lisa*. Επίσης, στον Leonardo da Vinci αποδίδεται η ακόλουθη απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος.

Κατασκευή

Στο σχήμα αυτό δε χρειάζεται η κατασκευή τετραγώνου στην υποτείνουσα.

1. Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και από ένα τετράγωνο σε κάθε κάθετη πλευρά του όπως στο σχήμα.



2. Συνδέστε τις κορυφές των τετραγώνων για την κατασκευή ενός δεύτερου ορθογώνιου τριγώνου, όμοιου με το αρχικό τρίγωνο.

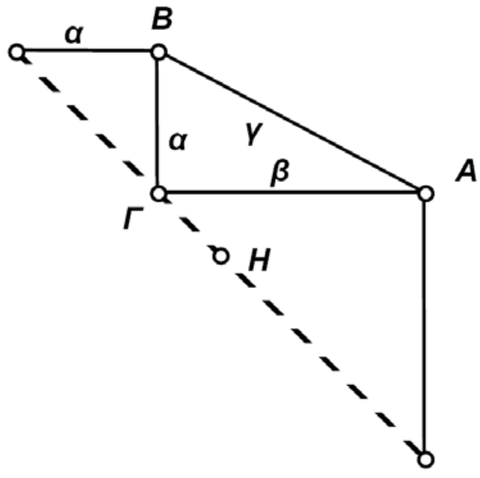
3. Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το σημείο Γ και που συνδέει τις δύο απώτερες κορυφές των τετραγώνων.

4. Κατασκευάστε το μέσο Η αυτού του τμήματος.

Το υπομενού **Κουμπιά ενεργειών** βρίσκεται στο μενού **Επεξεργασία**.

5. Το τμήμα αυτό διαιρεί το σχήμα σε δύο κατοπτρικά είδωλα. Επιλέξτε όλα τα τμήματα και σημεία στη μια πλευρά του τμήματος και δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών Απόκρυψης/Εμφάνισης. Αλλάξτε την ετικέτα του σε Εμφάνιση ανάκλασης/Απόκρυψη ανάκλασης.

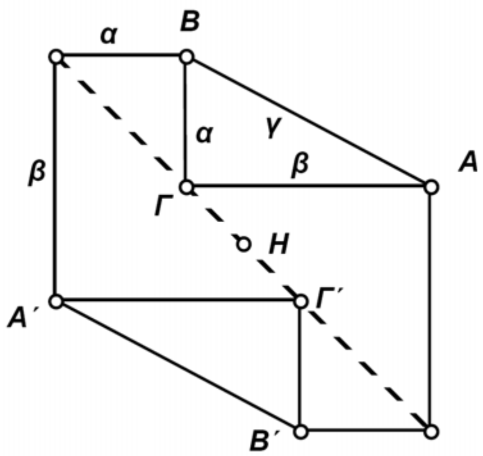
6. Κάντε διπλό κλικ στο κουμπί Απόκρυψη ανάκλασης. Θα πρέπει να δείτε το ήμισυ του σχήματος.



Η απόδειξη του Leonardo da Vinci (συνέχεια)

7. Επιλέξτε το σημείο Η ως κέντρο και περιστρέψτε ολόκληρο το σχήμα κατά γωνία 180ο ως προς το Η.

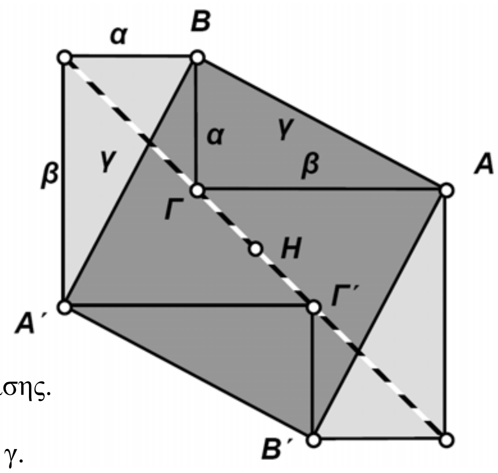
8. Επιλέξτε όλα τα αντικείμενα που αποτελούν το περιστραμμένο ήμισυ του σχήματος και δημιουργήστε κουμπί ενεργειών Απόκρυψης/Εμφάνισης. Αλλάξτε την ετικέτα του κουμπιού αυτού σε Εμφάνιση περιστροφής/ Απόκρυψη περιστροφής. Μην αποκρύψετε ακόμη το περιστραμμένο ήμισυ.



9. Κατασκευάστε τα τμήματα Α' Β και Β΄Α. Βλέπετε το τετράγωνο πλευράς γ;

10. Κατασκευάστε το εσωτερικό του ΒΑ΄Β΄Α και των δύο γειτονικών του τριγώνων.

11. Επιλέξτε τα τμήματα Α΄Β και Β΄Α και τα τρία εσωτερικά σχήματα που κατασκευάσατε. Δημιουργήστε κουμπί ενεργειών Απόκρυψης/Εμφάνισης. Ονομάστε το κουμπί αυτό Εμφάνιση τετραγώνου γ/Απόκρυψη τετραγώνου γ.



<u>Η απόδειξη του Leonardo da Vinci (συνέχεια)</u>

Έρευνα

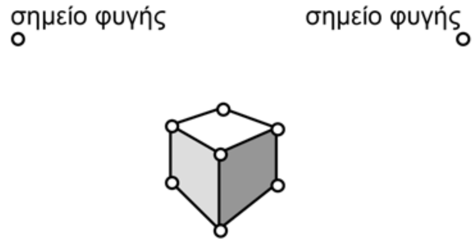
Από την εμπειρία αυτής της κατασκευής, ίσως έχετε μια καλή εικόνα του τρόπου απόδειξης του Leonardo da Vinci. Κάντε κλικ σε όλα τα κουμπιά απόκρυψης, κατόπιν πατήστε τα κουμπιά με την εξής σειρά: Εμφάνιση ανάκλασης, Εμφάνιση περιστροφής, Απόκρυψη ανάκλασης, Εμφάνιση τετραγώνου γ. Θα πρέπει να δείτε το μετασχηματισμό δύο ορθογώνιων τριγώνων με τετράγωνα στις κάθετες πλευρές τους σε δύο πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα με τετράγωνα στις υποτείνουσές τους. Εξηγήστε σε ένα συμμαθητή σας ή παρουσιάστε σε όλη την τάξη την απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος από τον Leonardo.

Απόδειξη

Η απόδειξη του Leonardo da Vinci είναι μια από τις κομψές αποδείξεις, στις οποίες το σχήμα αποκαλύπτει σχεδόν ολόκληρη την ιστορία. Δώστε μια γραπτή εξήγηση του γεγονότος ότι το αρχικό και το τελικό εξάγωνο έχουν ίσα εμβαδά και του τρόπου απόδειξης του πυθαγόρειου θεωρήματος μέσω αυτών των εξαγώνων.

Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους

Μια πιο συνήθης περίπτωση της προοπτικής ενός σημείου συμβαίνει όταν υπάρχουν δύο σύνολα παράλληλων ευθειών, καθένα με το δικό του σημείο φυγής. Δεξιά βλέπετε το σχέδιο ενός στερεού με δύο σημεία φυγής. Για την κατασκευή του σχεδίου ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.



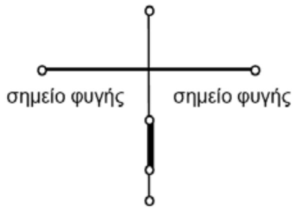
Άνοιγμα νέου σχεδίου

Για τη δημιουργία της κάθετης ευθείας, επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα και την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

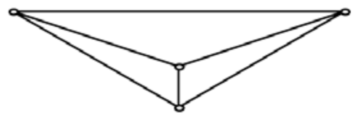
1. Κατασκευάστε τη γραμμή του ορίζοντα, την εμπρόσθια ακμή του στερεού και ευθύγραμμα τμήματα προς τα σημεία φυγής.

α. Σχεδιάστε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα πάνω από το μέσο της οθόνης. Αυτή είναι η γραμμή του ορίζοντα και τα άκρα της είναι το αριστερό και το δεξιό σημείο φυγής, αντίστοιχα.

β. Κατασκευάστε ένα σημείο σε κάποια θέση κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο τμήμα που να διέρχεται από το σημείο.



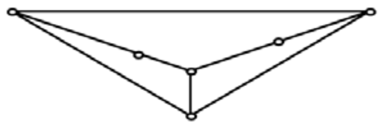
γ. Σε αυτή την κάθετη ευθεία κατασκευάστε ένα δεύτερο σημείο κάτω από την εγγραφή του ορίζοντα. Κατασκευάστε ένα παχύ ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία της κάθετης ευθείας. Αποκρύψτε την κάθετη ευθεία. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που απομένει είναι η εμπρόσθια ακμή του στερεού.



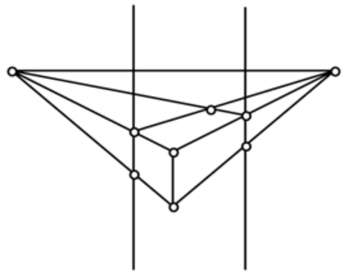
δ. Κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα από το πάνω και κάτω σημείο της εμπρόσθιας ακμής προς τα σημεία φυγής.

2. Κατασκευάστε τις ορατές ακμές του στερεού.

α. Κατασκευάστε δύο σημεία, ένα στην ευθεία που συνδέει το πάνω σημείο της εμπρόσθιας ακμής με το αριστερό σημείο φυγής και ένα στην αντίστοιχη ευθεία προς το δεξιό σημείο φυγής. Τα σημεία αυτά ελέγχουν το βάθος του στερεού.



Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους (συνέχεια)



β. Κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα από τα δύο σημεία που δημιουργήθηκαν στο τελευταίο βήμα (βήμα 2α) προς το αριστερό και προς το δεξιό σημείο φυγής. Κατασκευάστε το σημείο τομής αυτών των δύο τμημάτων.

γ. Κατασκευάστε κάθετες ευθείες που διέρχονται τα δύο σημεία που κατασκευάστηκαν στο βήμα 2α. Κατασκευάστε την τομή αυτών των ευθειών με τις ευθείες από το κάτω σημείο της εμπρόσθιας ακμής προς τα σημεία φυγής.

3. Ολοκληρώστε το σχέδιο (δείτε το σχέδιο στην αρχή αυτής της έρευνας).

   α. Κατασκευάστε το εσωτερικό των πλευρών του κύβου και σκιάστε τις.

   β. Αποκρύψτε τα ευθύγραμμα τμήματα που εκτείνονται προς τα σημεία φυγής και κατασκευάστε παχιά τμήματα ως ακμές του στερεού.

4. Μεταφέρετε τα σημεία που ελέγχουν το βάθος του στερεού ώστε να εμφανιστεί ως κύβος.

Ερωτήματα

Ε1. Με ποιον τρόπο το στερεό εμφανίζεται ως κύβος;

Ε2. Ποιες ακμές της σχεδίασης του στερεού είναι μεταξύ τους παράλληλες;

Ε3. Εάν επεκταθούν οι μη παράλληλες ακμές του στερεού, πού θα τέμνονται;

Ε4. Τι θα συμβεί με τη μεταφορά του στερεού πάνω και κάτω μέσω της εμπρόσθιας ακμής του; Δεξιά και αριστερά;

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Προσθέστε ευθείες στο σχέδιό σας ώστε να είναι πλήρες –ακόμη και αν σύρετε από την εμπρόσθια ακμή το στερεό πάνω από τη γραμμή του ορίζοντα.

2. Δημιουργήστε στο στερεό μια είσοδο και ένα ή δύο παράθυρα.

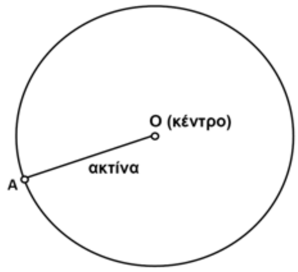
3. Δημιουργήστε μία σχεδίαση σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους για ένα πιο πολύπλοκο αντικείμενο, π.χ., ένα κτίριο.

4. Τι συμβαίνει στην εικόνα του στερεού όταν η γραμμή του ορίζοντα δεν είναι οριζόντια στο σχέδιο;

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα

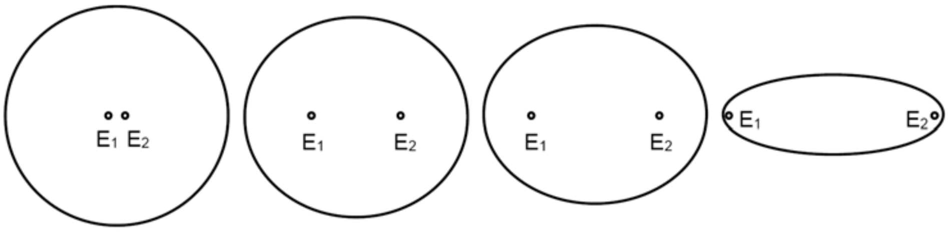
Στη δραστηριότητα αυτή θα εξερευνήσετε ίσως την πλέον κοινή μέθοδο κατασκευής μιας έλλειψης. Προκειμένου να θέσετε το πλαίσιο για την κατασκευή αυτή, πρέπει να κατανοήσετε το νόημα των όρων *κύκλος* και *έλλειψη*.

> *Ορισμός:* ***Κύκλος*** *είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε η απόσταση κάθε μέλους του συνόλου από ένα σταθερό σημείο (**κέντρο**) να είναι σταθερή.*



Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο O με ένα σημείο στην περιφέρεια του κύκλου αποτελεί μια **ακτίνα** του κύκλου. Το τμήμα OA είναι μια ακτίνα του κύκλου στο σχήμα δεξιά.

Τώρα φανταστείτε ότι το κέντρο του κύκλου χωρίζεται σε δύο σημεία που απομακρύνονται μεταξύ τους. Καθώς μετακινούνται αυτά τα σημεία, το σχήμα του κύκλου παραμορφώνεται σε ελλειπτικό, ώστε να στεγάσει τα δύο «κέντρα». Τα σημεία αυτά ονομάζονται **εστιακά σημεία** ή **εστίες** (E_1 και E_2 είναι τα εστιακά σημεία στο παρακάτω σχήμα).



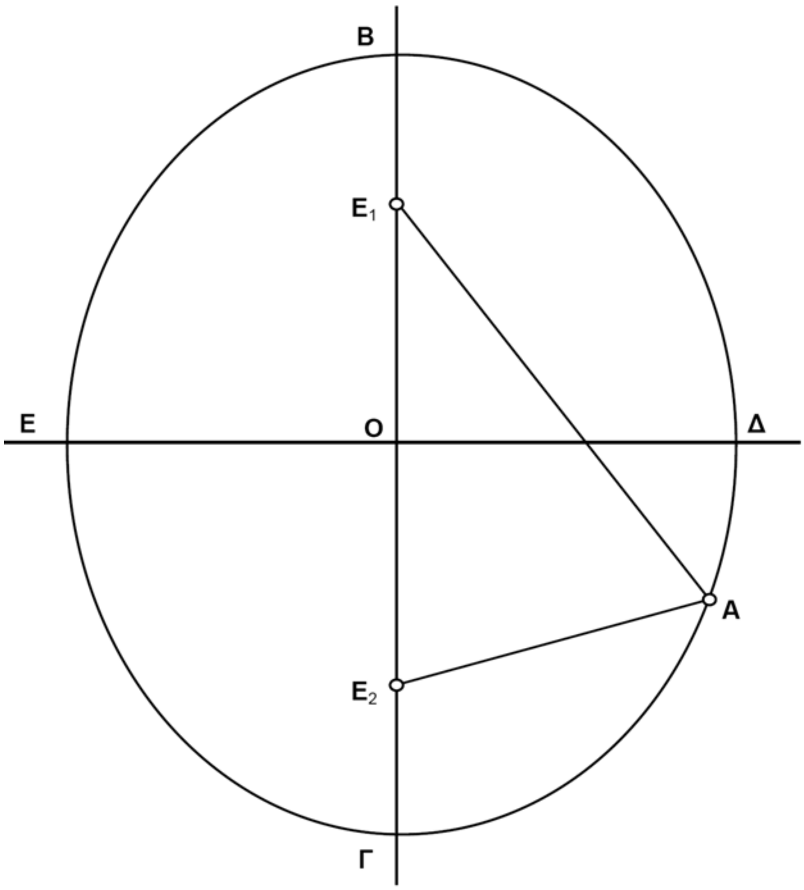
Για τον κύκλο η απόσταση μεταξύ κέντρου και οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας είναι πάντοτε η ίδια, δηλαδή *σταθερή*. Ποια είναι η αντίστοιχη συνθήκη για ένα σχήμα με δύο «κέντρα»; Για κάθε σημείο μιας έλλειψης υπάρχουν δύο αποστάσεις, μια από κάθε εστιακό σημείο. Αν το *άθροισμα* των αποστάσεων αυτών είναι σταθερό, έχουμε μια παρόμοια συνθήκη.

> *Ορισμός:* ***Έλλειψη*** *είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου από τις δύο **εστίες** να είναι σταθερό.*

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν επιλέξετε οποιοδήποτε σημείο της έλλειψης και υπολογίσετε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα δύο εστιακά σημεία, θα προκύπτει πάντοτε η ίδια αριθμητική τιμή. Ελέγξτε αυτό το αποτέλεσμα για την έλλειψη στο επόμενο σχήμα. Επιλέξτε τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές θέσεις για ένα σημείο A που κινείται πάνω στην έλλειψη και μετρήστε τις αποστάσεις κάθε θέσης από τις δύο εστίες.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Υπολογίστε τα αθροίσματα των δύο αποστάσεων. Πόσο πλησιάζουν αριθμητικά μεταξύ τους τα τέσσερα αθροίσματα;

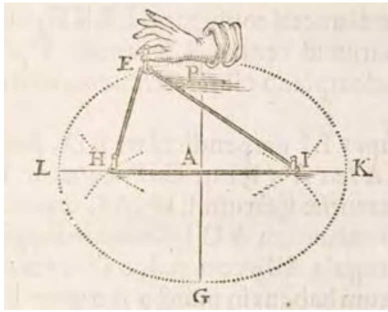


AE_1	AE_2	$AE_1 + AE_2$

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

Τώρα που γνωρίζετε τι είναι μια έλλειψη, προχωρήστε στη σχεδίασή της! Μια κοινή μέθοδος χρησιμοποιεί δύο πινέζες, ένα κομμάτι νήματος και ένα μολύβι. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι πινέζες στερεώνονται σε μια επίπεδη επιφάνεια και το νήμα τοποθετείται γύρω τους. Για τη χρήση της διάταξης, τεντώστε το νήμα με το μολύβι όπως στο σχήμα. Καθώς μετακινείτε το μολύβι γύρω γύρω από τις εστίες διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, η μύτη του μολυβιού χαράσσει μια έλλειψη.



Από το βιβλίο *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* του Ολλανδού μαθηματικού Frans van Schooten, 1646.

Τι χρειάζεστε: Ένα κομμάτι κλωστής ή οδοντικού νήματος, δύο πινέζες, ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι.

1. Ενώστε τα άκρα του νήματος για το σχηματισμό ενός βρόχου. Επιλέξτε δύο σημεία στο χαρτί και στερεώστε το νήμα με τις δύο πινέζες. Ίσως χρειαστεί να επιμηκύνετε ή να κοντύνετε το νήμα, ώστε η έλλειψη να καλύπτει την επιφάνεια του χαρτιού αλλά να μην προεξέχει.

2. Τεντώστε το νήμα με το μολύβι.

3. Διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, μετακινήστε το μολύβι γύρω από τα εστιακά σημεία έτσι ώστε η μύτη του μολυβιού να χαράξει μια καμπύλη. Ίσως χρειαστεί να σηκώσετε τη μύτη από το χαρτί και να την επανατοποθετήσετε για τη χάραξη της πλήρους καμπύλης.

Ερωτήματα

Ε1. Δικαιολογήστε το γεγονός ότι αυτή η κατασκευή σχεδιάζει ελλείψεις. Με άλλα λόγια, εξηγήστε πώς αυτή η μέθοδος κατασκευής ικανοποιεί τον ορισμό μιας έλλειψης.

Ε2. Πού βρίσκονται τα εστιακά σημεία της έλλειψης;

Ε3. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της όταν τη σχεδιάσετε και πάλι με τις πινέζες σε μεγαλύτερη μεταξύ τους απόσταση. Τι συμβαίνει στην περίπτωση ελάττωσης της απόστασης αυτής;

Ε4. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας, τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΕ_1$ και $ΓΕ_2$; (Δείτε το προηγούμενο μεγάλο σχήμα.)

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

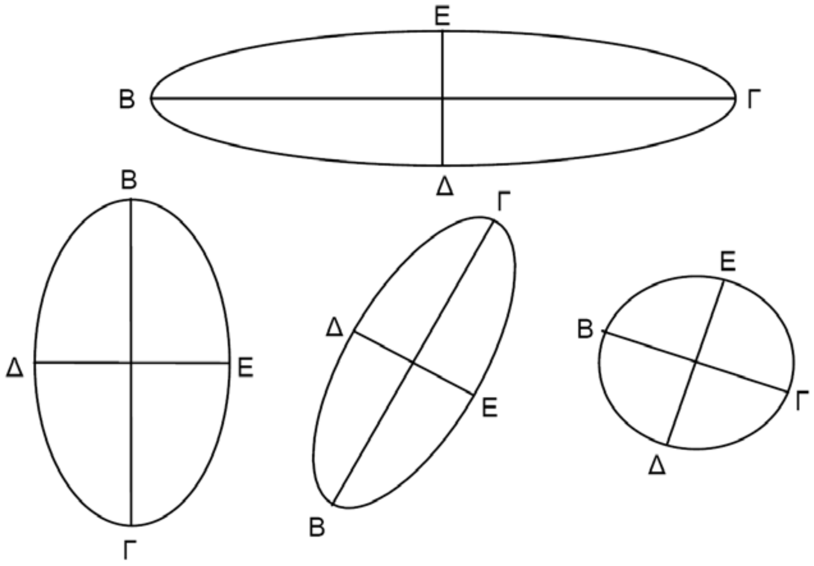
Ε5. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος ταυτίζονται. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

Ε6. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος απέχουν τόσο ώστε ολόκληρο το νήμα να είναι τεντωμένο και να έχει το μέγιστο μήκος του. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

Ακολουθούν ορισμένες δραστηριότητες που θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε την έλλειψη που κατασκευάσατε.

Ερωτήματα

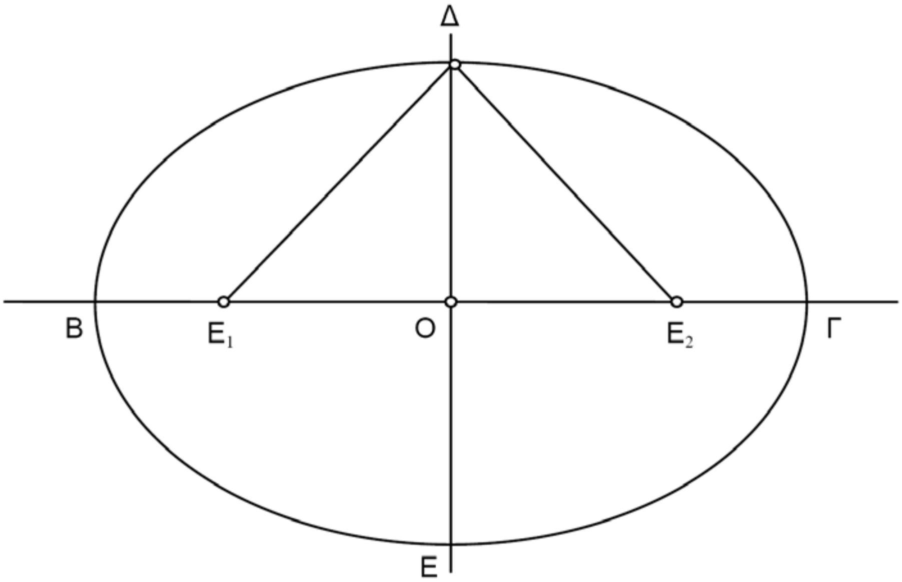
Ε1. Σε κάθε έλλειψη αντιστοιχούν δύο σημαντικά ευθύγραμμα τμήματα, ο *μεγάλος άξονας* και ο *μικρός άξονας*. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα το τμήμα ΒΓ είναι ο μεγάλος άξονας και το τμήμα ΔΕ ο μικρός άξονας. Γράψτε έναν ορισμό του μεγάλου και του μικρού άξονα.



Ε2. Σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδιάστε με τη βοήθεια του νήματος, των πινεζών και του μολυβιού μια άλλη έλλειψη. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα για τη σχεδίαση και μέτρηση του μεγάλου άξονά της. Χωρίς να προβείτε σε περαιτέρω μετρήσεις, πώς θα προσδιορίσετε το μήκος του νήματος;
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μολύβι σας ώστε να τεντώσετε το νήμα. Στη συνέχεια, μετακινήστε το μολύβι γύρω από την έλλειψη ωσότου εντοπίσετε μια βολική θέση.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ε3. Στο επόμενο σχήμα το σημείο Δ βρίσκεται στο ένα άκρο του μικρού άξονα της έλλειψης και τα σημεία $Ε_1$ και $Ε_2$ είναι οι εστίες της έλλειψης. Εάν το μήκος του μεγάλου άξονα ΒΓ είναι 9,5 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $ΔΕ_1$ και $ΔΕ_2$; Μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!



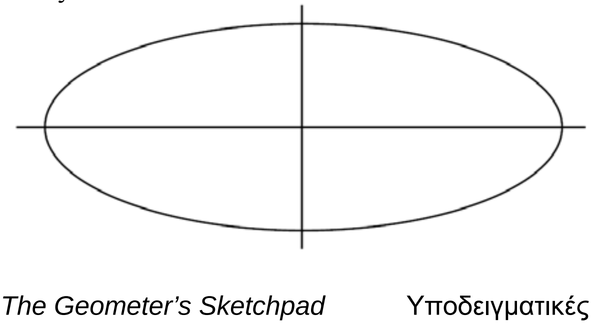
Ε4. Εάν το μήκος του μικρού άξονα ΔΕ είναι 7,2 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των τμημάτων $ΟΕ_1$ και $ΟΕ_2$; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος 3. Και πάλι μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!

Ε5. Στηριζόμενοι στις απαντήσεις στα ερωτήματα 2-4, ποια είναι η σχέση μεταξύ των τμημάτων ΟΓ, ΟΔ και $ΟΕ_2$;

Ε6. Το παρακάτω σχήμα εμφανίζει μια έλλειψη και τους δύο άξονές της. Ζητείται ο εντοπισμός των δύο εστιών.

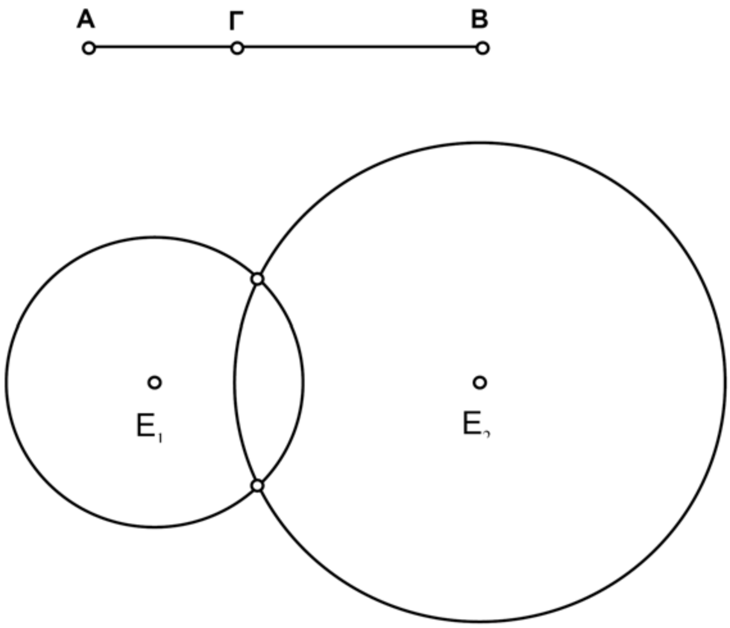
α. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα και έναν υπολογιστή για την εύρεση των εστιακών σημείων. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.

β. Βρείτε τα εστιακά σημεία με χρήση μόνο ενός διαβήτη. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.



Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κάθε φορά που σχεδιάζετε μια νέα έλλειψη με μολύβι, νήμα και πινέζες, πρέπει να επανατοποθετείτε τις πινέζες και να χαράζετε το περίγραμμα με το μολύβι σας. Ένα μοντέλο του Sketchpad καθιστά ευκολότερη την εξερεύνηση μιας ποικιλίας ελλείψεων.



Λεπτομέρειες κατασκευής

1. Κατασκευάστε μια ευθεία και αποκρύψτε τα σημεία ελέγχου της. Κατασκευάστε τα σημεία Α, Β και Γ στην ευθεία. Η θέση αυτών των σημείων είναι αυθαίρετη αλλά το σημείο Γ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Β.

2. Αποκρύψτε την ευθεία και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ.

3. Δημιουργήστε τις ετικέτες των σημείων Ε1 και Ε2 που αναπαριστούν τις εστίες της έλλειψής σας.

4. Χαράξτε έναν κύκλο με κέντρο το Ε1 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΑΓ. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το Ε2 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΓΒ.

5. Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής των κύκλων. Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε το μοντέλο σας ώστε οι κύκλοι να τέμνονται. Επιλέξτε τα σημεία τομής και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.

6. Σύρτε το σημείο Γ εμπρός και πίσω κατά μήκος του τμήματος ΑΒ. Το ίχνος των δύο σημείων πρέπει να αποτελεί μια έλλειψη.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ερωτήματα

Ε1. Εξηγήστε γιατί τα σημεία τομής των δύο κύκλων ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης.

Ε2. Πειραματιστείτε με διαφορετικές θέσεις των εστιακών σημείων και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της έλλειψης. Περιγράψτε τα ευρήματά σας.

Ε3. Έστω ότι οι θέσεις των σημείων Α και Β παραμένουν σταθερές στην ευθεία. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων για την οποία είναι δυνατή η σχεδίαση μιας έλλειψης;

Ε4. Μελετήστε ξανά τα βήματα της κατασκευής του μοντέλου. Όταν το σημείο Γ μετακινείται εμπρός και πίσω μεταξύ των σημείων Α και Β, η τομή των κύκλων διαγράφει μια έλλειψη. Ποιο είναι το μήκος του μεγάλου άξονα αυτής της έλλειψης;

Οι ελλείψεις που σχεδιάσατε σε αυτή τη δραστηριότητα είναι διαφορετικές. Ορισμένες είναι «λεπτές» και επιμήκεις, άλλες είναι «παχιές» και σχεδόν κυκλικές. Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης είναι μια αριθμητική τιμή που καθορίζει το πάχος μιας έλλειψης.

*Ορισμός: Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης ορίζεται ως ο λόγος α/β, όπου*

α: η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων και
β: η απόσταση μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα

Ε5. Χρησιμοποιήστε τις εντολές του Sketchpad (Μέτρηση) Απόστασης και Υπολογισμός για τον προσδιορισμό της εκκεντρότητας της έλλειψής σας.

Θα χρειαστείτε τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ των εστιακών σημείων καθώς και του μήκους του μεγάλου άξονα. (Ποια σημεία έχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα;) Επιλέξτε τις δύο αποστάσεις και χρησιμοποιήστε την εντολή Υπολογισμός από το μενού Μέτρηση για τον υπολογισμό του λόγου τους.

Ε6. Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του Sketchpad για τη σχεδίαση διαφορετικών ελλείψεων. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η τιμή της εκκεντρότητάς τους. Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της εκκεντρότητας που είναι δυνατές για τις ελλείψεις που μπορούν να κατασκευαστούν στο σχέδιό σας;

Ε7. Μπορούν δύο διαφορετικές ελλείψεις να έχουν την ίδια εκκεντρότητα; Αν ναι, σχεδιάστε με το χέρι δύο ελλείψεις με την ιδιότητα αυτή. Διαφορετικά, εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατόν.

Μέσα χορδών

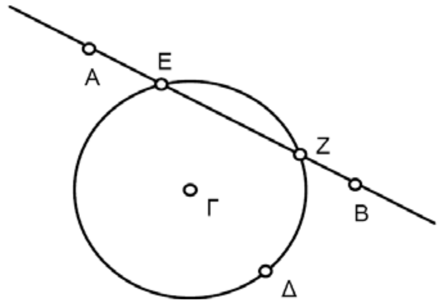
Έρευνα 1: Μέσα παράλληλων χορδών

Σχεδιάστε με το Sketchpad το ίχνος των μέσων των χορδών κατά την παράλληλη μεταφορά μιας ευθείας. Για το σκοπό αυτό, πρέπει πρώτα να κατασκευάσετε τα μέσα. Κατόπιν χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες σχετικά με αυτόν το γεωμετρικό τόπο των μέσων ώστε να κατανοήσετε τις, παράλληλες προς μια ευθεία, εφαπτομένες, να απαντήσετε σε ερωτήματα και να δημιουργήσετε κατασκευές.

Κατασκευή Α

Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής με επιλογή του κύκλου και της ευθείας. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τομών** από το μενού **Κατασκευή**.

Συνεχίστε με τη βοήθεια του Sketchpad το σχέδιο της ευθείας ΑΒ και του κύκλου ακτίνας ΓΔ.

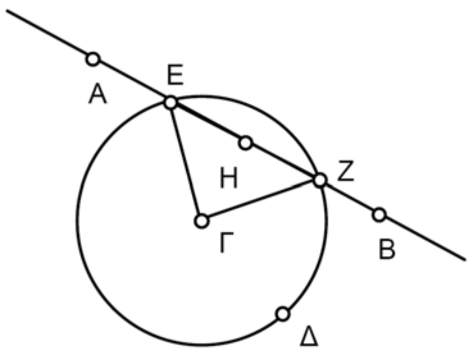


1. Μετακινήστε την ευθεία έτσι ώστε να τμήσει τον κύκλο σε δύο σημεία. Κατόπιν κατασκευάστε τα σημεία τομής Ε και Ζ μεταξύ ευθείας και κύκλου.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου καλείται **χορδή**. Στο σχήμα αυτό το τμήμα ΕΖ είναι η χορδή του κύκλου στην τέμνουσα ΑΒ.

Εφόσον το τμήμα βρίσκεται πάνω στην ευθεία, η επιλογή του ίσως είναι κάπως δύσκολη. Ενδέχεται, εκ παραδρομής, να επιλέξετε με το πρώτο κλικ την ευθεία. Αν ναι, κάντε εκ νέου κλικ ώστε να επιλεγεί το τμήμα.

2. Κατασκευάστε το τμήμα ΕΖ και το μέσο του Η.



3. Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου Η με επιλογή του σημείου και της εντολής Σχεδίαση ίχνους μέσου σημείου από το μενού Προβολή. (Για ένα έγχρωμο ίχνος, επιλέξτε το σημείο και ένα χρώμα από το μενού Προβολή.)

4. Προσθέστε στο σχήμα τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ.

<u>Μέσα χορδών (συνέχεια)</u>

Πειραματισμός

☞ Εκτελέστε παράλληλη μεταφορά της ευθείας.

☞ Μελετήστε το σχήμα ώστε να διαπιστώσετε τις σχέσεις μεταξύ των μερών του. Ειδικότερα, προβληματιστείτε σχετικά με τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Ποιο είδος γεωμετρικού αντικειμένου προκύπτει από τη σχεδίαση του ίχνους του σημείου Η; Πώς σχετίζεται αυτό το ίχνος με την ευθεία ΑΒ;

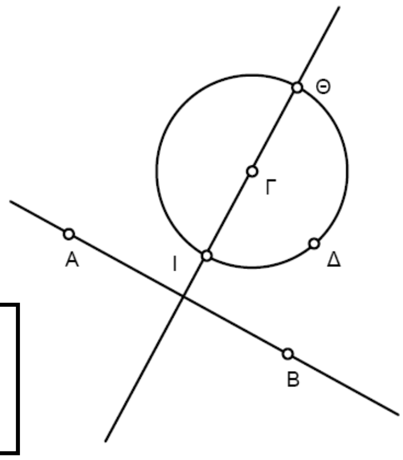
2. Πόση είναι η γωνία ΓΗΖ; Τι είδους τρίγωνο είναι το ΓΗΖ;

3. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΕΓΖ; Πώς εξηγείται αυτό;

Κατασκευή Β

Για την κατασκευή της κάθετης ευθείας, επιλέξτε το σημείο Γ και την ευθεία ΑΒ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

Κατασκευάστε την ευθεία ε που διέρχεται το σημείο Γ και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Κατασκευάστε τα σημεία Θ και Ι μέσω της τομής του κύκλου από την ευθεία ε. Αυτή η κάθετη ευθεία αποτελεί μια διάμετρο εφόσον από κατασκευής διέρχεται από το σημείο Γ.



*Μια ευθεία είναι **διάμετρος** (ευθεία) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου. Μια χορδή είναι διάμετρος (χορδή) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου.*

Άρα διάμετρος μπορεί να είναι μια ευθεία ή μια χορδή.

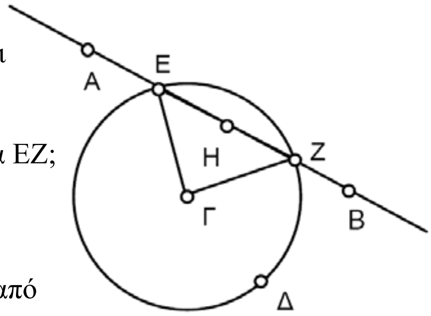
Ερωτήματα

Ε1. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο προκύπτει από τη σχεδίαση ίχνους του σημείου Η;

Ε2. Πώς σχετίζεται το ίχνος του Η με την ευθεία ΕΖ;

Ε3. Ποιο το μέγεθος της γωνίας ΓΗΖ;

Ε4. Τι είδους ευθεία είναι η ΑΒ όταν διέρχεται από τα σημεία Θ ή Ι;



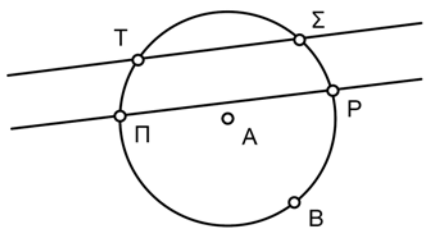
Μέσα χορδών (συνέχεια)

Ε5. Εξηγήστε γιατί το μέσο της χορδής ΕΖ βρίσκεται στη διάμετρο που είναι κάθετος στην ευθεία ΑΒ. Υπόδειξη: Πώς συνδέεται η ευθεία ΘΙ με το τρίγωνο ΕΓΖ;

Ε6. Σχεδιάστε μια ευθεία και έναν κύκλο. Πόσες ευθείες παράλληλες στη δοθείσα εφάπτονται στον κύκλο; Πώς μπορείτε να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται στον κύκλο αυτές οι ευθείες;

Προβλήματα - Τετράπλευρα

Κατασκευάστε έναν κύκλο και δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Π, Ρ, Σ και Τ όπως στο σχήμα.



1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των αποστάσεων ΠΤ και ΡΣ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

   Κατασκευάστε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

2. Τι σχήμα έχει το τετράπλευρο ΠΡΣΤ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Έστω ότι οι ευθείες μεταφέρονται έτσι ώστε το ΠΡΣΤ να γίνει παραλληλόγραμμο. Τι μπορείτε να αναφέρετε περαιτέρω σχετικά με το σχήμα του ΠΡΣΤ στην περίπτωση αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

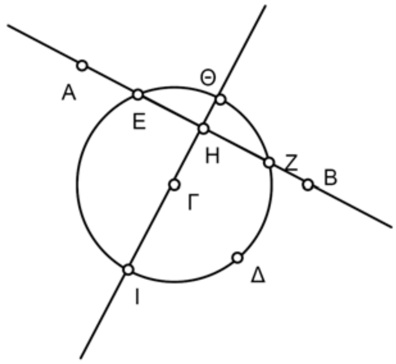
Έρευνα 2: Σχεδίαση ίχνους του μέσου χορδής με μεταφορά μέσω σταθερού σημείου

Η προηγούμενη έρευνα επικεντρωνόταν στο ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς αυτή μεταφερόταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Στην παρούσα έρευνα θα εξετάσετε το ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς η ευθεία, στην οποία ανήκει η χορδή, μεταφέρεται μέσω ενός σταθερού σημείου. Στη συνέχεια, θα έχετε τα απαραίτητα εργαλεία για την κατασκευή εφαπτομένων σε έναν κύκλο και διερχομένων από δοθέν σημείο.

Μέσα χορδών (συνέχεια)

Πειραματισμός

Χρησιμοποιήστε την κατασκευή από την Έρευνα 1 όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά. (Σημειώστε ότι οι ακτίνες ΓΕ και ΓΖ είναι κρυμμένες.)



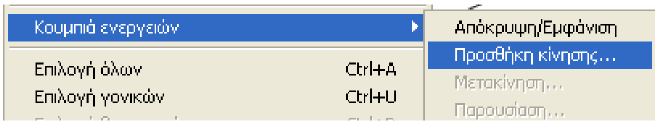
☞ Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου Η καθώς μεταφέρετε το σημείο Β. Έτσι εξασφαλίζετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το σταθερό σημείο Α.

☞ Μελετήστε διεξοδικά το ίχνος. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο διαγράφεται από το μέσο;

Προσθήκη κίνησης

Αυτή είναι μια τεχνική που θα αποδειχτεί χρήσιμη σε πολλές έρευνες αυτού του βιβλίου.

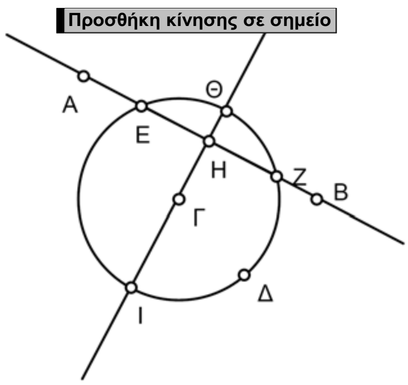
Επειδή το ίχνος του σημείου Η ίσως εξαρτάται από τη θέση του σημείου Α, βοηθά να χρησιμοποιήσετε ένα κουμπί Προσθήκης κίνησης για την επίτευξη της μεταφοράς. Να πώς γίνεται αυτό.



Ένας άλλος τρόπος παρατήρησης του ίχνους του Η είναι η κατασκευή του γεωμετρικού τόπου αυτού του σημείου. Επιλέξτε το σημείο Η, το σημείο Β και τον κύκλο. Επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τόπου** από το μενού **Κατασκευή**.

1. Επιλέξτε το σημείο Β και την περιφέρεια του κύκλου. Από το μενού Επεξεργασία επιλέξτε Κουμπιά ενεργειών. Επιλέξτε Προσθήκη κίνησης από το αναδυόμενο υπομενού.

   Εμφανίζεται ένα πλαίσιο διαλόγου.



2. Επιλέξτε ‘Μία φορά μόνο’ και κάντε κλικ στο ΟΚ. Κάντε κλικ στο κουμπί. Θα πρέπει να δείτε το σημείο Β να μεταβαίνει στο σημείο Ζ του κύκλου και κατόπιν να μετακινείται γύρω από τον κύκλο. Επίσης, θα πρέπει να δείτε το ίχνος του σημείου Η.

3. Χρησιμοποιήστε το κουμπί Προσθήκη κίνησης για να πειραματιστείτε με το ίχνος του σημείου Η για διαφορετικές θέσεις του σημείου Α.

Μέσα χορδών (συνέχεια)

Ερωτήματα

Τα παρακάτω ερωτήματα σας ζητούν να διατυπώσετε μια εικασία σχετικά με το ίχνος του σημείου Η για καθεμιά από τρεις διαφορετικές θέσεις του σημείου Α. Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν πιο ακριβείς σχετικά με το όνομα του αντικειμένου, το μέγεθος και τη θέση του.

Ε1. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο Α βρίσκεται εκτός του κύκλου;

Ε2. Τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με την ευθεία ΑΒ όταν το σημείο Β ταυτίζεται με το σημείο Θ ή το σημείο Ζ;

Ε3. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο Α βρίσκεται πάνω στον κύκλο;

Ε4. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο Α βρίσκεται εντός του κύκλου;

Προβλήματα κατασκευών

Ένα αντικείμενο για το ίχνος του σημείου Η. Στην Έρευνα 1 αποδείχτηκε ότι η ευθεία ΘΙ, που είναι η μεσοκάθετος της χορδής, περιέχει το ίχνος του μέσου Η της χορδής καθώς αυτή μετακινούταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Θεωρήστε τις εξής τρεις δυνατότητες για το σημείο Α: εκτός του κύκλου, πάνω στον κύκλο και εντός του κύκλου. Κατασκευάστε για κάθε περίπτωση ένα αντικείμενο, στο οποίο βρίσκεται το ίχνος του σημείου Η, καθώς μεταφέρεται το σημείο Β.

Εφαπτομένες. Μετακινήστε το σημείο Α εκτός του κύκλου. Χρησιμοποιήστε το αντικείμενο που κατασκευάσατε προηγουμένως για την κατασκευή ευθειών εφαπτομένων στον κύκλο και διερχομένων από το σημείο Α.

Ερώτημα

Ποια είναι η καλύτερη δυνατή εξήγηση που μπορείτε να δώσετε για το σχήμα που διαγράφει το ίχνος του μέσου Η όταν όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Α; (Οι επόμενες έρευνες θα δώσουν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το ερώτημα αυτό.)

Γραφήματα οικογένειας παραβολών

Η βολή ενός αντικειμένου στον αέρα έχει ως αποτέλεσμα μια καμπυλωμένη τροχιά, η οποία είναι πάντοτε μια **παραβολή**. Η παραβολή είναι το γράφημα μιας **δευτεροβάθμιας συνάρτησης**, δηλαδή οποιασδήποτε πολυωνυμικής συνάρτησης μιας μεταβλητής, που περιέχει ένα δευτεροβάθμιο όρο, ενώ κανένας άλλος όρος δεν είναι υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη του 2.

Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε γραφήματα δευτεροβάθμιων συναρτήσεων της μορφής $y = a(x - b)^2 + c$.

Σχέδιο

Βήμα 1: Ανοίξτε ένα νέο σχέδιο και επιλέξτε Ορισμός συστήματος συντεταγμένων από το μενού Γράφημα.

Βήμα 2: Κατασκευάστε το σημείο Γ στον άξονα x και μετρήστε την τετμημένη του.

Βήμα 3: Η συντεταγμένη x του σημείου Γ θα είναι η μεταβλητή x. Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής του $x_Γ$.

Βήμα 4: Θα αποτυπώσετε ένα σημείο της συνάρτησης $y = a(x - b)^2 + c$ με απώτερο σκοπό την αποτύπωση ολόκληρης της συνάρτησης. Το σημείο αυτό θα έχει τις συντεταγμένες $(x_Γ, a(x_Γ - b)^2 + c)$, καθώς $y = a(x - b)^2 + c$. Έχετε ήδη βρει μια έκφραση για το $x_Γ$ αλλά χρειάζεστε ακόμη τιμές για τα a, b και c. Κατασκευάστε τρία σημεία στον άξονα y. Δημιουργήστε τις ετικέτες a, b και c, αντίστοιχα, για τα σημεία.

Βήμα 5: Βρείτε τις τεταγμένες κάθε σημείου. Αυτές οι συντεταγμένες y είναι οι τιμές των a, b και c.

Βήμα 6: Το σχέδιό σας πρέπει να εμφανίζει τώρα μετρήσεις των y_a, y_b και y_c. Ο τύπος της παραβολής θα γίνει πολύ πιο σαφής αν αντικαταστήσετε τα a, b και c με αυτές τις τιμές. Με το εργαλείο κειμένου (όχι το εργαλείο βέλους επιλογής) κάντε διπλό κλικ στο y_a και αλλάξτε στην ετικέτα της μέτρησης το y[a] σε a. Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για την αλλαγή του y_b σε b και του y_c σε c.

Βήμα 7: Εφόσον έχετε μια μεταβλητή, το $x_Γ$, και ένα σύνολο από σταθερές, τα a, b και c, μπορείτε τώρα να υπολογίσετε μια τιμή του y για τη δευτεροβάθμια συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε αυτές τις τιμές στην οθόνη σας και στον Υπολογιστή για τη δημιουργία της έκφρασης $y = a(x_Γ - b)^2 + c$. Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής της τιμής y της συνάρτησης όταν αλλάζει η μεταβλητή $x_Γ$.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

Βήμα 8: Για την αποτύπωση ενός διατεταγμένου ζεύγους της δευτεροβάθμιας συνάρτησης, επιλέξτε κατά σειρά τα $x_Γ$ και $α(x_Γ - b)^2 + c$, καθώς και την εντολή Αποτύπωση με (x, y) από το μενού Γράφημα. Σύρτε το σημείο Γ για να αλλάξει το $x_Γ$ και παρατηρήστε διαφορετικά σημεία της δευτεροβάθμιας συνάρτησης. Μπορείτε να δείτε το σχήμα της παραβολής;

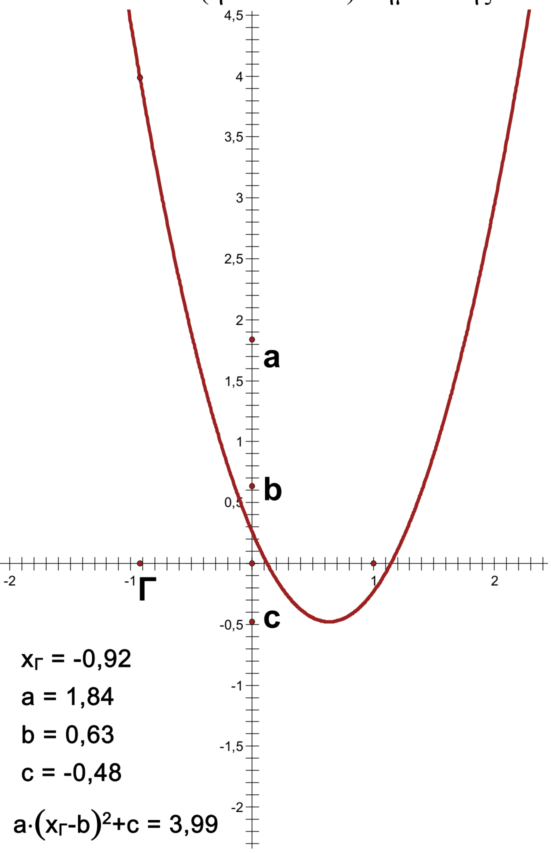
Βήμα 9: Ολόκληρη η δευτεροβάθμια συνάρτηση είναι το σύνολο των δυνατών θέσεων του αποτυπωμένου σημείου $(x_Γ, α(x_Γ - b)^2 + c)$ για διάφορες τιμές του $x_Γ$. Για τη δημιουργία αυτού του γραφήματος, επιλέξτε το σημείο Γ και το αποτυπωμένο σημείο, κατόπιν επιλέξτε Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί μια συνεχής καμπύλη ενός μέρους της παραβολής.

Έρευνα

1. Αλλάξτε τις θέσεις των τριών σημείων στον άξονα y. Περιγράψτε τον τρόπο επίδρασης της τιμής των a, b και c στο σχήμα της παραβολής. Μην παραλείψετε να εξετάσετε και αρνητικές τιμές.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

2. Η **κορυφή** μιας παραβολής είναι το ανώτατο (ή κατώτατο) σημείο της παραβολής. Κάντε κλικ με το εργαλείο σημείων για την τοποθέτηση ενός σημείου στην κορυφή της παραβολής και τη μέτρηση των συντεταγμένων του. (Βοηθά αν οι μετρήσεις σας έχουν ακρίβεια χιλιοστού.) Εξηγήστε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τιμές των b, c σε μια δευτεροβάθμια συνάρτηση για τον προσδιορισμό της κορυφής του γραφήματος.



Παρουσιάστε τις ιδέες σας μέσω δικτύου

Συζητήστε τα ευρήματά σας με το συνεργάτη σας ή με την ομάδα σας. Για την παρουσίασή τους, μπορείτε να εκτυπώσετε ή να αποθηκεύσετε σχολιασμένα σχέδια ή να παρουσιάσετε τις ιδέες σας μέσω ενός δικτύου. Στο σχέδιό σας συγκρίνετε διαφορετικές παραβολές και δείξτε πώς επηρεάζεται το σχήμα τους από τις τιμές των a, b και c. Επίσης, εξηγήστε πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες των κορυφών τους με τις τιμές των b, c. Ίσως θέλετε να προσθέσετε κίνηση στην παραβολή σας, ώστε να αλλάξετε το σχήμα της σύμφωνα με τη θέση ενός ή περισσότερων από τα σημεία a, b και c.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι ρίχνετε μια μπάλα που φθάνει σε ύψος 10 μέτρων και τελικά προσγειώνεται σε απόσταση 5 μέτρων από σας. Σύρτε τα σημεία a, b και c στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας.

   Υπόδειξη: Σύρτε το σημείο (1, 0) για να αλλάξει η κλίμακα, ώστε να μπορείτε να αναπαραστήσετε τα 10 μέτρα στον άξονα y. Επίσης, ίσως είναι σκόπιμο να αποτυπώσετε λίγα σημεία.

   Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

2. α. Σε μια ελεύθερη βολή ένας παίκτης του μπάσκετ ύψους 2 μέτρων ρίχνει την μπάλα από απόσταση 5 μέτρων σε ένα καλάθι σε ύψος 3,3 μέτρων. Σύρτε τα σημεία a, b και c στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας. Υποθέστε ότι κατά τη βολή τα χέρια του παίκτη βρίσκονται στο ίδιο ύψος με το κεφάλι του. Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.

   β. Πόσες διαφορετικές παραβολές μοντελοποιούν την κατάσταση στο ζήτημα α; Πόσες διαφορετικές ελεύθερες βολές είναι δυνατές;

3. Ίσως γνωρίζετε ήδη ότι δύο σημεία ορίζουν πάντοτε μία και μόνο ευθεία. Ορίζουν πάντοτε τρία σημεία ακριβώς μια παραβολή;

4. Δημιουργήστε με το Sketchpad το γράφημα μιας άλλης ενδιαφέρουσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με αυτή για το γράφημα της παραβολής.

Διάμεσοι ενός τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): _________________

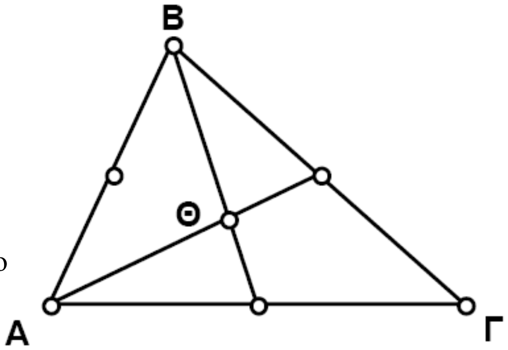
Η διάμεσος σε ένα τρίγωνο συνδέει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Σε προηγούμενες έρευνες ενδεχομένως να ανακαλύψατε ιδιότητες των διχοτόμων, των μεσοκαθέτων και των υψών ενός τριγώνου. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποια υπόθεση σχετικά με τις διαμέσους; Ορισμένες ιδιότητες ίσως μπορούν να προβλεφθούν, αλλά υπάρχουν και στις διαμέσους καινούρια στοιχεία.

Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.

2. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των τριών πλευρών.

3. Κατασκευάστε δύο από τις τρεις διαμέσους, η καθεμιά από τις οποίες συνδέει μια κορυφή με το σημείο στο μέσο της απέναντι πλευράς.



Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει τρεις διαμέσους, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομής**.

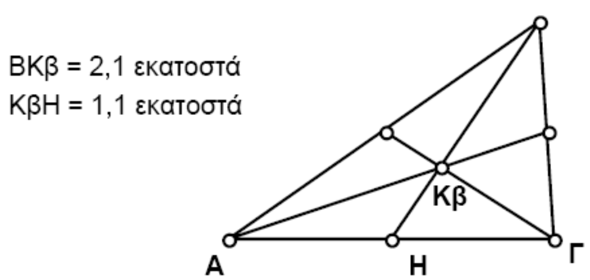
4. Κατασκευάστε το σημείο τομής των δύο διαμέσων.

5. Κατασκευάστε την τρίτη διάμεσο.

Ε1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη διάμεσο; Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η εικασία αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Χρησιμοποιήστε το εργαλείο κειμένου και κάντε κλικ μια φορά στο σημείο ώστε να εμφανίσετε την ετικέτα του. Κάντε διπλό κλικ στην ετικέτα προκειμένου να την αλλάξετε.

6. Το σημείο τομής των διαμέσων ονομάζεται **κέντρο βάρους** του τριγώνου. Εμφανίστε την ετικέτα του και αλλάξτε την σε Κβ (αρχικά των λέξεων Κέντρο βάρους).



Προτού μετρήσετε μια απόσταση μεταξύ δύο σημείων, επιλέξτε τα σημεία αυτά.

7. Μετρήστε την απόσταση από το Β έως το Κβ, καθώς και την απόσταση από το Κβ έως το σημείο Η στο μέσο του ΑΓ.

Απόσταση (Β έως Κβ)	2,08	1,50	1,20	2,13
Απόσταση (Κβ έως Η)	1,04	0,75	0,60	1,07

Διάμεσοι ενός τριγώνου (συνέχεια)

8. Μεταφέρετε τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και αναζητήστε μια σχέση μεταξύ της ΒΚβ και της ΚβΗ.

Επιλέξτε τις δύο μετρήσεις. Κατόπιν επιλέξτε **Πινακοποίηση** από το μενού **Μέτρηση**.

9. Κατασκευάστε έναν πίνακα με αυτές τις δύο μετρήσεις.

10. Μεταβάλετε το τρίγωνο και κάντε διπλό κλικ στον πίνακα τιμών για την προσθήκη νέας εγγραφής.

11. Συνεχίστε να μεταβάλλετε το τρίγωνο και να προσθέτετε νέες εγγραφές στον πίνακα, ωσότου είστε σε θέση να διακρίνετε μια σχέση μεταξύ των αποστάσεων ΒΚβ και ΚβΖ.

Για την εισαγωγή μιας μέτρησης σε έναν υπολογισμό, κάντε κλικ μια φορά σ' αυτή.

12. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας σχετικά με τις τιμές του πίνακα, χρησιμοποιήστε τον Υπολογιστή προκειμένου να δώσετε μια έκφραση με τις μετρήσεις, που θα παραμένει σταθερή ακόμη και όταν μεταβάλλονται οι μετρήσεις.

Ε2. Γράψτε την έκφραση που υπολογίσατε στο βήμα 12.

Ε3. Γράψτε μια εικασία σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο το κέντρο βάρους χωρίζει σε τμήματα καθεμιά από τις διαμέσους ενός τριγώνου.

Επιλέξτε τον πίνακα. Κατόπιν στο μενού **Γράφημα** επιλέξτε **Αποτύπωση δεδομένων πίνακα**. Στο πλαίσιο διαλόγου Αποτύπωση σημείων από τον πίνακα κάντε κλικ στην **Αποτύπωση** (εφόσον δεν επιθυμείτε να προβείτε σε αλλαγή οποιουδήποτε από τα δεδομένα).

13. Προχωρήστε σε αποτύπωση των δεδομένων του πίνακα. Θα πρέπει να λάβετε ένα γράφημα με αρκετά συγγραμμικά σημεία.

14. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από οποιαδήποτε δύο εκ των σημείων των δεδομένων και μετρήστε την κλίση της.

Ε4. Εξηγήστε τη σημασία της κλίσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία των δεδομένων.

Περαιτέρω εξερεύνηση

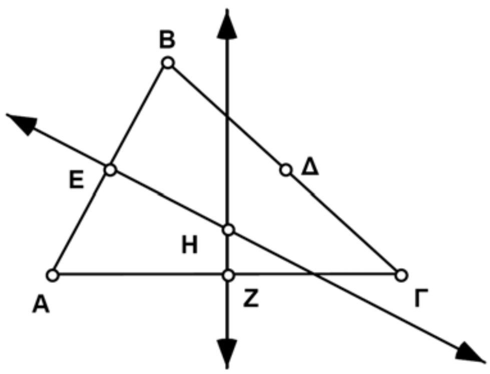
Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο που κατασκευάζει το κέντρο βάρους ενός τριγώνου. Αποθηκεύστε το εργαλείο αυτό για μελλοντικές έρευνες σχετικά με το κέντρο βάρους ενός τριγώνου.

<u>Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου</u>

Ονοματεπώνυμο(α): ___________________

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ιδιότητες των μεσοκαθέτων ενός τριγώνου. Επίσης, θα μάθετε πώς να κατασκευάζετε έναν κύκλο που διέρχεται από κάθε κορυφή ενός τριγώνου.

Σχέδιο και έρευνα



1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.

2. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των πλευρών.

Επιλέξτε μια πλευρά και το σημείο στο μέσο της. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετης ευθείας**.

3. Κατασκευάστε δύο από τις τρεις μεσοκαθέτους του τριγώνου.

Κάντε κλικ στο σημείο τομής με το εργαλείο βέλους επιλογής ή με το εργαλείο σημείων. Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει και τις τρεις μεσοκαθέτους, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομής**.

4. Κατασκευάστε το σημείο Η, δηλαδή το σημείο τομής των μεσοκαθέτων.

5. Κατασκευάστε την τρίτη μεσοκάθετο.

Ε1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη μεσοκάθετο (που δεν εμφανίζεται στο σχήμα); Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η εικασία αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.

6. Μεταφέρετε μια κορυφή έτσι ώστε το σημείο Η να εισέρχεται και να εξέρχεται του τριγώνου. Κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης, παρατηρήστε τις γωνίες του τριγώνου.

Ε2. Σε ποιο είδος τριγώνου το σημείο Η βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου και σε ποιο είδος στο εσωτερικό του;

Ε3. Μεταφέρετε μια κορυφή ωσότου το σημείο Η βρεθεί πάνω σε μια πλευρά του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό; Πού ακριβώς βρίσκεται το σημείο Η;

Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου (συνέχεια)

Επιλέξτε το σημείο Η και μια κορυφή. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Απόστασης**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες δύο κορυφές.

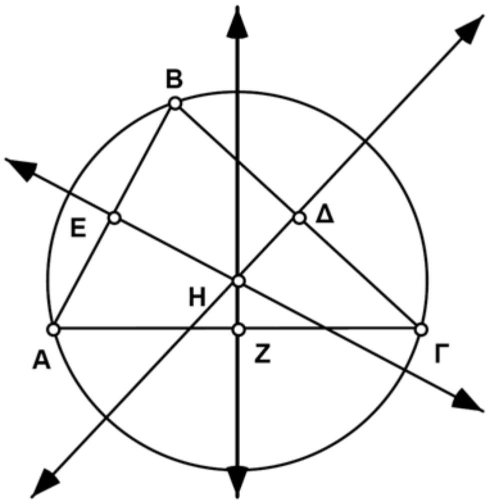
7. Μετρήστε την απόσταση κάθε κορυφής από το σημείο Η.

8. Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου και παρατηρήστε τις αποστάσεις.

Ε4. Το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων ονομάζεται **περίκεντρο** του τριγώνου. Τι παρατηρείτε σχετικά με την απόσταση κάθε κορυφής του τριγώνου από το περίκεντρο;

Βεβαιωθείτε ότι αρχίζετε τον κύκλο σας στο σημείο Η και τον ολοκληρώνετε με τον δρομέα σας ακριβώς πάνω στο σημείο Α. Διαφορετικά, ενδέχεται ο κύκλος να μην παραμείνει περιγεγραμμένος όταν προβείτε σε κάποια μεταφορά. (Στην περίπτωση αυτή, αναιρέστε τα προηγούμενα και επαναλάβετε τη διαδικασία.)

9. Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Η και ακτίνα την ΗΑ. Αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.



Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του περίκεντρου ενός τριγώνου (με ή χωρίς τον περιγεγραμμένο κύκλο). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτό το εργαλείο σε άλλες έρευνες κατά την ανακάλυψη ιδιοτήτων άλλων ειδικών σημείων ενός τριγώνου.

2. Εξηγήστε γιατί το περίκεντρο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.
   Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σημείο στη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος. Γιατί το περίκεντρο ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου;

3. Προσπαθήστε να περιγράψετε έναν κύκλο γύρω από άλλα, πέραν του τριγώνου, σχήματα. Γράψτε τις προσπάθειές σας συμπεριλαμβάνοντας οποιαδήποτε πρόσθετη εικασία θεωρήσετε αναγκαία.

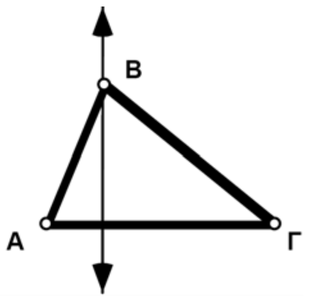
<u>Ύψη ενός τριγώνου</u>   **Ονοματεπώνυμο(α):** ________________

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ορισμένες ιδιότητες των υψών ενός τριγώνου. Ένα **ύψος** είναι ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μια κορυφή ενός τριγώνου προς την απέναντι πλευρά (ή προς μια ευθεία που περιέχει την πλευρά). Η πλευρά στην οποία καταλήγει ένα ύψος ονομάζεται **βάση** του ύψους αυτού. Καθώς ένα τρίγωνο έχει τρεις πλευρές, διαθέτει και τρία ύψη. Εδώ θα κατασκευάσετε ένα ύψος και θα δημιουργήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσετε αυτό το εργαλείο για την κατασκευή των άλλων δύο υψών.

Σχέδιο και έρευνα

Επιλέξτε το σημείο Β και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετης ευθείας**.

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.



2. Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και διερχόμενη από το σημείο Β.

Ε1. Εάν το τρίγωνό σας είναι οξυγώνιο, αυτή η κάθετη ευθεία θα τέμνει μια πλευρά του τριγώνου. Μεταφέρετε το σημείο Β έτσι ώστε η ευθεία να βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό;

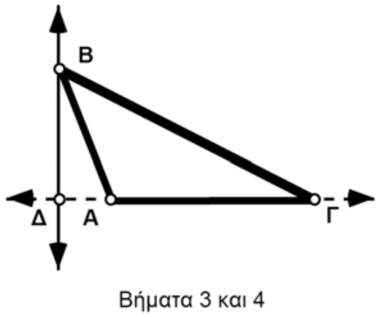
Διατηρώντας το πλήκτρο του ποντικιού πατημένο στο εργαλείο ευθύγραμμων τμημάτων, σύρτε το δείκτη προς τα δεξιά ώστε να επιλέξετε το εργαλείο ευθειών. Κατασκευάστε την ευθεία σας ώστε να διέρχεται τα άκρα της πλευράς του τριγώνου.

3. Με την κάθετη ευθεία στο εξωτερικό του τριγώνου, χρησιμοποιήστε μια ευθεία προκειμένου να προεκτείνετε την πλευρά ΑΓ έτσι ώστε να τέμνει την κάθετο.

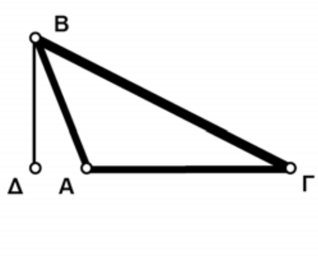
4. Κατασκευάστε το σημείο Δ, δηλαδή το σημείο τομής της προεκτεταμένης πλευράς και της κάθετης ευθείας.

5. Αποκρύψτε τις ευθείες.

6. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, το οποίο είναι ένα από τα ύψη του τριγώνου.



Βήματα 3 και 4



Βήματα 5 και 6

Ύψη ενός τριγώνου (συνέχεια)

7. Σύρτε τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα ύψη του.

Ε2. Πού βρίσκεται το ύψος που κατασκευάσατε όταν η γωνία Α είναι ορθή;

8. Μεταφέρετε το τρίγωνο έτσι ώστε να καταστεί εκ νέου οξυγώνιο (με το ύψος να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου).

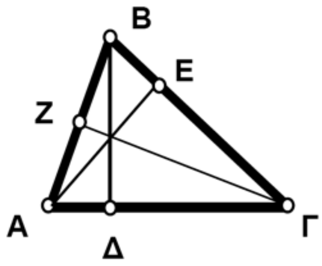
Επιλέξτε τα πάντα στο σχέδιό σας. Κατόπιν στα Προσαρμοσμένα εργαλεία της Εργαλειοθήκης επιλέξτε **Δημιουργία νέου εργαλείου...**

9. Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή.

Το Προσαρμοσμένο εργαλείο που δημιουργήσατε, θα κατασκευάσει ένα τρίγωνο και ένα ύψος από μία εκ των κορυφών. Προκειμένου να το χρησιμοποιήσετε, επιλέξτε το από τα **Προσαρμοσμένα εργαλεία** και κάντε κλικ στις τρεις κορυφές του τριγώνου σας.

10. Εφαρμόστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο στις κορυφές του τριγώνου προκειμένου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο ύψος. Μην ανησυχήσετε εάν, κατά τύχη, κατασκευάσετε το ήδη υπάρχον ύψος. Απλώς εφαρμόστε ξανά το Προσαρμοσμένο εργαλείο στις κορυφές, αλλά με διαφορετική σειρά, ωσότου προκύψει ένα άλλο ύψος.

11. Χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του τρίτου ύψους του τριγώνου.



Βήμα 11

12. Σύρτε το τρίγωνο και παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα τρία ύψη.

Ε3. Τι παρατηρείτε σχετικά με τα τρία ύψη όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο;

Ε4. Τι παρατηρείτε σχετικά με τα τρία ύψη όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο;

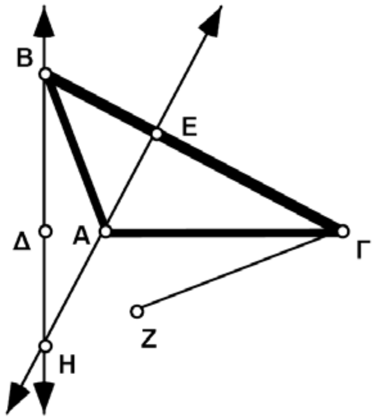
Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τα τρία ύψη δεν τέμνονται μεταξύ τους. Πιστεύετε ότι θα τεμνόταν και τα τρία στο ίδιο σημείο αν είχαν αρκετά μεγάλο μήκος; Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα προκειμένου να εξετάσετε αυτό το ερώτημα.

Ύψη ενός τριγώνου (συνέχεια)

13. Βεβαιωθείτε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. Κατασκευάστε δύο ευθείες, καθεμιά από τις οποίες περιέχει ένα ύψος.

Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει τρεις ευθείες, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομής**.

14. Κατασκευάστε το σημείο τομής τους. Το σημείο αυτό ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Βήματα 13 και 14

15. Κατασκευάστε μια ευθεία που περιέχει το τρίτο ύψος.

16. Μεταφέρετε το τρίγωνο και παρατηρήστε τις ευθείες.

Ε5. Τι παρατηρείτε σχετικά με τις ευθείες που περιέχουν τα ύψη;

Περαιτέρω εξερεύνηση

Αποκρύψτε τα πάντα στο σχέδιό σας εκτός από το τρίγωνο και το ορθόκεντρο. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο, το οποίο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε σε άλλες έρευνες σχετικά με τα ειδικά σημεία ενός τριγώνου.

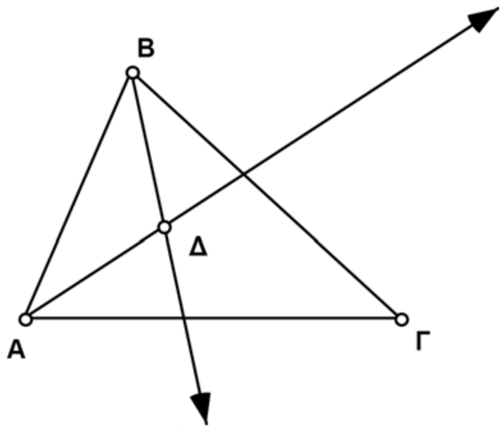
Διχοτόμοι ενός τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ορισμένες ιδιότητες των διχοτόμων ενός τριγώνου.

Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.



Βήματα 1-3

Επιλέξτε τρία σημεία με την κορυφή της γωνίας ως δεύτερη κατά σειρά επιλογή. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Διχοτόμου γωνίας**.

2. Κατασκευάστε τις διχοτόμους για τις δύο από τις τρεις γωνίες, δηλαδή για τις γωνίες Α και Β.

Κάντε κλικ στην τομή με το εργαλείο βέλους επιλογής ή με το εργαλείο σημείων ή επιλέξτε τις δύο διχοτόμους και ακολούθως, στο μενού **Κατασκευή**, επιλέξτε **Τομής**.

3. Κατασκευάστε το σημείο Δ, δηλαδή το σημείο τομής των δύο διχοτόμων.

4. Κατασκευάστε τη διχοτόμο της γωνίας Γ.

Ε1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη διχοτόμο (που δεν εμφανίζεται στο σχήμα); Μεταφέρετε καθεμιά από τις κορυφές του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η παρατήρηση αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Επιλέξτε το σημείο Δ και μια από τις πλευρές του τριγώνου. Κατόπιν, στο μενού **Μέτρηση**, επιλέξτε **Απόστασης**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες δύο πλευρές.

5. Μετρήστε την απόσταση του σημείου Δ από κάθε πλευρά του τριγώνου.

6. Μεταφέρετε καθεμιά από τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε τις αποστάσεις.

Ε2. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου ονομάζεται **έγκεντρο**. Γράψτε μια εικασία σχετικά με την απόσταση κάθε πλευράς του τριγώνου από το έγκεντρο.

Διχοτόμοι ενός τριγώνου (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Ένας εγγεγραμμένος κύκλος είναι ένας κύκλος στο εσωτερικό ενός τριγώνου ο οποίος εφάπτεται σε καθεμιά από τις πλευρές του τριγώνου. Κατασκευάστε έναν εγγεγραμμένο κύκλο, ο οποίος παραμένει εγγεγραμμένος ανεξαρτήτως του τρόπου μεταφοράς των κορυφών του τριγώνου.

   Υπόδειξη: Χρειάζεται να κατασκευάσετε μια κάθετη ευθεία.

2. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του έγκεντρου ενός τριγώνου (με ή χωρίς τον εγγεγραμμένο κύκλο). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εργαλείο αυτό σε άλλες έρευνες σχετικά με τα ειδικά σημεία ενός τριγώνου.

3. Εξηγήστε γιατί η τομή μεταξύ των διχοτόμων είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

   Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σημείο μιας διχοτόμου ισαπέχει από τις δύο πλευρές της γωνίας. Γιατί το έγκεντρο ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου;

<u>Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων</u>

Ονοματεπώνυμο(α): ____________________

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες. Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εκτός από ίσες γωνίες διαθέτει πολλές ειδικές ιδιότητες.

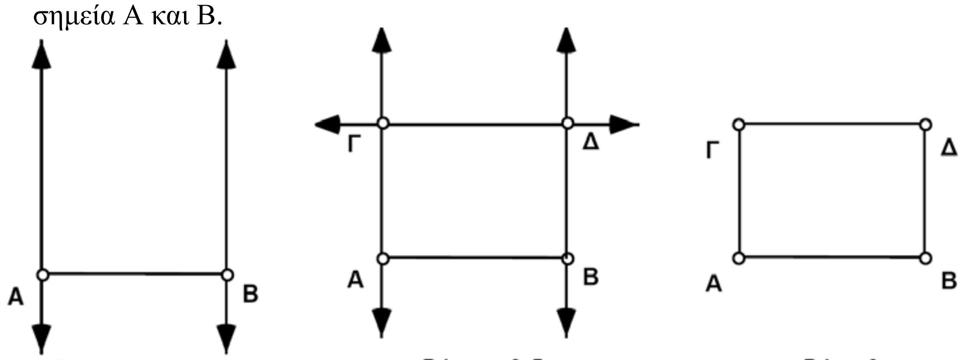
Σχέδιο και έρευνα

Αρχικά θα κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του.

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Επιλέξτε τα σημεία Α και Β καθώς και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετων ευθειών**. Θα εμφανιστούν αμέσως και οι δύο κάθετες ευθείες.

2. Κατασκευάστε ευθείες κάθετες στο τμήμα ΑΒ και διερχόμενες από τα σημεία Α και Β.



Βήματα 1 και 2 — Βήματα 3-5 — Βήμα 6

3. Κατασκευάστε το σημείο Γ στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α.

4. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Γ και κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

5. Κατασκευάστε την τέταρτη κορυφή, δηλαδή το σημείο Δ, στην τομή αυτής της ευθείας και της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Β.

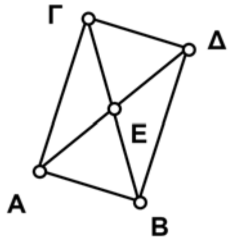
6. Αποκρύψτε τις ευθείες και κατόπιν κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα ώστε να ολοκληρώσετε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

7. Μετρήστε τις πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.

8. Σύρτε τις διαφορετικές κορυφές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου προκειμένου να βεβαιωθείτε ότι έχει κατασκευαστεί σωστά. Παρατηρήστε τα μήκη των πλευρών καθώς σύρετε τις κορυφές.

Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων (συνέχεια)

Ε1. Διατυπώστε μια εικασία σχετικά με τις πλευρές ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.



9. Κατασκευάστε τις διαγώνιους καθώς και το σημείο τομής τους.

Επιλέξτε ένα ευθύγραμμο τμήμα και κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Μήκους** ή επιλέξτε δύο ακραία σημεία και **Απόστασης**.

10. Σύρτε τμήματα του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και παρατηρήστε τις διαγώνιους. Μετρήστε μήκη που μοιάζουν να σχετίζονται μεταξύ τους.

Ε2. Γράψτε τουλάχιστον δύο εικασίες σχετικά με τις διαγώνιους ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Αν είναι απαραίτητο, χρησιμοποιήστε και δεύτερη σελίδα χαρτιού.

Ιδιότητες ρόμβων

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

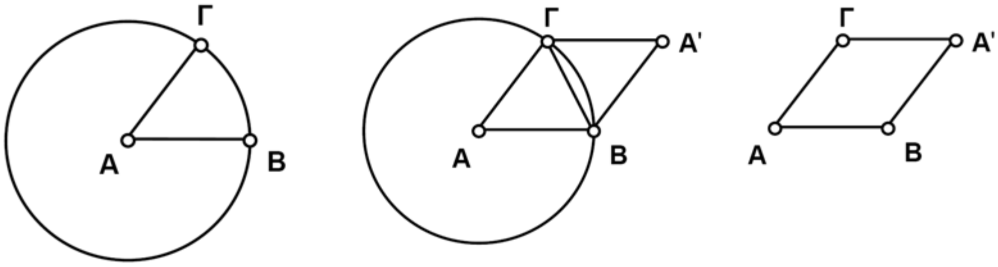
Ο ρόμβος είναι ένα ισόπλευρο τετράπλευρο. Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε πολλές άλλες ιδιότητες των ρόμβων.

Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε τον κύκλο AB.

Βεβαιωθείτε ότι χρησιμοποιήσατε τα σημεία του κύκλου ως άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB.

2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AB.
3. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AΓ, όπου το σημείο Γ ανήκει στον κύκλο.



Βήματα 1-3 Βήματα 4-6 Βήμα 7

4. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα BΓ.

Κάντε διπλό κλικ στο ευθύγραμμο τμήμα BΓ προκειμένου να το επιλέξετε ως άξονα συμμετρίας. Επιλέξτε το σημείο A καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα AΓ και AB. Κατόπιν στο μενού **Μετασχηματισμός** επιλέξτε **Ανάκλαση**.

5. Επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα BΓ ως άξονα συμμετρίας και προχωρήστε σε ανάκλαση του σημείου A, του ευθύγραμμου τμήματος AΓ και του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς αυτόν.
6. Αποκρύψτε τον κύκλο και το ευθύγραμμο τμήμα BΓ.
7. Μεταφέρετε διαφορετικές κορυφές του ρόμβου προκειμένου να βεβαιωθείτε ότι έχει κατασκευαστεί σωστά.

Ιδιότητες ρόμβων (συνέχεια)

Για τη μέτρηση της κλίσης, πρώτα επιλέξτε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Κλίση**. Για τη μέτρηση μιας γωνίας, πρώτα επιλέξτε τρία σημεία με την κορυφή της γωνίας ως δεύτερη κατά σειρά επιλογή.

8. Μετρήστε την κλίση των πλευρών του ρόμβου καθώς και τις γωνίες του.

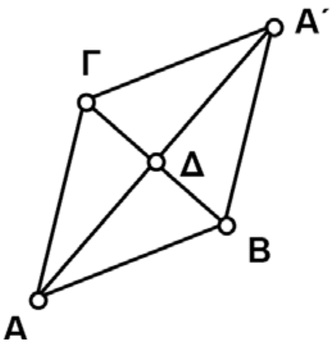
9. Μεταφέρετε διαφορετικές κορυφές και παρατηρήστε τις μετρήσεις αυτές.

Ε1. Γράψτε τουλάχιστον τρεις εικασίες σχετικά με τις πλευρές και τις γωνίες ενός ρόμβου.

10. Κατασκευάστε τις διαγώνιους καθώς και το σημείο τομής τους.

Για τη μέτρηση ενός μήκους, επιλέξτε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Μήκους** ή επιλέξτε δύο ακραία σημεία και **Απόστασης**.

11. Μεταφέρετε μέρη του ρόμβου και παρατηρήστε πώς οι διαγώνιοι σχετίζονται μεταξύ τους καθώς και προς τις γωνίες του ρόμβου. Μετρήστε μήκη και γωνίες που μοιάζουν να σχετίζονται μεταξύ τους.



Ε2. Γράψτε τουλάχιστον τρεις εικασίες σχετικά με τις διαγώνιους ενός ρόμβου. Αν είναι απαραίτητο, χρησιμοποιήστε μια δεύτερη σελίδα χαρτιού.

Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων

Ονοματεπώνυμο(α): ______________

Θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ των εμβαδών παραλληλόγραμμων και τριγώνων εξετάζοντας μια διαδικασία που ονομάζεται **διατμητική παραμόρφωση**. Έτσι, θα λάβετε έναν τύπο για το εμβαδόν τον οποίο μπορείτε να γενικεύσετε για κάθε παραλληλόγραμμο.

Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε μια οριζόντια ευθεία ΑΒ.

2. Κατασκευάστε το σημείο Γ πάνω από την ευθεία ΑΒ.

Επιλέξτε το σημείο Γ και την ευθεία ΑΒ. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Παράλληλης ευθείας.**

3. Κατασκευάστε μια ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ και διερχόμενη από το σημείο Γ.

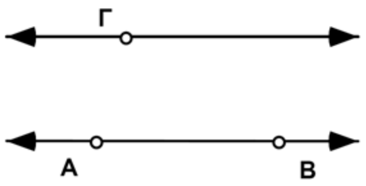
4. Αποκρύψτε τα σημεία Α, Β και Γ.

5. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ μεταξύ της κάτω και της πάνω ευθείας.

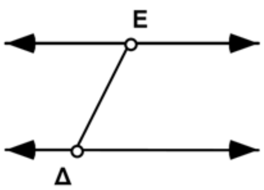
6. Κατασκευάστε το σημείο Ζ στην κάτω ευθεία.

7. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Ζ και παράλληλη προς το τμήμα ΔΕ.

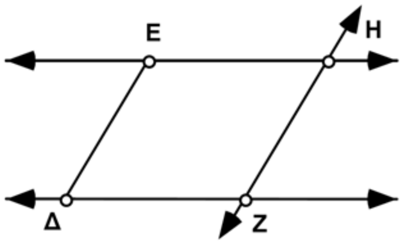
8. Κατασκευάστε το σημείο Η στην τομή μεταξύ της ευθείας αυτής και της πάνω ευθείας.



Βήματα 1-3



Βήματα 4 και 5



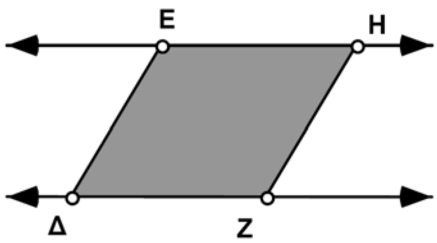
Βήματα 5-7

Επιλέξτε διαδοχικά τις κορυφές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικού τετράπλευρου**.

9. Κατασκευάστε το εσωτερικό του πολυγώνου ΔΕΗΖ.

10. Αποκρύψτε την ευθεία ΖΗ.

11. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ.



Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων (συνέχεια)

Επιλέξτε το εσωτερικό κάνοντας κλικ σε αυτό. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Εμβαδού**.

12. Μετρήστε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ΔΕΗΖ.

13. Παρατηρήστε τη μέτρηση του εμβαδού σε καθέναν από τους ακόλουθους τρόπους μεταφοράς:

    α. Μεταφέρετε το σημείο Ε, ώστε να υποστεί διάτμηση το παραλληλόγραμμο.

    β. Μεταφέρετε το σημείο Δ ή το σημείο Ζ, ώστε να μεταβληθεί η βάση του παραλληλόγραμμου.

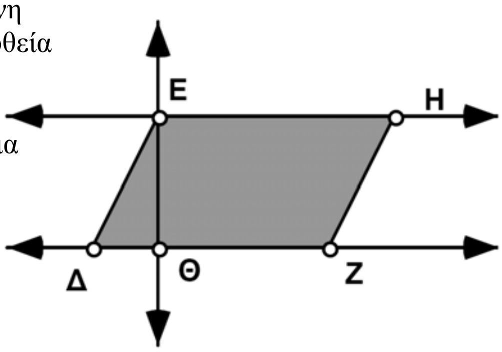
    γ. Μεταφέρετε είτε την ευθεία ΕΗ είτε την ευθεία ΔΖ πάνω ή κάτω, ώστε να μεταβληθεί το ύψος.

Ε1. Ποια από αυτές τις ενέργειες έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του εμβαδού και ποια όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Το ύψος του παραλληλόγραμμου είναι η απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων ευθειών. Για την κατασκευή ενός ευθύγραμμου τμήματος που το μήκος του είναι το ύψος του παραλληλόγραμμου, ακολουθήστε τα βήματα 14 και 15.

14. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Ε και κάθετη στην ευθεία ΔΖ.

15. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ, όπου Θ είναι το σημείο τομής μεταξύ της ευθείας ΔΖ και της κάθετης ευθείας.



16. Αποκρύψτε την κάθετη ευθεία.

Επιλέξτε τα δύο ακραία σημεία. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Απόσταση**.

17. Μετρήστε το μήκος του ΕΘ.

18. Μετρήστε το τμήμα ΔΖ, δηλαδή τη βάση του παραλληλόγραμμου.

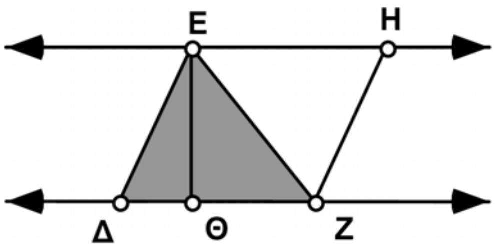
Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων (συνέχεια)

Κάντε κλικ μια φορά σε μια μέτρηση ώστε να την εισαγάγετε σε έναν υπολογισμό στον Υπολογιστή.

E2. Χρησιμοποιήστε αυτές τις μετρήσεις προκειμένου να υπολογίσετε την τιμή μιας έκφρασης ίσης με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου. Γράψτε την έκφραση αυτή.

E3. Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου χρησιμοποιώντας τα γράμματα Ε για το εμβαδόν, β για τη βάση και υ για το ύψος.

Ακολούθως, θα ερευνήσετε τον τρόπο με τον οποίο το εμβαδόν τού παραλληλόγραμμου σχετίζεται με το εμβαδόν ενός τριγώνου.



19. Αποκρύψτε το εσωτερικό του παραλληλόγραμμου.

20. Κατασκευάστε τη διαγώνιο ΕΖ.

21. Κατασκευάστε το εσωτερικό του πολυγώνου ΔΕΖ.

22. Μετρήστε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

23. Μεταφέρετε το σημείο Ε και παρατηρήστε τις μετρήσεις του εμβαδού.

E4. Πώς σχετίζεται το εμβαδόν του τριγώνου με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου; Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου χρησιμοποιώντας τα γράμματα Ε για το εμβαδόν, β για τη βάση και υ για το ύψος.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών προκειμένου να προσθέσετε κίνηση στο σημείο Ε κατά μήκος της ευθείας στην οποία ανήκει. Εξηγήστε γιατί η κίνηση αυτή επιδεικνύει τη διατμητική παραμόρφωση.

Εμβαδόν/περίμετρος τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): ____________________

Είναι δυνατή η κατασκευή δύο άνισων τριγώνων τα οποία έχουν ίσα εμβαδά και ίσες περιμέτρους; Χρησιμοποιήστε το Sketchpad προκειμένου να εξετάσετε αυτό το ερώτημα. Στον κενό χώρο παρακάτω μπορείτε να περιγράψετε τα ευρήματά σας ή να εκτυπώσετε ένα σχέδιο με σχόλια που θα περιγράφουν τις ανακαλύψεις σας.

Για τη μέτρηση εμβαδού και περιμέτρου, πρέπει πρώτα να κατασκευάσετε ένα εσωτερικό πολυγώνου. Επιλέξτε λοιπόν τις κορυφές κατά διαδοχική σειρά. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικού τριγώνου**.

E1. Εφόσον είναι δυνατόν, στον κενό χώρο παρακάτω σχεδιάστε και αντιστοιχίστε από μία ετικέτα σε καθένα από τα δύο άνισα τρίγωνα ίσων εμβαδών και περιμέτρων (ή εκτυπώστε το σχέδιό σας και επικολλήστε το σε αυτή τη σελίδα). Εάν κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν, εξηγήστε την αιτία.

E2. Στον κενό χώρο παρακάτω δώστε μια περιγραφή των ενεργειών σας σε αυτή την έρευνα. Εάν δημιουργήσατε δύο άνισα τρίγωνα ίσων εμβαδών και περιμέτρων, περιγράψτε τον τρόπο κατασκευής τους.

Εμβαδόν ενός τραπεζίου

Ονοματεπώνυμο(α): ________________

Το τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο με δύο παράλληλες πλευρές. Στην έρευνα αυτή θα κατασκευάσετε ένα τραπέζιο και κατόπιν θα το μετασχηματίσετε σε ένα σχήμα για το εμβαδόν του οποίου πρέπει να γνωρίζετε τον τύπο. Από τον τύπο αυτό θα εξάγετε μια σχέση για το εμβαδόν του τραπεζίου.

Σχέδιο και έρευνα

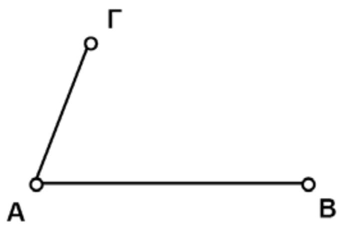
1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.

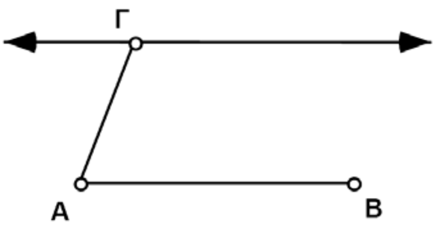
Επιλέξτε το σημείο Γ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Παράλληλης ευθείας**.

3. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Γ και παράλληλη προς το τμήμα ΑΒ.

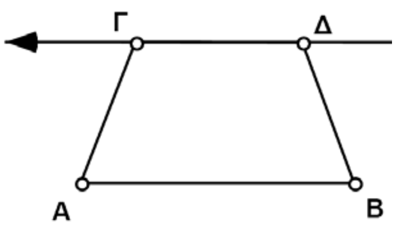
4. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ, όπου το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία.



Βήματα 1 και 2



Βήμα 3



Βήμα 4

Επιλέξτε την ευθεία. Κατόπιν στο μενού **Προβολή** επιλέξτε **Απόκρυψη**.

5. Αποκρύψτε την ευθεία.

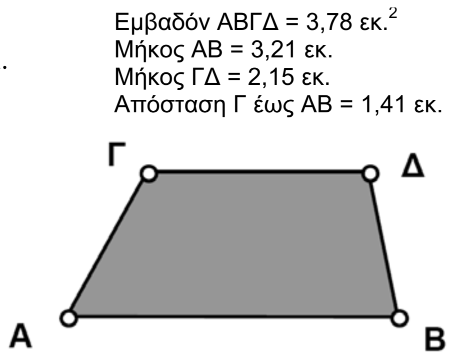
6. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

Επιλέξτε τις κορυφές κατά διαδοχική σειρά. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικό τετράπλευρου**.

7. Κατασκευάστε το εσωτερικό πολυγώνου του τραπεζίου ΑΒΔΓ.

8. Μετρήστε το εμβαδόν του ΑΒΔΓ.

9. Μετρήστε τα μήκη των βάσεων, ΑΒ και ΓΔ, του τραπεζίου.



Επιλέξτε το σημείο Γ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Απόστασης**.

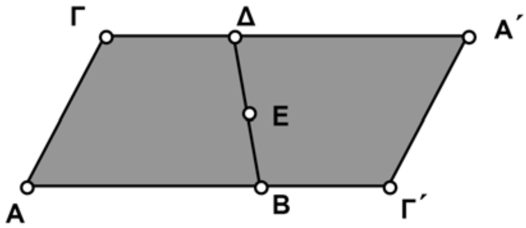
10. Μετρήστε την απόσταση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ από το σημείο Γ. Αυτό είναι το ύψος του τραπεζίου.

11. Μεταφέρετε διαφορετικά μέρη του τραπεζίου και παρατηρήστε τις μετρήσεις.

Εμβαδόν ενός τραπεζίου (συνέχεια)

Στο σημείο αυτό ίσως είναι δύσκολο να βρείτε οποιαδήποτε σχέση μεταξύ της μέτρησης του εμβαδού και των μετρήσεων της βάσης και του ύψους. Συνεχίστε τη σχεδίαση προκειμένου να ερευνήσετε τη ζητούμενη σχέση.

12. Κατασκευάστε το σημείο Ε στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΔΒ.



Κάντε διπλό κλικ στο σημείο Ε ώστε να το επιλέξετε ως κέντρο. Επιλέξτε το τραπέζιο. Στο μενού **Μετασχηματισμός** επιλέξτε **Περιστροφή**.

13. Επιλέξτε το σημείο Ε ως κέντρο και περιστρέψτε ολόκληρο το τραπέζιο κατά 180°.

14. Μεταφέρετε τμήματα του σχήματος και παρατηρήστε τη μορφή που αποκτά το τραπέζιο και το περιστραμμένο είδωλό του.

Ε1. Ποιο σχήμα αποκτούν τα δύο συνδυασμένα τραπέζια;

Ε2. Έστω $β_1$ το μήκος της βάσης ΑΒ και $β_2$ το μήκος της βάσης ΓΔ. Ποιο είναι το μήκος της βάσης του σχήματος των συνδυασμένων τραπεζίων;

Ε3. Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν ενός απλού τραπεζίου σε συνάρτηση με τα $β_1$, $β_2$ και υ (ύψος).

Κάντε κλικ μία φορά σε μια μέτρηση ώστε να την εισαγάγετε σε έναν υπολογισμό. Όπου είναι απαραίτητο χρησιμοποιήστε παρενθέσεις.

Ε4. Ελέγξτε στο σχέδιό σας ότι έχετε εξαγάγει το σωστό τύπο υπολογίζοντας μια έκφραση ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου. Χρησιμοποιήστε στην έκφρασή σας τα ΑΒ, ΓΔ καθώς και την απόσταση του σημείου Γ από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Γράψτε στον κενό χώρο παρακάτω την έκφρασή σας.

Εμβαδόν ενός τραπεζίου (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου. Συνδέστε τα σημεία αυτά με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Χρησιμοποιήστε το μήκος αυτού του τμήματος ώστε να επινοήσετε ένα νέο τύπο για το εμβαδόν.

2. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο στο εσωτερικό του τραπεζίου με εμβαδόν ίσο με το ήμισυ του εμβαδού του τραπεζίου. Εξηγήστε τις ενέργειές σας. Υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι για την κατασκευή αυτή;

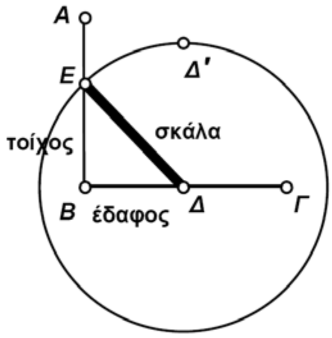
Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας

Ονοματεπώνυμο(α): __________________

Η σχεδίαση διαγραμμάτων αποτελεί μια χρήσιμη μέθοδο για την επίλυση πολλών ειδών ρεαλιστικών προβλημάτων. Τα δυναμικά διαγράμματα μπορούν να είναι ακόμη πιο χρήσιμα. Εδώ παρουσιάζουμε ένα πρόβλημα το οποίο μπορεί να λυθεί μέσω ενός σχεδίου του Sketchpad:

Εάν στηρίξετε μια σκάλα σε έναν τοίχο έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζει με το έδαφος να είναι μικρότερη των 45 μοιρών, διατρέχετε τον κίνδυνο ολίσθησης της βάσης της σκάλας. Εάν η γωνία είναι μεγαλύτερη των 75 μοιρών, η σκάλα ίσως ανατραπεί προς τα πίσω. Ποιο είναι το ύψος από το έδαφος του χαμηλότερου και του ψηλότερου παραθύρου στο οποίο μπορείτε να φτάσετε με μια σκάλα μήκους 6,1 μέτρα;

Σχέδιο



Βήμα 1: Κατασκευάστε κατακόρυφα και οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ (κρατώντας πατημένο το Shift) και επεξεργαστείτε τις ετικέτες τους, δίνοντας σε αυτά τα ονόματα τοίχος και έδαφος.

Βήμα 2: Κατασκευάστε το σημείο Δ στο έδαφος. Το Δ είναι το σημείο στήριξης της σκάλας στο έδαφος.

Βήμα 3: Μεταφέρετε το σημείο Δ κατά δύο ίντσες προς κάθε κατεύθυνση. Οι δύο ίντσες παριστάνουν το μήκος της σκάλας, άρα η κλίμακα σχεδίασης είναι 1 εκατοστό = 1,2 μέτρα.

Βήμα 4: Κατασκευάστε τον κύκλο με ακτίνα το ΔΔ΄.

Βήμα 5: Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ, όπου Ε το σημείο τομής του κύκλου ΔΔ΄ με τον τοίχο. Ίσως χρειαστεί πρώτα να μετακινήσετε το σημείο Δ έτσι ώστε ο κύκλος και ο τοίχος να τέμνονται. Το τμήμα ΔΕ παριστάνει τη σκάλα. (Επεξεργαστείτε την ετικέτα του.) Το μήκος του δεν μπορεί να μεταβληθεί, διότι η ακτίνα του κύκλου έχει σταθερό μήκος δύο ιντσών.

Βήμα 6: Αποκρύψτε τον κύκλο και το σημείο Δ΄.

Έρευνα

Μετρήστε τη γωνία ΕΔΒ και την απόσταση μεταξύ Ε και Β (το τμήμα ΕΒ παριστάνει το ύψος του τοίχου στο οποίο θα φτάσετε με τη σκάλα). Μετακινήστε το σημείο Δ εμπρός πίσω κατά μήκος του εδάφους και χρησιμοποιήστε τις μετρήσεις σας ώστε να απαντήσετε στο παραπάνω πρόβλημα. Γράψτε τις απαντήσεις σας:

Τώρα σε μια ξεχωριστή σελίδα γράψτε ένα ή περισσότερα προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με αυτό το σχέδιο.

Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας (συνέχεια)

Παρουσίαση των ευρημάτων σας

Συζητήστε τα αποτελέσματά σας με τον ή τους συμμαθητές σας. Προκειμένου να παρουσιάσετε τα ευρήματά σας, μπορείτε να εκτυπώσετε ένα σχέδιο με λεζάντα, το οποίο θα εμφανίζει το μοντέλο σας στις δύο καταστάσεις που λύνουν το πρόβλημα. Βεβαιωθείτε ότι παρουσιάσατε τις μετρήσεις που εκφράζουν οι απαντήσεις σας.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε το Sketchpad ώστε να μοντελοποιήσετε άλλα ρεαλιστικά προβλήματα. Ποια είναι η τροχιά ενός δοχείου μπογιάς στο μέσο το οποίο πέφτει καθώς το σημείο στήριξης της σκάλας ολισθαίνει στο έδαφος; Κατασκευάστε το μέσο της σκάλας και, ενόσω είναι επιλεγμένο, επιλέξτε τη Σχεδίαση ίχνους σημείου από το μενού Προβολή. Προσθέστε κίνηση στο σημείο Δ κατά μήκος του τμήματος ΒΓ.

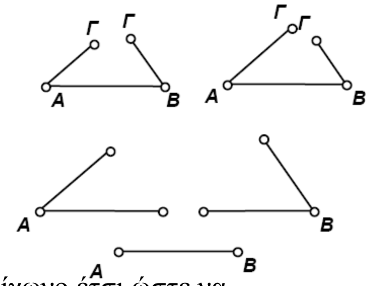
2. Μετρήστε την απόσταση μεταξύ του σημείου στήριξης της σκάλας στο έδαφος και του τοίχου (ΔΒ) καθώς και το ύψος (ΕΒ) της σκάλας. Επιλέξτε αυτές τις μετρήσεις και την εντολή Αποτύπωση με (x, y) από το μενού Μέτρηση. Μεταφέρετε το σημείο στήριξης της σκάλας στο έδαφος. Τι είδους γράφημα προκύπτει; Εάν απομακρύνετε από τον τοίχο αυτό το σημείο στήριξης με σταθερό ρυθμό, θα έχει η πτώση της κορυφής της σκάλας επίσης σταθερό ρυθμό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – γπγ;

Στην επίδειξη αυτή θα εργαστείτε με ένα δείγμα σχεδίου που ονομάζεται Ισότητα τριγώνων - γπγ και θα προσπαθήσετε να δημιουργήσετε δύο διαφορετικά τρίγωνα εάν δίνεται μια πλευρά, αλλά και οι προσκείμενες γωνίες.

Βήμα 1: Ανοίξτε το αρχείο **Δραστηριότητες\Ισότητα τριγώνων - γπγ.gsp**. Θα δείτε δύο ημιτελή τρίγωνα, δύο ξεχωριστές γωνίες και ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Βήμα 2: Σύρτε διαφορετικά μέρη των ημιτελών τριγώνων. Θα διαπιστώσετε ότι κάποια μήκη και ορισμένες γωνίες δεν μπορούν να μεταβληθούν, επειδή περιορίζονται από τα αντικείμενα-παραμέτρους.



Βήμα 3: Σύρτε τα σημεία Γ σε ένα ημιτελές τρίγωνο έτσι ώστε να συμπέσουν σχηματίζοντας ένα τρίγωνο.

Βήμα 4: Δοκιμάστε να συνδέσετε τα σημεία Γ στο άλλο ημιτελές τρίγωνο ώστε να δημιουργήσετε ένα δεύτερο τρίγωνο, όχι ίσο με το πρώτο.

Βήμα 5: Μεταβάλετε τις δοθείσες πλευρές ή/και τη γωνία και επαναλάβετε το πείραμα.

Έρευνα

Μπορείτε να σχηματίσετε άνισα τρίγωνα εάν δίνεται μια πλευρά όπως και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες;

Να γραφεί μια εικασία

___

___

___

___

___

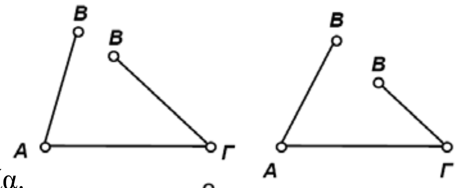
Περαιτέρω εξερεύνηση

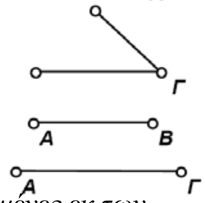
Για να διασκεδάσετε, προσπαθήστε να κάνετε τα δύο σημεία Γ να συμπέσουν μεταβάλλοντας τα αντικείμενα-παραμέτρους αντί να σύρετε τα ίδια τα σημεία.

Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – ππγ;

Στην επίδειξη αυτή θα εργαστείτε με ένα δείγμα σχεδίου που ονομάζεται Ισότητα τριγώνων - πγπ και θα εξετάσετε πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να δημιουργηθούν εάν δίνονται δύο πλευρές και μια από τις απέναντι γωνίες.

Βήμα 1: Ανοίξτε το αρχείο **Δραστηριότητες\ Ισότητα τριγώνων - ππγ.gsp**. Θα δείτε δύο ημιτελή τρίγωνα, δύο ξεχωριστά ευθύγραμμα τμήματα και μια γωνία.





Βήμα 2: Σύρτε διαφορετικά μέρη του ημιτελούς τριγώνου. Θα διαπιστώσετε ότι κάποια μήκη και ορισμένες γωνίες δεν μπορούν να μεταβληθούν, επειδή *είναι ορισμένες εκ των προτέρων*.

Βήμα 3: Σύρτε τα σημεία B σε ένα ημιτελές τρίγωνο έτσι ώστε να συμπέσουν σχηματίζοντας ένα τρίγωνο.

Βήμα 4: Δοκιμάστε να συνδέσετε τα σημεία B στο άλλο τρίγωνο έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να μην είναι ίσα.

Βήμα 5: Μεταβάλετε τις δοθείσες πλευρές ή/και τη γωνία και επαναλάβετε το πείραμα.

Έρευνα

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορείτε να σχηματίσετε εάν δίνονται δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες; Δεν ορίζουν δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες ένα τρίγωνο κατά μοναδικό τρόπο; Εάν δίνονται δύο τρίγωνα με ίσα δύο ζεύγη αντίστοιχων πλευρών καθώς και μία από τις απέναντι γωνίες, μπορείτε να αποφανθείτε κατά πόσο τα τρίγωνα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα;

Γράψτε τις εικασίες σας

Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – ππγ; (συνέχεια)

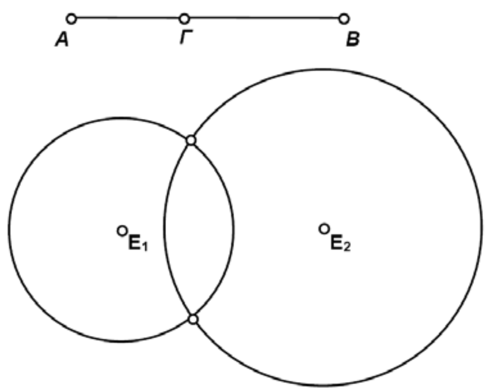
Περαιτέρω εξερεύνηση

Μεταβάλλοντας τις δοθείσες πλευρές και τη γνωστή γωνία, θα διαπιστώσετε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αδύνατη η δημιουργία οποιουδήποτε τριγώνου, ενώ με κάποιους συνδυασμούς μπορείτε να κατασκευάσετε μόνο ένα τρίγωνο. Ποιες είναι οι συνθήκες για τη δυνατότητα κατασκευής μόνο ενός τριγώνου εάν δίνονται δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες;

Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

Μια έλλειψη ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων, τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται **εστίες**, να είναι σταθερό. Στη δραστηριότητα αυτή θα χρησιμοποιήσετε αυτό τον ορισμό προκειμένου να κατασκευάσετε σημεία που δίνουν το ίχνος αυτού του γεωμετρικού τόπου. Τα βήματα της κατασκευής είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Κατασκευάστε την ευθεία ΑΒ και κατόπιν το σημείο Γ επί της ΑΒ.



Βήμα 2: Αποκρύψτε την ΑΒ και κατόπιν κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Τα μήκη των τελευταίων παριστάνουν δύο αποστάσεις των οποίων το άθροισμα είναι σταθερό, δηλαδή είναι το μήκος ΑΒ.

Βήμα 3: Κατασκευάστε και δώστε ετικέτες στα σημεία $Ε_1$ και $Ε_2$, τα οποία παριστάνουν τις εστίες της έλλειψής σας.

Βήμα 4: Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου $Ε_1$ και ακτίνας ΑΓ. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο κέντρου $Ε_2$ και ακτίνας ΓΒ.

Βήμα 5: Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής αυτών των κύκλων. Επιλέξτε αυτά τα σημεία τομής καθώς και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.

Έρευνα

Σύρτε το σημείο Γ εμπρός πίσω κατά μήκος της ευθείας ΑΒ. Τι σχήμα σχεδιάζουν τα σημεία τομής των κύκλων; (Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε την ευθεία ΑΒ ή την απόσταση μεταξύ $Ε_1$ και $Ε_2$ έτσι ώστε να τέμνονται οι κύκλοι.) Εάν έχει δοθεί ο ορισμός αυτού του σχήματος, γιατί η κατασκευή αυτή δίνει το ίχνος του; Γράψτε την εξήγησή σας.

Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

Μετρήστε τα μήκη του ευθύγραμμου τμήματος E_1E_2 και ΑΒ. Υπολογίστε το λόγο E_1 E_2 /ΑΒ. Ο λόγος αυτός ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης. Ακολούθως, επιλέξτε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων και το σημείο Γ καθώς και την εντολή Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί περισσότερο από το ήμισυ της έλλειψης. Κάντε δεξί κλικ σε αυτή την καμπύλη και επιλέξτε την Σχεδίαση ίχνους γεωμετρικού τόπου. Κατασκευάστε το υπόλοιπο ήμισυ της έλλειψης με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το άλλο σημείο τομής του κύκλου και το σημείο Γ. Προσαρμόζοντας το μήκος της ευθείας ΑΒ και την απόσταση μεταξύ των εστιών, δημιουργείτε ελλείψεις διαφορετικού σχήματος. Πόσο μεγάλη ή μικρή μπορεί να είναι η τιμή της εκκεντρότητας ώστε να είναι ακόμη δυνατή η παραγωγή μιας έλλειψης; Τι συμβαίνει όταν η τιμή της εκκεντρότητας υπερβεί τη μονάδα;

Σημειώσεις Καθηγητή για τις υποδειγματικές δραστηριότητες

Όλα τα προγράμματα μελέτης με το Sketchpad των εκδόσεων Key Curriculum Press περιέχουν εκτεταμένες *Σημειώσεις Καθηγητή*. Οι σημειώσεις αυτές παρέχουν υποδείξεις για την παρουσίαση μιας δραστηριότητας, αναφέρουν τα προαπαιτούμενά της, δυνητικές δυσκολίες για τους μαθητές και απαντήσεις στα ερωτήματα που τίθενται στη δραστηριότητα. Στις επόμενες σελίδες υπάρχουν δείγματα Σημειώσεων Καθηγητή για την πλειονότητα των προηγούμενων δραστηριοτήτων.

Φάκελος Δραστηριότητες

Επισημαίνεται ότι ορισμένες φορές οι Σημειώσεις Καθηγητή αναφέρονται σε προκατασκευασμένα σχέδια ή Προσαρμοσμένα εργαλεία. Αυτά τα παραδείγματα σχεδίων και Προσαρμοσμένων εργαλείων συμπεριλαμβάνονται στο CD-ROM που περιέχει το λογισμικό. Τα προκατασκευασμένα αυτά σχέδια και Προσαρμοσμένα εργαλεία υπάρχουν στα αντίστοιχα αρχεία μέσα στον φάκελο **Sketchpad\Δραστηριότητες**. (Ο φάκελος **Sketchpad** είναι ο φάκελος που περιέχει την ίδια την εφαρμογή.)

Ο Φάκελος **Δραστηριότητες** περιέχει επίσης τα δύο ηλεκτρονικά βιβλία σε μορφή .pdf:
Το ένα είναι το παρόν *Διδάσκοντας Γεωμετρία - Βιβλίο Καθηγητή.pdf* και το δεύτερο είναι το *Μαθαίνοντας Γεωμετρία - Βιβλίο Μαθητή.pdf.*

Ιδιότητες της ανάκλασης (σ. 2)

Προαπαιτούμενα: Τίποτε.

Χρόνος στην τάξη: 30-45 λεπτά. (Το πρώτο μέρος, *Γράψιμο στον άξονα συμμετρίας*, απαιτεί περίπου 5 λεπτά και μπορεί να διεξαχθεί ανεξάρτητα από την υπόλοιπη δραστηριότητα.)

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Το σημείο Γ' διαγράφει το κατοπτρικό είδωλο του ονόματος του μαθητή.

Ε2. Η ανάκλαση διατηρεί μήκη και γωνίες.

Ε3. Ένα σχήμα και το είδωλο της ανάκλασής του είναι πάντα όμοια.

Ε4. Η σειρά των κορυφών του ανακλασθέντος τριγώνου Γ΄Δ΄Ε΄ είναι δεξιόστροφη από το Γ΄ στο Δ΄ στο Ε΄.

Ε5. Ο άξονας συμμετρίας είναι η μεσοκάθετος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος το οποίο συνδέει ένα σημείο και το είδωλο ανάκλασής του.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Ένας τρόπος για τη διεξαγωγή αυτής της κατασκευής είναι ο εξής: Κατασκευάστε μια ευθεία που διέρχεται από το δοθέν σημείο και είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας. Κατόπιν κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο την τομή της ευθείας και της καθέτου στο αρχικό σημείο. Η άλλη τομή του κύκλου και της ευθείας είναι το είδωλο ανάκλασης του αρχικού σημείου. Προσπαθήστε να εκτελέσετε αυτή την κατασκευή χρησιμοποιώντας μόνο τα ευκλείδεια εργαλεία, δηλαδή χωρίς τη χρήση του μενού.

2. Δημιουργήστε το είδωλο ενός σημείου ως προς μια ευθεία. Συνδέστε το σημείο με το είδωλό του. Επίσης, συνδέστε και τα δύο αυτά σημεία με ένα τρίτο σημείο της ευθείας.

3. Οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι χρειάζεται να αναστρέψουν ένα από τα τρίγωνα για να ταιριάξει τέλεια με το άλλο. Η σκιασμένη πλευρά μόνο του ενός τριγώνου θα πρέπει να είναι *στραμμένη* προς τα πάνω. Αυτή είναι μια άλλη επίδειξη του γεγονότος ότι τα τρίγωνα έχουν αντίθετο προσανατολισμό.

4. Η κατασκευή αυτή δημιουργεί ένα ισοσκελές τραπέζιο. Εάν το τμήμα που συνδέει δύο σημεία στη μια πλευρά του άξονα συμμετρίας είναι παράλληλο προς αυτόν, τα σημεία και τα είδωλά τους σχηματίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Εάν η απόσταση κάθε σημείου από τον άξονα συμμετρίας ισούται με το μισό της απόστασης των σημείων, τα σημεία και τα είδωλά τους σχηματίζουν ένα τετράγωνο.

<u>Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων</u> (σ. 5)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν το συμβολισμό (x, y) για ένα σημείο στο επίπεδο συντεταγμένων. Επίσης, βοηθά να έχουν μια γενική εξοικείωση με ανακλάσεις.

Χρόνος στην τάξη: 30-40 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Αυτή τη φορά οι συντεταγμένες y του σημείου και του ειδώλου του είναι ίδιες και οι συντεταγμένες x αντίθετες. Το είδωλο ενός σημείου με συντεταγμένες (α, β) έχει συντεταγμένες (-α, β).

Ε2. Οι συντεταγμένες x του σημείου και του ειδώλου του είναι ίδιες. Οι συντεταγμένες y είναι αντίθετες. Ένα σημείο με συντεταγμένες (α, β) έχει συντεταγμένες ειδώλου (α, -β). Βεβαιωθείτε πως οι μαθητές μεταφέρουν μια αρχική κορυφή σε διαφορετικά τεταρτημόρια, ώστε να διαπιστώσουν ότι οι συντεταγμένες αυτές λαμβάνουν αρνητικές τιμές.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Οι συντεταγμένες του ειδώλου ενός σημείου μετά από μια ανάκλαση ως προς την ευθεία y = x έχουν αντιστραφεί. Έτσι, το είδωλο ενός σημείου με συντεταγμένες (α, β) έχει συντεταγμένες (β, α).

2. Και οι δύο οι συντεταγμένες αλλάζουν πρόσημο. Το δεύτερο είδωλο ενός σημείου με συντεταγμένες (α, β) έχει συντεταγμένες (-α, -β). Το δεύτερο είδωλο είναι μια περιστροφή κατά 180° ως προς την αρχή των αξόνων.

Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler (σ. 7)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τα ονόματα των διαφορετικών κέντρων του τριγώνου: *έγκεντρο*, *περίκεντρο*, *ορθόκεντρο* και *κέντρο βάρους*. Η δραστηριότητα αυτή εισάγει το μαθητή στην έννοια του ευθύγραμμου τμήματος του Euler.

Χρόνος στην τάξη: 15-45 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Το ορθόκεντρο, το κέντρο βάρους και το περίκεντρο είναι πάντοτε συγγραμμικά.

Ε2. Ορισμένες παρατηρήσεις που μπορούν να κάνουν οι μαθητές είναι οι εξής: Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο αυτά τα τέσσερα σημεία συμπίπτουν. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο τα τέσσερα σημεία είναι συγγραμμικά και κείνται κατά μήκος της διαμέσου της βάσης του τριγώνου. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο τα τέσσερα σημεία βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο το περίκεντρο και το ορθόκεντρο βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο είναι το σημείο της κορυφής της ορθής γωνίας, ενώ το περίκεντρο βρίσκεται στο μέσο της υποτείνουσας.

Ε3. Το περίκεντρο και το ορθόκεντρο είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος του Euler. Το κέντρο βάρους βρίσκεται ανάμεσά τους.

Ε4. Η απόσταση μεταξύ ορθόκεντρου και κέντρου βάρους είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ κέντρου βάρους και περίκεντρου.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Τρία από τα σημεία είναι τα μέσα των πλευρών του αρχικού τριγώνου. Τρία άλλα σημεία είναι σημεία τομής των υψών με τις απέναντι πλευρές του τριγώνου. Τα τελευταία τρία σημεία είναι τα μέσα των τμημάτων που συνδέουν το ορθόκεντρο με κάθε κορυφή του τριγώνου.

2. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τρία ζεύγη σημείων συμπίπτουν και έτσι τα εννέα σημεία περιορίζονται σε έξι. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο τρία σημεία συμπίπτουν με την κορυφή της ορθής γωνίας και ένα ζεύγος σημείων συμπίπτει με καθένα από τα μέσα δύο πλευρών, οπότε τα εννέα σημεία περιορίζονται σε πέντε. Σε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο το ίχνος του τρίτου ύψους συμπίπτει με το μέσο μιας πλευράς, οπότε τα πέντε σημεία περιορίζονται σε τέσσερα.

<u>Το θεώρημα του Morley</u> (σ. 9)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν την έννοια της *τριχοτόμησης μιας γωνίας*. Επίσης, απαιτείται η ικανότητα αναγνώρισης ενός *ισόπλευρου* τριγώνου.

Χρόνος στην τάξη: 25-40 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Τα σημεία τομής γειτονικών τριχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου αποτελούν τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου. (Η εικασία αυτή δεν περιγράφεται εύκολα με λόγια. Ίσως είναι ευκολότερο για τους μαθητές να εξηγήσουν την εικασία με τη βοήθεια ενός σχήματος.)

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Τα τρία τρίγωνα που περιβάλλουν το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελή. Υπάρχουν πολυάριθμες σχέσεις μεταξύ των γωνιών που μπορούν να ανακαλύψουν οι μαθητές. Οι σχέσεις αυτές παίζουν ασφαλώς κάποιο ρόλο στην απόδειξη. Μπορείτε να ζητήσετε από τους μαθητές την απόδειξη του θεωρήματος, η οποία, ωστόσο, υπερβαίνει τους στόχους αυτού του βιβλίου.

2. Οι ημιευθείες που διέρχονται από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και τις απέναντι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου συντρέχουν στο ίδιο σημείο. Ίσως οι μαθητές θεωρούν ότι πρόκειται για διχοτόμους, αλλά αυτό δεν είναι αληθές.

3. Οι τριχοτόμοι ενός συνόλου εξωτερικών γωνιών τέμνονται έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα εξάγωνο. Μια ομάδα εναλλασσόμενων κορυφών αυτού του εξαγώνου συμπεριλαμβάνει τις κορυφές του αρχικού τριγώνου. Η άλλη ομάδα σχηματίζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

<u>Το θεώρημα του Ναπολέοντα</u> (σ. 11)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες *ισόπλευρο τρίγωνο*, *μέσο*, *διάμεσος* και *κέντρο βάρους*.

Χρόνος στην τάξη: 30-45 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Ναπολεόντειο θεώρημα.gsp (*η σελίδα *Θεώρημα του Ναπολέοντα).*

Σχέδιο και έρευνα

Το βιβλίο συνοδεύεται από το αρχείο *Ναπολεόντειο θεώρημα.gsp* στο οποίο περιέχεται το Προσαρμοσμένο εργαλείο *Τρίγωνο (από πλευρά)* για την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου.

Ε1. Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα κέντρα βάρους των ισοπλεύρων τριγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές τυχαίου τριγώνου σχηματίζουν ένα άλλο ισόπλευρο τρίγωνο.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Τα τμήματα που συνδέουν μια κορυφή του αρχικού τριγώνου με την πιο απόμακρη κορυφή του ισόπλευρου τριγώνου στην απέναντι πλευρά είναι όμοια.

2. Η διαφορά μεταξύ των εμβαδών των εσωτερικών και εξωτερικών ναπολεόντειων τριγώνων ισούται με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου.

3. Στο βιβλίο του Howard Eves *An Introduction to the History of Mathematics* υπάρχουν ενδιαφέρουσες αναφορές στον Ναπολέοντα και στο ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά και τους μαθηματικούς. Στο βιβλίο του H. S. M.Coxeter *Geometry Revisited* αναφέρεται ότι ο Laplace είπε κάποτε στον Ναπολέοντα: «Στρατηγέ, το τελευταίο πράγμα που χρειαζόμαστε από εσάς είναι ένα μάθημα γεωμετρίας».

<u>Κατασκευή ρόμβων</u> (σ. 13)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό και διάφορες ιδιότητες του ρόμβου.

Χρόνος στην τάξη: 20-45 λεπτά (εξαρτάται αποκλειστικά από το χρόνο που θέλετε να διαθέσετε στους μαθητές).

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Ρόμβος.gsp.*

Σχέδιο και έρευνα

Όσο περισσότερο χρόνο διαθέτουν οι μαθητές, τόσο περισσότερες μεθόδους θα ανακαλύψουν. Ζητήστε από τους μαθητές να μεταφέρουν τις κορυφές των σχημάτων τους, ώστε να βεβαιωθούν ότι οι κατασκευές τους είναι σωστές. Οι ρόμβοι που δε διατηρούνται και μετατρέπονται σε άλλα σχήματα δεν έχουν σωστούς περιορισμούς. Κατασκευές που παραμένουν ρόμβοι αλλά δεν μπορούν να λάβουν όλες τις μορφές ενός ρόμβου έχουν πολλούς περιορισμούς. Ακολουθούν διάφορες μέθοδοι για την κατασκευή ενός ρόμβου. Η πρώτη είναι μια δημοφιλής μέθοδος, στην οποία γίνεται χρήση πολλών περιορισμών. Στις υπόλοιπες μεθόδους δε γίνεται χρήση ούτε υπερβολικά πολλών ούτε λίγων περιορισμών.

Μέθοδος: Κατασκευάστε τους κύκλους ΑΒ και ΒΑ. Κατασκευάστε ένα ρόμβο που συνδέει τα κέντρα με τα δύο σημεία τομής των κύκλων. (Πρόκειται για έναν ειδικό ρόμβο που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα.)

Ιδιότητες: Ο ρόμβος έχει τέσσερις ίσες πλευρές.

Μέθοδος: Κατασκευάστε κύκλους ΑΒ και ΒΑ. Κατασκευάστε κύκλο ΓΑ, όπου το σημείο Γ ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου ΑΒ. Κατασκευάστε σημείο Δ στην τομή των κύκλων ΒΑ και ΓΑ. Το ΑΒΔΓ είναι ένας ρόμβος.

Ιδιότητες: Ο ρόμβος έχει τέσσερις ίσες πλευρές.

Μέθοδος: Κατασκευάστε κύκλο ΑΒ και δύο ακτίνες. Κατασκευάστε μια ευθεία που είναι παράλληλη προς κάθε ακτίνα και διέρχεται το άκρο της άλλης.

Ιδιότητες: Ο ρόμβος έχει ίσες διαδοχικές πλευρές και παράλληλες απέναντι πλευρές.

Μέθοδος: Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο Γ. Κατασκευάστε μια ευθεία που διέρχεται το σημείο Γ και είναι κάθετη στο ΑΒ. Κατασκευάστε κύκλο ΓΔ, όπου το σημείο Δ κείται στην κάθετη ευθεία. Κατασκευάστε το σημείο Ε, δηλαδή το άλλο σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία. Το ΑΔΒΕ είναι ένας ρόμβος.

Ιδιότητες: Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται αμοιβαία.

Μέθοδος: Κατασκευάστε τον κύκλο ΑΒ και έπειτα το τμήμα ΒΓ, όπου το σημείο Γ ανήκει στον κύκλο. Δημιουργήστε το είδωλο Α’ του σημείου Α ως προς ΒΓ. Το ΑΒΑ΄ Γ είναι ένας ρόμβος.

<u>Τετράπλευρα μέσων</u> (σ. 14)

Προαπαιτούμενα: Για τη διατύπωση υποθέσεων, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν *παραλληλόγραμμα* και άλλα ειδικά τετράπλευρα. Για την εξήγηση των υποθέσεών τους, πρέπει να γνωρίζουν ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και έχει μήκος ίσο με το ήμισυ του μήκους της πλευράς αυτής.

Χρόνος στην τάξη: 25-45 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Το τετράπλευρο του οποίου οι πλευρές συνδέουν τα μέσα οποιουδήποτε τετράπλευρου είναι ένα παραλληλόγραμμο. Οι μετρήσεις υποστηρίζουν αυτή την εικασία, καθώς δείχνουν ότι οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου των μέσων είναι ισομήκεις και έχουν ίδια κλίση (συνεπώς είναι παράλληλες).

Ε2. Μια διαγώνιος διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα. Δύο πλευρές του τετράπλευρου των μέσων συνδέουν τα μέσα δύο πλευρών αυτών των τριγώνων. Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο είναι παράλληλες προς τη διαγώνιο και έχουν μήκος ίσο με το ήμισυ αυτής. Εάν δύο απέναντι πλευρές ενός τετράπλευρου είναι μεταξύ τους ίσες και παράλληλες, το τετράπλευρο είναι ένα παραλληλόγραμμο. Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν την άλλη διαγώνιο και να χρησιμοποιήσουν ένα δεύτερο ζεύγος τριγώνων, ώστε να δείξουν ότι οι άλλες δύο πλευρές του τετράπλευρου των μέσων είναι επίσης μεταξύ τους ίσες και παράλληλες.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Ένα τετράπλευρο μέσων ενός τετράπλευρου μέσων είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Διαδοχικά τετράπλευρα μέσων είναι εναλλασσόμενα όμοια, δηλαδή το τρίτο τετράπλευρο μέσων είναι ένα παραλληλόγραμμο όμοιο προς το πρώτο, το τέταρτο είναι όμοιο προς το δεύτερο κ.ο.κ. Τα παραλληλόγραμμα αυτά συγκλίνουν στο σημείο τομής των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδέουν τα μέσα απέναντι πλευρών.

2. Το εμβαδόν του τετράπλευρου μέσων ισούται με το ήμισυ του εμβαδού του αρχικού τετράπλευρου. Ο μαθητής καλείται να αποδείξει αυτή την εικασία.

Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο (σ. 15)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες *μήκος κύκλου* (*περιφέρεια)* και *διάμετρος*. Είναι βολικό αν γνωρίζουν ήδη ότι ο λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο ισούται με π, οπότε η δραστηριότητα αυτή χρησιμεύει ως ανασκόπηση της έννοιας του π μέσω μιας γραφικής προσέγγισης.

Χρόνος στην τάξη: 35-50 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

E1. Τα σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία και στο πρώτο τεταρτημόριο.

E2. Η κλίση της ακτίνας είναι π. Ο λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο είναι επίσης π. Η κλίση δείχνει το λόγο: ανύψωση/οριζόντια απόσταση. Στο γράφημα αυτό η ανύψωση (άξονας y) παρουσιάζει μετρήσεις του μήκους κύκλου και η οριζόντια απόσταση (άξονας x) μετρήσεις της διαμέτρου. Για το λόγο αυτό, η κλίση δείχνει το λόγο: μήκος κύκλου/διάμετρος. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις **Προτιμήσεις** από το μενού **Προβολή** για την εμφάνιση της μέτρησης κλίσης ή του π με ακρίβεια χιλιοστού.

E3. Το γεγονός ότι όλα τα αποτυπωμένα σημεία βρίσκονται σε αυτή την ακτίνα σημαίνει ότι ο λόγος μήκος κύκλου/διάμετρος είναι ίδιος για καθέναν από τους διαφορετικούς κύκλους στον πίνακα.

E4. $\pi = C/D$
$C = \pi D$

E5. $C = \pi(2\rho)$ ή $C = 2\pi\rho$

<u>Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού</u> (σ. 18)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες *ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*, *τετράγωνο*, *εμβαδόν* και *περίμετρος*.

Χρόνος στην τάξη: 40-50 λεπτά. Εάν δεν υπάρχει αρκετός χρόνος, μπορείτε να σταματήσετε στο τέλος της πρώτης σελίδας μετά από το ερώτημα 2. Έτσι, δε θα προβείτε στη διερεύνηση του προβλήματος με τη χρήση των μεγίστων και ελαχίστων ενός γραφήματος.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Καθώς οι μαθητές μεταφέρουν το σημείο Γ, πρέπει να παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν του ορθογώνιου μεταβάλλεται αλλά η περίμετρός του διατηρείται σταθερή. Επειδή τα ΓΒ και ΓΔ είναι ακτίνες του ιδίου κύκλου, το άθροισμα δύο πλευρών του ορθογώνιου, ΑΓ + ΓΔ, ισούται με ΑΒ. Άρα το ΑΒ ισούται με το ήμισυ της περιμέτρου του ορθογώνιου. Όσο αυτό το μήκος παραμένει σταθερό, η περίμετρος του ορθογώνιου θα διατηρείται σταθερή.

Ε2. Το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.

Ε3. Οι συντεταγμένες του ανώτατου σημείου του γραφήματος εμφανίζουν το πλευρικό μήκος και το εμβαδόν του ορθογώνιου με το μέγιστο εμβαδόν. Το πλευρικό μήκος στο σημείο αυτό επαληθεύει ότι το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.

Ε4. Στα κατώτατα σημεία του γραφήματος το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει όταν ΑΓ = 0 και όταν ΑΓ = ΑΒ.

Μπορείτε να διερευνήσετε από κοινού με τους μαθητές γιατί το γράφημα του γεωμετρικού τόπου του πλευρικού μήκους ή του εμβαδού ενός ορθογώνιου είναι μια παραβολή.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Τα κανονικά πολύγωνα διαθέτουν μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο. Πολύγωνα με περισσότερες πλευρές είναι περισσότερο αποτελεσματικά. Ο κύκλος είναι το κλειστό επίπεδο σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.

2. Το εμβαδόν του ορθογώνιου μπορεί να αναπαρασταθεί από την εξίσωση $E = x[(1/2)P - x]$. Το γράφημα είναι μια παραβολή με ρίζες τις 0 και $P/2$. Άρα η τιμή του x για το μέγιστο είναι $P/4$. Εφόσον το μήκος της πλευράς του ορθογώνιου με το μέγιστο εμβαδόν είναι το 1/4 της περιμέτρου του ορθογώνιου, το ορθογώνιο πρέπει να είναι τετράγωνο.

<u>Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος</u> (σ. 21)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές θα εκτιμήσουν αυτή τη δραστηριότητα περισσότερο αν διαθέτουν ήδη κάποια εμπειρία με το πυθαγόρειο θεώρημα.

Χρόνος στην τάξη: 10-15 λεπτά. Αυτή η σύντομη επίδειξη λειτουργεί με επιτυχία ακόμη και αν διαθέτετε μόνο έναν υπολογιστή και μία διάταξη προβολής. Μπορείτε να εντάξετε αυτή τη δραστηριότητα σε οποιαδήποτε άλλη του βιβλίου αυτού.

Απαιτούμενο σχέδιο: *Δραστηριότητες\Πυθαγόρειο θεώρημα.gsp.*

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Στο σχέδιο αυτό τα τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου παραμορφώνονται χωρίς τη μεταβολή του εμβαδού τους, οπότε το σχήμα στις κάθετες πλευρές είναι όμοιο με εκείνο στην υποτείνουσα. Αυτό δείχνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των αρχικών τετραγώνων στις κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου στην υποτείνουσα και έτσι αποδεικνύεται το πυθαγόρειο θεώρημα.

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (σ. 22)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να έχουν εμπειρία στη ρύθμιση αναλογιών όπως αυτές που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή σχέσεων σε όμοια πολύγωνα. Θα εντυπωσιαστούν περισσότερο από τη δραστηριότητα αυτή αν γνωρίζουν ήδη κάποιες πληροφορίες σχετικά με τα χρυσά ορθογώνια και τη σημασία τους. Μια ευχάριστη δραστηριότητα είναι να αποφασίσουν μεταξύ τους ποιο είναι το πλέον δημοφιλές από μια ομάδα ορθογώνιων παραλληλόγραμμων, από τα οποία ένα ή δύο είναι χρυσά.

Χρόνος στην τάξη: 40-55 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Τετράγωνο.gsp* (Προσαρμοσμένο εργαλείο *Τετράγωνο (από ακμή)* για την κατασκευή του τετραγώνου).

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Το Φ είναι περίπου ίσο με 1,618. Οι απαντήσεις των μαθητών θα ποικίλουν αναλόγως των ρυθμίσεων της ακρίβειας υπολογισμού στις Προτιμήσεις.

Ε2. Το ΔΖΗΓ είναι επίσης ένα χρυσό ορθογώνιο, επειδή το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή ενός χρυσού ορθογώνιου δημιουργεί ένα σχήμα που ταιριάζει απόλυτα στο εσωτερικό του ορθογώνιου αυτού.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Η αναλογία στο ορθογώνιο 1 x Φ αντιστοιχεί στην αναλογία στην κορυφή της πρώτης σελίδας της δραστηριότητας, εκτός του ότι α = 1 και β = Φ. Έτσι, έχουμε:

   $Φ/1 = (1 + Φ)/Φ$, από όπου έπεται $Φ^2 = 1 + Φ$ ή $Φ^2 - Φ - 1 = 0$.

   Οι δύο λύσεις αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

   $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618...$

   και

   $(1 - \sqrt{5})/2 = -0{,}618...$

   Η θετική τιμή δίνει τη χρυσή τομή.

2. $Φ^2 = 2{,}618...$, που ισούται με $Φ + 1$. Αυτό επαληθεύεται στη δευτεροβάθμια εξίσωση του τελευταίου προβλήματος.

   $1/Φ = 0{,}618…$, που ισούται με $Φ - 1$. Για την αλγεβρική απόδειξη αυτού, ξεκινήστε με τον ορισμό $Φ/1 = (1 + Φ)/Φ$. Άρα $Φ = 1/Φ + 1$. Λύστε ως προς $1/Φ$ και έχετε $1/Φ = Φ - 1$.

<u>Λόγοι εμβαδών</u> (σ. 25)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν τις έννοιες *εμβαδόν* και *λόγος*. Ο όρος *Αυξομείωση* ίσως χρήζει επεξήγησης.

Χρόνος στην τάξη: 25-45 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Ο λόγος των μηκών αντίστοιχων πλευρών ισούται με το λόγο αυξομείωσης.

Ε2.

Λόγοι πλευρικών μηκών	2	3	1	1/2	1/10	α/β
Λόγοι εμβαδών	4	9	1	0,25 ή 1/4	0,01 ή 1/100	$(\alpha/\beta)^2$

Ε3. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου των μηκών αντίστοιχων πλευρών. Με άλλα λόγια, αν ο λόγος αντίστοιχων πλευρών σε δύο όμοια πολύγωνα είναι α/β, ο λόγος των εμβαδών τους είναι $(\alpha/\beta)^2$.

Ε4. Το γράφημα που χαράσσεται από το αποτυπωμένο σημείο είναι μισή παραβολή, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο λόγος των εμβαδών είναι ανάλογος του τετραγώνου του λόγου των πλευρικών μηκών. Εάν οι λόγοι ήταν απλώς ανάλογοι, το γράφημα θα ήταν μια ευθεία.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Για τη δημιουργία του κουμπιού ενεργειών, επιλέξτε το σημείο Β και το τμήμα ΓΔ και κατόπιν Επεξεργασία: Κουμπιά ενεργειών: Προσθήκη κίνησης. Το κουμπί αυτό προσθέτει κίνηση στο σημείο Β ώστε ο λόγος των πλευρικών μηκών να μεταβάλλεται διαρκώς μεταξύ 0 και 1. Ως αποτέλεσμα, το δεύτερο πολύγωνο αυξομειώνεται κατά την κίνηση του σημείου Β στο αρχικό πολύγωνο.

2. Το κέντρο της αυξομείωσης επηρεάζει μόνο τη θέση του μετασχηματιζόμενου πολυγώνου και όχι τους λόγους εμβαδών και πλευρικών μηκών. Οι τελευταίοι καθορίζουν τη θέση του αποτυπωμένου σημείου Λ.

3. Ένα στερεό με διπλάσιο μήκος, πλάτος και ύψος θα έχει όγκο οκταπλάσιο του όγκου του αρχικού σώματος. Ο λόγος των όγκων δύο όμοιων στερεών σωμάτων ισούται με τον κύβο του λόγου των μηκών αντίστοιχων πλευρών.

<u>Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων</u> (σ. 28)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του *καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων*. Η δραστηριότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για μαθητές που μελετούν τριγωνομετρία.

Χρόνος στην τάξη: 30-50 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Ίχνη τριγωνομετρικών αριθμών.gsp* (Σελίδα *Ημίτονο/Συνημίτονο* και σελίδα *Ίχνος εφαπτομένης*).

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Δ, το σημείο Ζ μετακινείται οριζόντια.

Ε2. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Ε γύρω από τον κύκλο, το σημείο Ζ μετακινείται κάθετα πάνω και κάτω όπως η βελόνα μιας ραπτομηχανής.

Ε3. Οι απαντήσεις ποικίλλουν. Οι μαθητές ίσως σχεδιάσουν μια διαδρομή όπως η παρακάτω καμπύλη.

Ε4. Το σχέδιο θα μοιάζει κάπως με το παρακάτω. Επίσης, αν οι μαθητές θέσουν σε λειτουργία τα κινούμενα γραφικά, πιθανότατα θα λάβουν μια σειρά από καμπύλες όπως η επόμενη, οι οποίες θα γεμίσουν σταδιακά την περιοχή κάτω από την καμπύλη.

Ε5. Ο μοναδιαίος κύκλος έχει μήκος ίσο με 2π.

Ε6. Για την επανάληψη της σχεδίασης ίχνους χωρίς τη σχεδίαση του ίχνους μιας νέας καμπύλης, πρέπει το μήκος του ΑΒ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του κύκλου. Το τελευταίο είναι 2π ή περίπου 6,28 μονάδες πλέγματος, οπότε η συντεταγμένη x του σημείου Β πρέπει να ισούται με περίπου 6,28.

<u>Η απόδειξη του Leonardo da Vinci</u> (σ. 31)

Κατασκευή

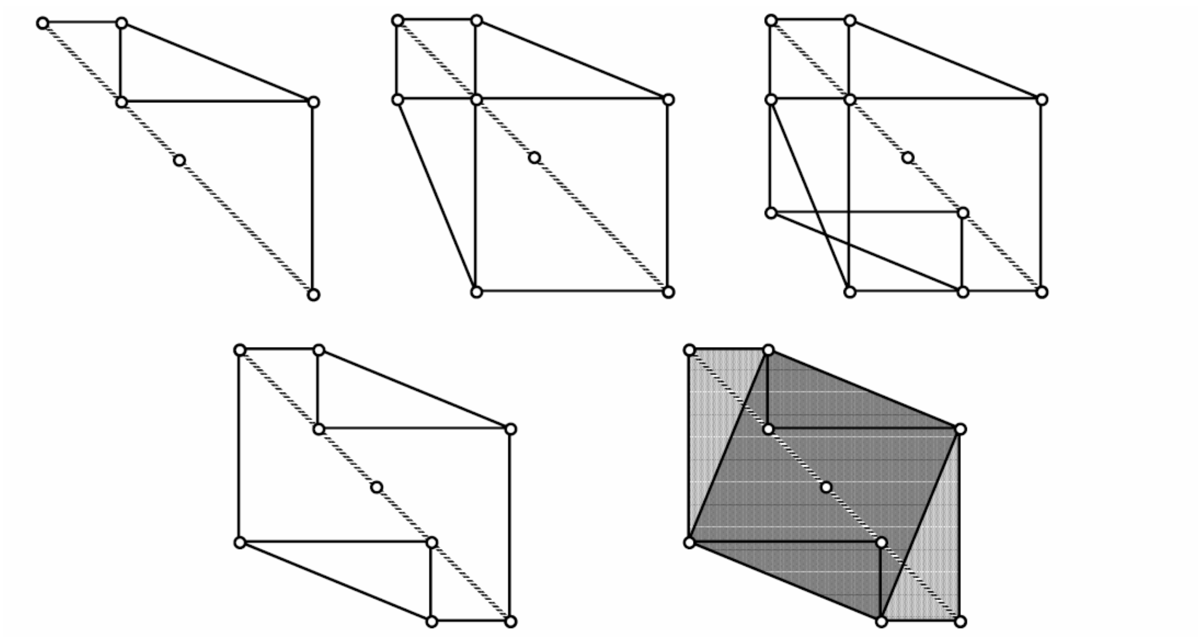
Δυσκολία: Μέτρια. Η κατασκευή καθαυτή δεν είναι δύσκολη, αλλά απαιτείται προσεκτική επιλογή για την κατάλληλη λειτουργία των κουμπιών ενεργειών.

Κ1. Προσέξτε ώστε οι μαθητές να μην κατασκευάσουν ένα τετράγωνο στην υποτείνουσα.

Κ5. Η Απόκρυψη/Εμφάνιση είναι μια εντολή στο υπομενού Κουμπί ενεργειών του μενού Επεξεργασία. Η εντολή παράγει ταυτόχρονα τόσο ένα κουμπί Απόκρυψης όσο και ένα κουμπί Εμφάνισης. Είναι δυνατή η αλλαγή της ετικέτας των κουμπιών με διπλό κλικ σε αυτά μέσω του εργαλείου κειμένου.

Έρευνα

Εάν οι μαθητές εκτελέσουν τα κουμπιά με την προτεινόμενη σειρά, θα εμφανιστεί μια διαδοχή σχημάτων όπως τα παρακάτω.



Απόδειξη

Δυσκολία: Μικρή.

Το αρχικό σχήμα δείχνει δύο πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές α, β και γ και δύο τετράγωνα με πλευρές α και β. Κανένας από τους μετασχηματισμούς που διεξάγονται δε μεταβάλλει το εμβαδόν του σχήματος. Στο τελικό σχήμα έχουμε δύο τρίγωνα πανομοιότυπα με τα αρχικά τρίγωνα και ανάμεσά τους ένα τετράγωνο πλευράς γ. Επομένως, το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων στο αρχικό σχήμα, $(α^2 + β^2)$, πρέπει να ισούται με το εμβαδόν $γ^2$ του τετραγώνου στο τελικό σχήμα.

<u>Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα</u> (σ. 36)

Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει την πλέον γνωστή τεχνική κατασκευής μιας έλλειψης. Ωστόσο, θα παρατηρήσετε αρκετές διαφορές. Αντί της χρήσης πινεζών ως εστιακών σημείων της έλλειψης (που αναφέρεται στο βιβλίο μαθητή), οι μαθητές χρησιμοποιούν μια συγκολλητική ταινία για τη στερέωση του νήματος στις εστίες. Αυτό απλοποιεί την κατασκευή του μοντέλου. Επιπρόσθετα, οι μαθητές δημιουργούν ένα κατασκευαστικό μοντέλο στο Sketchpad, το οποίο μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί για τη σχεδίαση μιας υπερβολής.

Τέλος, η δραστηριότητα παρέχει μια εκτεταμένη εισαγωγή στις γεωμετρικές σχέσεις που θα χρειαστούν οι μαθητές για την κατανόηση της αλγεβρικής απόδειξης που υπάρχει στα βιβλία τους. Ειδικότερα, οι μαθητές θα ανακαλύψουν μόνοι τους τις σχέσεις μεταξύ του μήκους του μεγάλου και του μικρού άξονα και της εστιακής απόστασης.

Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

Ε1. Το άθροισμα των αποστάσεων από τη μύτη του μολυβιού ως τα δύο στερεωμένα άκρα του νήματος είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με το ολικό μήκος του νήματος μείον την εστιακή απόσταση.

Ε2. Τα εστιακά σημεία είναι τα δύο άκρα της βάσης του τριγώνου που σχηματίζεται (ή τα σημεία στερέωσης στο χαρτί).

Ε3. Όταν η απόσταση μεταξύ των πινεζών είναι μικρή, η έλλειψη είναι «παχιά» και σχεδόν κυκλική. Όταν η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη, η έλλειψη είναι «λεπτή» και επιμήκης.

Ε4. Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΕ_1$ και $ΓΕ_2$ έχουν ίσο μήκος.

Ε5. Το μολύβι θα σχεδιάσει έναν κύκλο όταν και τα δύο άκρα του νήματος στερεωθούν στο ίδιο σημείο.

Ε6. Εάν το νήμα είναι τεντωμένο, το μολύβι θα σχεδιάσει μια ευθεία. Μια άλλη δυνατή απάντηση είναι πως, όταν το νήμα είναι τεντωμένο, το μολύβι δε θα σχεδιάσει τίποτε. Το ερώτημα αυτό καθώς και το ερώτημα 5 εξετάζουν τις δύο εκφυλισμένες περιπτώσεις μιας έλλειψης: τον κύκλο και την ευθεία.

Περαιτέρω εξερεύνηση με τη βοήθεια του μοντέλου σας

Ε1. Οι μαθητές μπορούν να ορίσουν τους άξονες ως τα δύο «ευθύγραμμα τμήματα συμμετρίας». Επίσης, ίσως τους ορίσουν ως το μεγαλύτερο και το μικρότερο τμήμα που διέρχονται το «κέντρο» της έλλειψης (το μέσο του τμήματος που συνδέει τις εστίες) και τα άκρα τους κείνται επί της έλλειψης. Μπορείτε να ζητήσετε από τους μαθητές να εξετάσουν την περίπτωση που η έλλειψη είναι κύκλος: Διαθέτει ένας κύκλος μεγάλο και μικρό άξονα;

Ε2. Μετακινήστε το μολύβι σας έτσι ώστε να βρίσκεται στο σημείο Γ. Το μήκος του νήματος ισούται με $Ε_1Ε_2 + Ε_2Γ + Ε_2Γ$. Εφόσον $ΒΕ_1 = Ε_2Γ$, μπορούμε να γράψουμε εκ νέου το μήκος ως $Ε_1Ε_2 + Ε_2Γ + ΒΕ_1 = ΒΓ$, δηλαδή το μήκος του μεγάλου άξονα. Άρα το μήκος του νήματος ισούται με το μήκος του μεγάλου άξονα.

Ε3. Από το ερώτημα 2 γνωρίζουμε ότι $ΔΕ_1 + ΔΕ_2 = ΒΓ$. Εφόσον $ΔΕ_1 = ΔΕ_2$, κάθε τμήμα έχει μήκος ίσο με 4,75 εκατοστά.

E4. Το μήκος του τμήματος ΟΔ είναι 3,6 εκατοστά, δηλαδή το ήμισυ του μικρού άξονα ΔΕ. Από το ερώτημα 3 έχουμε $ΔΕ_2$ = 4,75 εκατοστά. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο τιμές στην εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΔΕ_2$ και να λάβουμε $(ΟΕ_2)^2 + (ΟΔ)^2 = (ΔΕ_2)^2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές και λύνοντας, έχουμε $ΟΕ_2 \approx 3,1$ εκατοστά. Το ευθύγραμμο τμήμα $ΟΕ_2$ έχει το ίδιο μήκος με το τμήμα $ΟΕ_1$.

E5. Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΔΕ_2$ δίνει $(ΟΕ_2)^2 + (ΟΔ)^2 = (ΔΕ_2)^2$. Από τα ερωτήματα 2 και 3 γνωρίζουμε ότι $ΟΓ = ΔΕ_2$. Έτσι, έχουμε τη σχέση $(ΟΕ_2)^2 + (ΟΔ)^2 = (ΟΓ)^2$, που γράφεται συνήθως στη μορφή $γ^2 = α^2 - β^2$, όπου $γ = ΟΕ_2$ και α = ήμισυ του μήκους του μεγάλου άξονα (τμήμα ΟΓ) και β = ήμισυ του μήκους του μικρού άξονα (τμήμα ΟΔ).

E6. α. Χρησιμοποιώντας έναν κανόνα και έναν υπολογιστή μπορούμε να εντοπίσουμε τα εστιακά σημεία της έλλειψης, μετρώντας τα μήκη α και β (που περιγράφονται στο ερώτημα 5), και ακολούθως να υπολογίσουμε την τιμή του γ.

β. Η εύρεση των εστιακών σημείων είναι ευκολότερη με χρήση ενός διαβήτη. Ρυθμίστε το διαβήτη έτσι ώστε να σχεδιάσει έναν κύκλο ακτίνας α. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το διαβήτη για τη σχεδίαση ενός κύκλου με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα α. Τα σημεία τομής των δύο κύκλων με το μεγάλο άξονα είναι οι εστίες της έλλειψης. Οι μαθητές μπορούν να σχολιάσουν το γεγονός ότι η μέθοδος με το διαβήτη έχει το πλεονέκτημα πως δεν απαιτεί μετρήσεις ή υπολογισμούς

Κατασκευή ενός μοντέλου Sketchpad

Είναι σημαντικό για τους μαθητές να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν μόνοι τους ένα μοντέλο Sketchpad προτού τους δώσετε λεπτομερείς οδηγίες. Ξεκινήστε με την παρότρυνση να σκεφτούν σχετικά με τον τρόπο κατασκευής ενός μοντέλου Sketchpad. Πώς μοντελοποιούνται οι πινέζες; Πώς μοντελοποιείται το νήμα; Πώς διατηρείται σταθερό το μήκος του νήματος; Προσπαθήστε να συζητήσετε το στόχο ή/και να τον γράψετε στον πίνακα. Ζητήστε από όσους έχουν κάποιες ιδέες να τις αναπτύξουν στην τάξη. Εάν ένας μαθητής αδυνατεί να προχωρήσει, δώστε του κάποια συμβουλή ή, αν αυτό δε βοηθήσει, τις πλήρεις οδηγίες.

1. Το άθροισμα των αποστάσεων από ένα σημείο τομής των δύο κύκλων προς τις δύο εστίες είναι πάντοτε ίσο με το άθροισμα της ακτίνας των κύκλων, δηλαδή με το σταθερού μήκους τμήμα ΑΒ.

2. Όταν η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων είναι μικρή, η έλλειψη είναι “παχιά” και σχεδόν κυκλική. Όταν η απόσταση είναι μεγαλύτερη, η έλλειψη είναι “λεπτή” και επιμήκης.

3. Η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων $Ε_1$ και $Ε_2$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του μήκους του τμήματος ΑΒ.

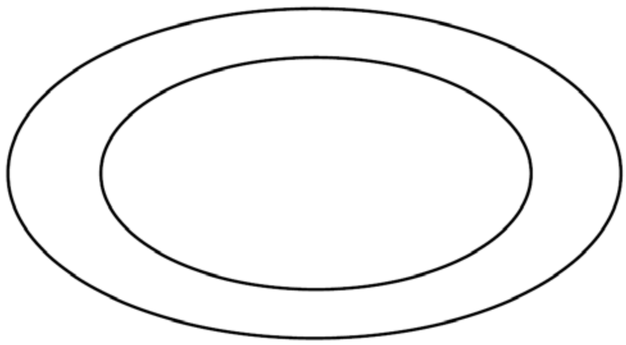
4. Το μήκος του μεγάλου άξονα ισούται με το μήκος του τμήματος ΑΒ (δείτε το βήμα 2 στην ενότητα “Περαιτέρω εξερεύνηση” με τη βοήθεια του μοντέλου σας). Έτσι, ένας απλός τρόπος μέτρησης της απόστασης μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα είναι η μέτρηση της απόστασης μεταξύ των σημείων Α και Β.

5. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης προσεγγίζει το 0 όταν η μία εστία είναι κοντά στην άλλη. Η εκκεντρότητα προσεγγίζει το 1 όταν το μήκος του τμήματος E_1E_2 τείνει στο μήκος του τμήματος AB. Εκκεντρότητες κοντά στο 0 παράγουν ελλείψεις που μοιάζουν με κύκλους. Εκκεντρότητες *πολύ* κοντά στο 1 παράγουν ελλείψεις που με δυσκολία διακρίνονται από ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Γιατί τονίζουμε τη λέξη «πολύ»; Ακόμη και όταν έχουμε μια έλλειψη με μεγάλο άξονα 10 εκατοστών και με εκκεντρότητα 0,99, η έλλειψη δεν είναι τόσο πεπλατυσμένη όσο φαντάζεστε. (Υπολογίστε το μήκος του μικρού άξονα, ώστε να το διαπιστώσετε!)

6. Εφόσον η εκκεντρότητα μετριέται ως λόγος, ένας άπειρος αριθμός διαφορετικών ελλείψεων μπορούν να έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μια μέθοδος δημιουργίας δύο ελλείψεων με την ίδια εκκεντρότητα έγκειται στη μεγέθυνση ή σμίκρυνση μιας έλλειψης με τη βοήθεια μιας φωτοαντιγραφικής διάταξης. Η μεγαλύτερη από τις παρακάτω δύο ελλείψεις δημιουργήθηκε με ένα πρόγραμμα σχεδίασης σε υπολογιστή και κατόπιν ελαττώθηκε το μέγεθός της στο 70% του αρχικού με χρήση της εντολής προσαρμογής κλίμακας.

Στο Sketchpad η ίδια ελάττωση μπορεί να επιτευχτεί με την αυξομείωση της έλλειψης ως προς το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εστίες.



<u>Μέσα χορδών</u> (σ. 43)

Ένας από τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου είναι να εισαγάγει τους μαθητές στην εξερεύνηση, διατύπωση υποθέσεων και κατασκευή με το Sketchpad, παρέχοντας παράλληλα τις απαρχές μιας νοητής εικόνας σχετικής με την έννοια της εφαπτομένης.

Έρευνες 1 και 2

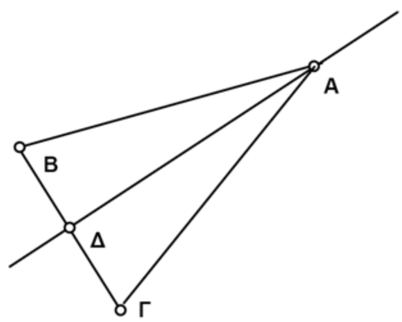
Ένα σύντομο οπτικό πείραμα για την εξοικείωση με την έννοια της εφαπτομένης και την ανάπτυξη της σχετικής ορολογίας. Μπορεί να διεξαχθεί πολύ γρήγορα ή σε μια επίδειξη στην τάξη.

Έρευνα 1

Οι μαθητές πειραματίζονται με παράλληλες χορδές και τα μέσα τους. Στη συνέχεια, κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο των μέσων.

Ακολουθούν οι κύριες μαθηματικές ιδέες (οι οποίες δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες):

- ➲ Το μέσο μιας χορδής βρίσκεται στη διάμετρο που είναι κάθετη στη χορδή, άρα ο γεωμετρικός τόπος των μέσων παράλληλων χορδών είναι η διάμετρος αυτή.
- ➲ Αν δοθεί ένας κύκλος, για κάθε ευθεία υπάρχουν δύο εφαπτομένες στον κύκλο και παράλληλες προς την ευθεία αυτή. Τα σημεία επαφής είναι τα δύο άκρα της κάθετης στη δοθείσα ευθεία διαμέτρου.
- ➲ Εάν μια ευθεία ε εφάπτεται σε έναν κύκλο και στο σημείο Ρ, η διάμετρος του κύκλου από το Ρ είναι κάθετος στην ευθεία.



Για την απόδειξη αυτών των συμπερασμάτων, οι μαθητές πρέπει να κατανοούν τη βασική γεωμετρία του ισοσκελούς τριγώνου και ειδικότερα του γεγονότος ότι, αν η ευθεία ΑΔ είναι ένα ύψος, τότε το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος.

Έρευνα 2

Ζητείται από τους μαθητές να ανακαλύψουν ότι τα μέσα των χορδών που (αν επεκταθούν) διέρχονται από δοθέν σημείο Ρ κείνται επί ενός τόξου (ή κύκλου, αν το Ρ βρίσκεται στο εσωτερικό του δοθέντος κύκλου).

Στο σημείο αυτό ίσως είναι σημαντικό για τους μαθητές να εξετάσουν πιθανές αιτίες για την αιτιολόγηση του συμπεράσματος αυτού, όμως ενδέχεται, στην αρχή του μαθήματος της γεωμετρίας, να μην είναι έτοιμοι για μια αυστηρή απόδειξη.

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη σε προβλήματα κατασκευής. Ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν κύκλους εφαπτόμενους σε μια ευθεία, αν δίνεται το κέντρο ή ένα σημείο της ευθείας (η λύση στο πρόβλημα αυτό δεν είναι μοναδική). Επίσης, ζητείται η κατασκευή κύκλων εφαπτόμενων σε κύκλους.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (σ. 48)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να είναι κάπως εξοικειωμένοι με δευτεροβάθμιες συναρτήσεις. Προηγούμενη εμπειρία με δημιουργία γραφημάτων στο Sketchpad είναι επίσης χρήσιμη.

Χρόνος στην τάξη: 40 λεπτά. Αύξηση του χρόνου αν οι μαθητές πρέπει να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους.

Κατασκευαστικές συμβουλές

Βήμα 5: Για τη συντεταγμένη y, επιλέξτε την εντολή Μέτρηση > Τεταγμένη (y).

Βήμα 6: Αυτό το βήμα αλλαγής ετικέτας περιλαμβάνει επιπλέον εργασία αλλά καθιστά τις τιμές στην οθόνη περισσότερο ευανάγνωστες και εύχρηστες.

Βήμα 7: Οι μαθητές πρέπει να μην ξεχνούν να χρησιμοποιούν το σύμβολο του πολλαπλασιασμού πριν από τις παρενθέσεις. Για την ύψωση σε δύναμη χρησιμοποιήστε το πλήκτρο ^.

Βήμα 9: Εάν θέλετε μια πιο λεία παραβολή, μπορείτε να αλλάξετε το πλήθος των σημείων του γεωμετρικού τόπου με δεξί κλικ στον τελευταίο μέσω του Μενού περιβάλλοντος και επεξεργασία των Ιδιοτήτων του. Κατόπιν επιλέξτε ένα μεγαλύτερο αριθμό σημείων.

Έρευνα

1. Η τιμή του a καθορίζει τη διεύθυνση της παραβολής. Αν το a είναι αρνητικό, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Αν το a είναι θετικό, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Η τιμή του a καθορίζει επίσης το εύρος της παραβολής. Όσο μεγαλύτερη απόλυτα η τιμή του a, τόσο πιο «στενή» η παραβολή.

   Η τιμή του c καθορίζει την κατακόρυφη θέση της παραβολής. Η μεταβολή του c έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των τιμών του y. Η τιμή του b καθορίζει την οριζόντια θέση της παραβολής. Η μεταβολή του b έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των τιμών του x.

2. Το c είναι η συντεταγμένη y της κορυφής και το b η συντεταγμένη x, συνεπώς οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής είναι (b, c).

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με την παραβολή ωσότου περιλαμβάνει τα αναγκαία τρία σημεία. Εάν ο παίκτης του μπάσκετ στέκεται στην αρχή των αξόνων και ρίχνει τη μπάλα προς τα δεξιά, η εξίσωση είναι y = -1,6(x – 2,5)2 + 10. Ο έλεγχος της εξίσωσης αυτής μπορεί να γίνει αλγεβρικά. Η εύρεση της παραβολής είναι ευκολότερη αν οι μαθητές αποτυπώσουν τα σημεία (2,5, 10) και (5, 0).

2. α. Οι απαντήσεις ποικίλλουν. Οι μαθητές μπορούν να αποτυπώσουν τα σημεία (0, 2) και (5, 3,3) και κατόπιν να προσαρμόσουν την παραβολή ώστε να διέρχεται και από τα δύο σημεία αυτά. Το μοντέλο αυτό δείχνει τον παίκτη να στέκεται στην αρχή των αξόνων και να ρίχνει την μπάλα προς τα δεξιά. Υπάρχουν πολλές δυνατές παραβολές που περιέχουν αυτά τα δύο σημεία. Η εξίσωση μιας παραβολής που διέρχεται πολύ κοντά από τα σημεία αυτά είναι η y = -0,5(x - 2,76)2 + 5,80. Για την εύρεση μιας ακριβούς εξίσωσης, απαιτούνται αλγεβρικές μέθοδοι.

   β. Υπάρχουν πολλές δυνατές παραβολές, αναλόγως του μέγιστου ύψους της τροχιάς της μπάλας (δύο σημεία δεν ορίζουν με μοναδικό τρόπο μια παραβολή). Άρα υπάρχουν επίσης πολλές δυνατές, επιτυχείς, ελεύθερες βολές.

3. Τρία σημεία ορίζουν με μοναδικό τρόπο μια παραβολική συνάρτηση, εφόσον δεν είναι συγγραμμικά. Εάν έχετε παραβολές που δεν είναι συναρτήσεις, τρία μη συγγραμμικά σημεία ορίζουν πολλές παραβολές. Εάν οι μαθητές διαθέτουν εμπειρία στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων, μπορείτε να τους αναπτύξετε τον τρόπο με τον οποίο οι συντεταγμένες x και y τριών διαφορετικών σημείων μπορούν να εισαχθούν στη γενική συνάρτηση y = a(x - b)2 + c για την παραγωγή τριών διαφορετικών (γραμμικών) εξισώσεων. Εφόσον τώρα οι άγνωστοι είναι τρεις, δηλαδή a, b και c, μπορείτε να λύσετε αυτό το γραμμικό σύστημα 3x3 ως προς τους τρεις αγνώστους. Εάν τα τρία αρχικά σημεία είναι συγγραμμικά, το σύστημα δεν έχει λύση.

4. Τα γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελούν καλά παραδείγματα. Λόγου χάρη, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν το γράφημα της συνάρτησης y = aημbx, αφού προηγουμένως κατασκευάσουν μεταβλητά μήκη για τα a και b. Κατόπιν μπορούν να μεταβάλουν τις περιόδους και τα πλάτη των ημιτονοειδών κυμάτων τους.

<u>Διάμεσοι ενός τριγώνου</u> (σ. 52)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ή να μυηθούν στις έννοιες των όρων *σημείο στο μέσο* και *διάμεσος*. Επίσης, είναι χρήσιμο εάν γνωρίζουν τον τρόπο ταξινόμησης τριγώνων.

Χρόνος στην τάξη: 30-40 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου/Προσαρμοσμένου εργαλείου: *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* (Προσαρμοσμένο εργαλείο *Κέντρο βάρους*).

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Η τρίτη διάμεσος διέρχεται από το σημείο τομής των άλλων δύο. Οι τρεις διάμεσοι είναι συντρέχουσες.

Ε2. Οι μαθητές μπορούν να εγγράψουν έναν από τους παρακάτω υπολογισμούς:

ΒΚβ/ΚβΗ = 2,000 ΚβΗ/ΒΚβ = 0,500

Ε3. Το κέντρο βάρους διαιρεί κάθε διάμεσο σε δύο μέρη, ένα από τα οποία είναι διπλάσιο του άλλου.

Ε4. Η κλίση της ευθείας είναι 1/2 (ή 2, αναλόγως του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν τους πίνακές τους). Η τιμή αυτή παριστάνει το λόγο μεταξύ των μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων που δημιουργεί πάνω σε μια διάμεσο το κέντρο βάρους.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Για οδηγίες σχετικά με τη δημιουργία και αποθήκευση Προσαρμοσμένων εργαλείων, δείτε το σχετικό θέμα στη Βοήθεια. Ένα δείγμα επίσης Προσαρμοσμένου εργαλείου σχετικά με το κέντρο βάρους υπάρχει στις *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* στο CD-ROM που περιέχει κι αυτό το βιβλίο.

Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου (σ. 54)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν το νόημα του όρου *μεσοκάθετος*. Επίσης, είναι χρήσιμο εάν γνωρίζουν τον τρόπο ταξινόμησης τριγώνων.

Χρόνος στην τάξη: 20-30 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου/Προσαρμοσμένου εργαλείου: *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* (Προσαρμοσμένο εργαλείο *Περίκεντρο*).

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Η τρίτη μεσοκάθετος διέρχεται από το σημείο τομής των υπόλοιπων δύο. Οι τρεις μεσοκάθετοι είναι συντρέχουσες.

Ε2. Το σημείο Η βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου όταν αυτό είναι αμβλυγώνιο και στο εσωτερικό του τριγώνου όταν αυτό είναι οξυγώνιο.

Ε3. Όταν το σημείο Η βρίσκεται πάνω στο τρίγωνο, το τελευταίο είναι ορθογώνιο. Το σημείο Η βρίσκεται στο μέσο της υποτείνουσας.

Ε4. Οι αποστάσεις του περίκεντρου από κάθε κορυφή είναι ίσες.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Για οδηγίες σχετικά με τη δημιουργία και αποθήκευση Προσαρμοσμένων εργαλείων, δείτε το σχετικό θέμα στη Βοήθεια. Ένα δείγμα επίσης Προσαρμοσμένου εργαλείου σχετικά με το περίκεντρο υπάρχει στις *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* στο CD-ROM που περιέχει κι αυτό το βιβλίο.

2. Το περίκεντρο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Επίσης, ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη μεταβατική ιδιότητα, το περίκεντρο ισαπέχει και από τις τρεις κορυφές, Α, Β, Γ.

3. Εάν οι μαθητές προσπαθήσουν να περιγράψουν έναν κύκλο γύρω από ένα τετράπλευρο, θα ανακαλύψουν ότι, αντίθετα με τα τρίγωνα, αυτό δεν είναι δυνατόν για κάθε τετράπλευρο. Τα τετράπλευρα για τα οποία κάτι τέτοιο είναι δυνατόν ονομάζονται **κυκλικά**. Οι μαθητές μπορούν να εγγράψουν ένα τετράπλευρο σε έναν κύκλο και να αναζητήσουν ιδιότητες των κυκλικών τετράπλευρων. Μια ιδιότητα είναι ότι οι απέναντι γωνίες είναι συμπληρωματικές. Πολύγωνα άλλου είδους είναι κυκλικά όταν οι μεσοκάθετοί τους συντρέχουν σε ένα σημείο.

<u>Ύψη ενός τριγώνου</u> (σ. 56)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν το νόημα των όρων *κάθετος* και *οξυγώνιο* (τρίγωνο). Η δραστηριότητα αυτή εισάγει την έννοια του *ύψους*.

Χρόνος στην τάξη: 30-50 λεπτά για ολόκληρη τη δραστηριότητα. Εάν διαθέτετε λιγότερο χρόνο, μπορείτε να σταματήσετε μετά από το ερώτημα Ε2 ώστε να έχετε μια βασική εισαγωγή στην έννοια του ύψους (περίπου 15 λεπτά) ή μετά από το ερώτημα Ε3 (25-30 λεπτά), οπότε οι μαθητές έχουν αποκτήσει γνώσεις σχετικά με το σημείο τομής των υψών.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Εάν ένα ύψος βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου, το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Ε2. Όταν η γωνία Α είναι ορθή, το ύψος ΒΔ ταυτίζεται με την πλευρά ΒΑ.

Ε3. Όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, τα τρία ύψη τέμνονται σε ένα σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου.

Ε4. Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, δύο ύψη βρίσκονται στο εξωτερικό και ένα στο εσωτερικό του τριγώνου.

Ε5. Και οι τρεις ευθείες που περιέχουν τα ύψη τέμνονται πάντοτε στο ορθόκεντρο του τριγώνου. Στα οξυγώνια τρίγωνα το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό, ενώ στα αμβλυγώνια τρίγωνα στο εξωτερικό του τριγώνου.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Για οδηγίες σχετικά με τη δημιουργία και αποθήκευση Προσαρμοσμένων εργαλείων, δείτε το σχετικό θέμα στη Βοήθεια. Ένα δείγμα επίσης Προσαρμοσμένου εργαλείου σχετικά με το ορθόκεντρο υπάρχει στις *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* στο CD-ROM που περιέχει κι αυτό το βιβλίο.

2. Κάθε σημείο είναι το ορθόκεντρο των άλλων τριών. Με άλλα λόγια, εάν το σημείο Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το σημείο Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ, το σημείο Β είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΔ και το σημείο Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.

3. Οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν το αποτέλεσμα του τύπου βυ/2 για καθεμιά από τις τρεις βάσεις με το αντίστοιχο ύψος.

Διχοτόμοι ενός τριγώνου (σ. 59)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ή να μυηθούν στην έννοια του όρου *διχοτόμος* γωνίας.

Χρόνος στην τάξη: 20-30 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου/Προσαρμοσμένου εργαλείου: *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* (Προσαρμοσμένο εργαλείο *Έγκεντρο*).

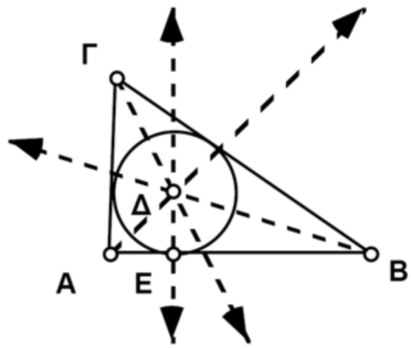
Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Η τρίτη διχοτόμος διέρχεται από το σημείο τομής των άλλων δύο.

Ε2. Οι αποστάσεις του έγκεντρου από κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μεταξύ τους ίσες.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Δ είναι το έγκεντρο, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το σημείο Ε είναι το άλλο σημείο ελέγχου του κύκλου. Εάν οι μαθητές δεν κατασκευάσουν ένα σημείο όπως το Ε ώστε να προσδέσουν σωστά τον κύκλο, τα σχέδιά τους θα καταστραφούν εάν μεταφερθούν.



2. Για οδηγίες σχετικά με τη δημιουργία και αποθήκευση Προσαρμοσμένων εργαλείων, δείτε το σχετικό θέμα στη Βοήθεια. Ένα δείγμα επίσης Προσαρμοσμένου εργαλείου σχετικά με το έγκεντρο υπάρχει στις *Δραστηριότητες\Σημεία τριγώνου.gsp* στο CD-ROM που περιέχει κι αυτό το βιβλίο.

3. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις δύο πλευρές της διχοτομούμενης γωνίας. Το έγκεντρο ανήκει σε καθεμιά από τις τρεις διχοτόμους, επομένως, ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Άρα ένα κύκλος με ακτίνα αυτή την απόσταση θα εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

4. Μπορείτε να εγγράψετε έναν κύκλο σε οποιοδήποτε τετράπλευρο με συντρέχουσες διχοτόμους. Αυτό το είδος τετράπλευρων περιλαμβάνει τους ρόμβους αλλά όχι την πλειονότητα των πλαγίων ή των ορθογώνιων παραλληλόγραμμων.

Εν γένει, ένα πολύγωνο πρέπει να έχει συντρέχουσες διχοτόμους προκειμένου να διαθέτει έναν εγγεγραμμένο κύκλο.

<u>Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων</u> (σ. 61)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό του *ορθογώνιου παραλληλόγραμμου*.

Χρόνος στην τάξη: 25-40 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Οι απέναντι πλευρές ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι ίσες.

Ε2. Οι διαγώνιοι σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ίσες και διχοτομούνται μεταξύ τους. Επίσης, διαιρούν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε δύο ζεύγη ίσων και ισοσκελών τριγώνων.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν όλες τις ιδιότητες των πλαγίων παραλληλόγραμμων και επίσης ίσες διαγώνιους.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαθέτει περιστροφική συμμετρία 180 μοιρών ως προς το σημείο τομής των διαγώνιών του και δύο άξονες ανακλαστικής συμμετρίας διερχόμενους από τα σημεία στο μέσο απέναντι πλευρών. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο είναι επίσης τετράγωνο διαθέτει πρόσθετες συμμετρίες.

<u>Ιδιότητες ρόμβων</u> (σ. 63)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό του *ρόμβου*.

Χρόνος στην τάξη: 25-40 λεπτά.

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Οι απέναντι πλευρές ενός ρόμβου είναι παράλληλες (ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο). Οι απέναντι γωνίες ενός ρόμβου είναι ίσες, ενώ οι διαδοχικές γωνίες είναι συμπληρωματικές.

Ε2. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι μεταξύ τους μεσοκάθετοι, διχοτόμοι των γωνιών του ρόμβου και άξονες ανακλαστικής συμμετρίας.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Οι απαντήσεις ποικίλλουν. Οι μαθητές πρέπει να επισημάνουν ότι οι ρόμβοι, εκτός από τις δικές τους ειδικές ιδιότητες, διαθέτουν και όλες τις ιδιότητες ενός πλαγίου παραλληλόγραμμου, οι οποίες παρατέθηκαν προηγουμένως στα Ε1 και Ε2.

2. Ένας ρόμβος διαθέτει περιστροφική συμμετρία 180 μοιρών. Επίσης, έχει δύο άξονες ανακλαστικής συμμετρίας, κατά μήκος καθεμιάς από τις διαγώνιους.

3. Σχετικά με μεθόδους κατασκευής ρόμβων, δείτε τις Σημειώσεις Καθηγητή για τη δραστηριότητα Κατασκευή ρόμβων.

Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων (σ. 65)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους όρους *εμβαδόν*, *παραλληλόγραμμο*, καθώς και τους όρους *ύψος* και *βάση* σε σχέση με παραλληλόγραμμα και τρίγωνα. Δεν απαιτείται προηγούμενη γνώση της έννοιας της *διατμητικής παραμόρφωσης*. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμεύσει ως εισαγωγή στους τύπους για το εμβαδόν παραλληλόγραμμου και τριγώνου ή, αν οι μαθητές γνωρίζουν ήδη αυτές τις έννοιες, ως ανασκόπηση στο αντικείμενο αυτό.

Χρόνος στην τάξη: 40-50 λεπτά. Εάν επιθυμείτε οι μαθητές να εξοικονομήσουν χρόνο από την κατασκευή, ας αρχίσουν κατευθείαν με το Παράδειγμα σχεδίου.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Εμβαδόν παραλληλόγραμμου.gsp.*

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου παραμένει σταθερό στην περίπτωση της διατμητικής παραμόρφωσης, επειδή η βάση και το ύψος του παραλληλόγραμμου διατηρούνται σταθερά και το εμβαδόν εξαρτάται μόνο από αυτά τα δύο μεγέθη. Το εμβαδόν μεταβάλλεται όταν μεταβληθεί η βάση ή το ύψος του παραλληλόγραμμου.

Ε2. Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ισούται με (ΕΘ) επί (ΔΖ).

Ε3. Ε = βυ.

Ε4. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ακριβώς το ήμισυ του εμβαδού του παραλληλόγραμμου, Ε = βυ/2.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Κατά τη διάρκεια της προσθήκης κίνησης, το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου δεν πρέπει να μεταβληθεί, επειδή δε μεταβάλλεται ούτε το ύψος ούτε η βάση. Το εμβαδόν παραμένει σταθερό στη διατμητική παραμόρφωση για οποιοδήποτε σχήμα, διότι κάθε διατομή παράλληλη προς την ευθεία της διατμητικής παραμόρφωσης διατηρεί σταθερό μήκος.

Εμβαδόν/περίμετρος τριγώνου (σ. 68)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο εύρεσης του εμβαδού και της περιμέτρου ενός τριγώνου.

Χρόνος στην τάξη: 30-60 λεπτά, αναλόγως του χρόνου που θα διαθέσετε στους μαθητές για την εξερεύνηση. Το πρόβλημα αυτό μπορεί κάλλιστα να αποτελέσει μια εργασία για το σπίτι. Μπορείτε να ζητήσετε από τους μαθητές την ηλεκτρονική παρουσίαση της εργασίας τους, εμφανίζοντας διαφορετικές κατασκευές και περιπτώσεις με χρήση χρωμάτων, κειμένου και κινούμενων γραφικών.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Εμβαδόν τριγώνου.gsp.*

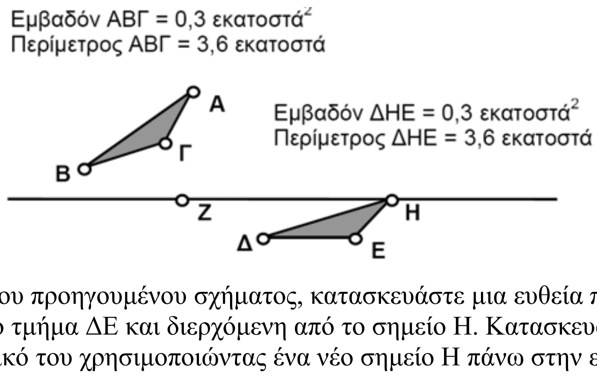
Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Δύο άνισα τρίγωνα μπορούν να έχουν ίσο εμβαδόν και ίση περίμετρο. Ουσιαστικά, υπάρχουν άπειρα άνισα τρίγωνα με ίσο εμβαδόν και ίση περίμετρο. Η ανάλυση στο ερώτημα Ε2 παρακάτω επεξηγεί ως ένα βαθμό αυτό το γεγονός.

Σημείωση: Μπορείτε να ζητήσετε από τους μαθητές να μεταβάλουν την ακρίβεια των μετρήσεών τους σε δέκατα στις Προτιμήσεις του μενού Προβολή. Εάν η ζητούμενη ακρίβεια είναι υψηλή, ενδέχεται οι μαθητές να απομακρυνθούν από το πρόβλημα καθαυτό, καθώς θα αναλωθούν στην προσπάθεια μεταφοράς σημείων με ρυθμό ένα εικονοστοιχείο τη φορά, με σκοπό να προσδώσουν στις μετρήσεις ακρίβεια χιλιοστού.

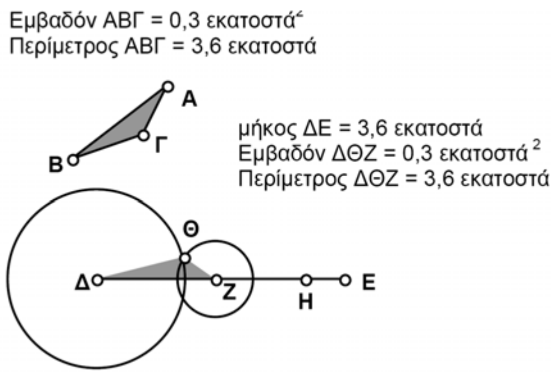
Ε2. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης αυτού του προβλήματος. Πιθανότατα ο πλέον συνήθης συνίσταται στην κατασκευή δύο τυχαίων τριγώνων και των εσωτερικών τους και στη μεταφορά των κορυφών τους, προκειμένου να συνταιριαστούν οι μετρήσεις του εμβαδού και της περιμέτρου τους. Η μέθοδος αυτή ίσως αποβεί απελπιστική. Ακολούθως δίνουμε δύο περισσότερο συστηματικές μεθόδους. Και στις δύο μεθόδους πρώτα κατασκευάστηκε το τρίγωνο ΑΒΓ και κατόπιν μετρήθηκαν και διατηρήθηκαν σταθερά το εμβαδόν και η περίμετρός του.

Μέθοδος 1: Προσαρμογή πρώτα των εμβαδών και κατόπιν των περιμέτρων. Δείτε το σχέδιο *Δραστηριότητες\Εμβαδόν τριγώνου.gsp*.



Για τη δημιουργία του προηγουμένου σχήματος, κατασκευάστε μια ευθεία παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και διερχόμενη από το σημείο Η. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΔΕΗ και το εσωτερικό του χρησιμοποιώντας ένα νέο σημείο Η πάνω στην ευθεία αυτή. Μεταφέρετε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ έως ότου συνταιριαστούν τα εμβαδά των τριγώνων και κατόπιν μεταφέρετε το σημείο Η (όπου το εμβαδόν παραμένει σταθερό) έως ότου συνταιριαστούν οι περίμετροι.

Μέθοδος 2: Προσαρμογή πρώτα των περιμέτρων και κατόπιν των εμβαδών.



Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ, μετρήστε το μήκος του και μεταφέρετε το σημείο Ε ωσότου το ΔΕ ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ, ΖΗ και ΗΕ, όπου τα σημεία Ζ και Η ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ θα είναι μία από τις πλευρές του τριγώνου, ενώ τα τμήματα ΖΗ και ΗΕ θα είναι τα μήκη των υπόλοιπων δύο πλευρών.

Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΖΗ. Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Ζ και ακτίνα ΗΕ.

Κατασκευάστε το σημείο Θ, δηλαδή ένα από τα σημεία τομής αυτών των κύκλων.

Κατασκευάστε το εσωτερικό του τριγώνου ΔΘΖ. Η περίμετρός του ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. Μετακινήστε τα σημεία Η και Ζ ωσότου τα εμβαδά είναι ίσα. (Με την ευκαιρία, εάν σχεδιάσετε το ίχνος του γεωμετρικού τόπου του σημείου Θ ενόσω μεταφέρετε το σημείο Η, θα λάβετε μια έλλειψη!)

Εμβαδόν ενός τραπεζίου (σ. 69)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους όρους *ύψος* και *βάση* αναφορικά με το τραπέζιο. Επίσης, πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο εύρεσης του εμβαδού ενός παραλληλόγραμμου.

Χρόνος στην τάξη: 35-50 λεπτά. Εάν υπάρχει έλλειψη χρόνου, ζητήστε από τους μαθητές να σταματήσουν μετά από το βήμα 13 και να χρησιμοποιήσουν τις μετρήσεις των βάσεων και του ύψους του τραπεζίου προκειμένου να καταστρώσουν μια έκφραση για το εμβαδόν.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Εμβαδόν τραπεζίου.gsp.*

Σχέδιο και έρευνα

Ε1. Ο συνδυασμός των δύο τραπεζίων δίνει ένα παραλληλόγραμμο.

Ε2. Το παραλληλόγραμμο του ερωτήματος Ε1 έχει βάση μήκους $\beta_1 + \beta_2$.

Ε3. $E = (\beta_1 + \beta_2)\upsilon$ είναι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

Ε4. $E = (\beta_1 + \beta_2)\upsilon/2$ είναι το εμβαδόν του τραπεζίου.

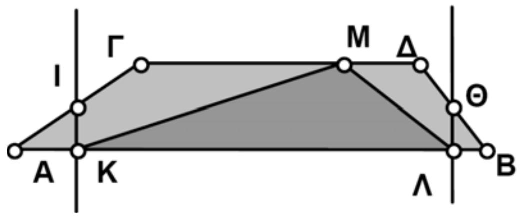
Ε5. $$\frac{[(\text{Μήκος ΑΒ}) + (\text{Μήκος ΓΔ})](\text{ Απόσταση μεταξύ Γ και ΑΒ})}{2}$$

Κατά την άθροιση των δύο βάσεων, οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν παρενθέσεις.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. $E = \mu\upsilon$, όπου μ το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα δύο σημεία στο μέσο και Ε το εμβαδόν του τραπεζίου. Το μήκος μ είναι η μέση τιμή των μηκών των βάσεων.

2. Στο παρακάτω σχήμα το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΛ είναι το ήμισυ του εμβαδού του τραπεζίου. Τα σημεία Ι και Θ είναι στο μέσο των πλευρών και τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται στο ίχνος των καθέτων που διέρχονται από τα σημεία Ι και Θ. Το σημείο Μ είναι ένα τυχαίο σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, επομένως, υπάρχουν πολλά δυνατά τρίγωνα αυτού του είδους.



Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας (σ. 72)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της γωνίας.

Χρόνος στην τάξη: 30 λεπτά.

Οδηγίες κατασκευής

Βήμα 1 Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο τμήμα ΑΒ και κατόπιν κατασκευάστε την ΒΓ πάνω σε αυτό ή απλώς διατηρήστε πατημένο το Shift ενόσω κατασκευάζετε τα ευθύγραμμα τμήματα ώστε να εξασφαλίσετε ότι είναι κατακόρυφα και οριζόντια.

Βήμα 2 Βεβαιωθείτε ότι ως μονάδες μήκους έχουν επιλεγεί τα εκατοστά στις Προτιμήσεις. Στο παράδειγμα το σημείο Δ μεταφέρθηκε κατά 5,08 εκατοστά με πολικές συντεταγμένες 90°.

Έρευνα/Εικασία

Οι προσεγγιστικές λύσεις που παρέχει το Sketchpad είναι 3,6 εκατοστά (0,36 μέτρα) για μια γωνία 45° και 4,9 εκατοστά (0,49 μέτρα) για μια γωνία 75°. Ωστόσο, οι μαθητές πρέπει να προχωρήσουν πέρα από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Βεβαιωθείτε ότι οι μαθητές επινοούν δικά τους προβλήματα και ενθαρρύνετέ τους στην κατασκευή μοντέλων για διαφορετικά προβλήματα.

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Δείτε το αρχείο *Δραστηριότητες\Πτώση σκάλας.gsp* για μια τρισδιάστατη θεώρηση του προβλήματος. Εάν οι μαθητές σχεδιάσουν το ίχνος της τροχιάς ενός δοχείου μπογιάς στο μέσο θα διαπιστώσουν ότι διαγράφει ένα τεταρτοκύκλιο. Τι συμβαίνει όταν το σημείο δε βρίσκεται στο μέσο;

2. Το γράφημα της απόστασης της σκάλας από τον τοίχο ως προς το ύψος στον τοίχο είναι ένα τεταρτοκύκλιο με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το σημείο στήριξης της σκάλας στο έδαφος απομακρύνεται από τον τοίχο, η κορυφή της σκάλας αρχίζει βαθμιαία να πέφτει. Όμως, όσο το σημείο στήριξης απομακρύνεται από τον τοίχο, τόσο ταχύτερα πέφτει η κορυφή της σκάλας.

Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – γπγ; (σ. 74)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές οφείλουν να γνωρίζουν το νόημα του όρου *ίσος*.

Απαιτούμενο σχέδιο: *Δραστηριότητες\Ισότητα τριγώνων - γπγ.gsp*

Χρόνος στην τάξη: 10-20 λεπτά. Ενδεχομένως επιθυμείτε την εκτέλεση αυτής της δραστηριότητας μαζί με άλλες δραστηριότητες σχετικά με την ισότητα τριγώνων: πππ, γγγ, πγπ, ππγ (*Δραστηριότητες\Τρίγωνα.gsp*).

Οδηγίες κατασκευής

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές δε χρειάζεται να κατασκευάσουν τίποτα. Αντιθέτως, θα χειριστούν ένα προκατασκευασμένο σχέδιο. Ίσως επιθυμείτε να τοποθετήσετε αυτό το σχέδιο στο δίκτυο ως παράδειγμα επίδειξης. Πραγματευτείτε ένα από τα τρίγωνα προκειμένου να δείξετε πώς λειτουργεί το σχέδιο. Κατόπιν σταματήστε την επίδειξη και αφήστε τους μαθητές να προσπαθήσουν με το δεύτερο τρίγωνο.

Βήμα 3 Τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΓ στο τρίγωνο δεν είναι σταθερά, σε αντίθεση με τις γωνίες. Μετακινήστε ένα σημείο Γ έτσι ώστε το τμήμα ΑΓ να είναι αρκετά μεγάλο. Κατόπιν μεταφέρετε το άλλο σημείο Γ έτσι ώστε να ανήκει στο τμήμα ΑΓ. Μεταφέρετε το πρώτο σημείο Γ προς τα πίσω ώστε τα δύο σημεία Γ να συμπέσουν.

Έρευνα/Εικασία

Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι τα μόνα τρίγωνα που μπορούν να κατασκευάσουν είναι ίσα και πρέπει να διατυπώσουν την εξής υπόθεση:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες ίσες.

Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – ππγ; (σ. 75)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές οφείλουν να γνωρίζουν το νόημα του όρου *ίσος*.

Απαιτούμενο σχέδιο: *Δραστηριότητες\Ισότητα τριγώνων - ππγ.gsp*

Χρόνος στην τάξη: 10-20 λεπτά. Ενδεχομένως επιθυμείτε την εκτέλεση αυτής της δραστηριότητας μαζί με άλλες δραστηριότητες σχετικά με την ισότητα τριγώνων: πππ, γγγ, πγπ, γπγ (*Δραστηριότητες\Τρίγωνα.gsp*).

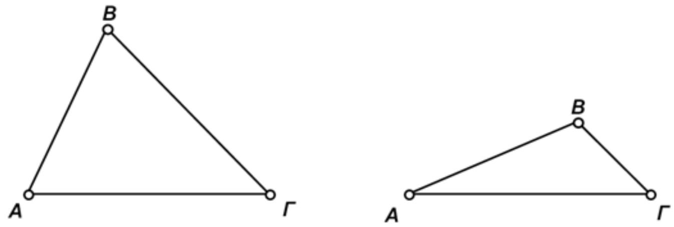
Οδηγίες κατασκευής

Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές δε χρειάζεται να κατασκευάσουν τίποτα. Αντιθέτως, θα χειριστούν ένα προκατασκευασμένο σχέδιο. Ίσως επιθυμείτε να τοποθετήσετε αυτό το σχέδιο στο δίκτυο ως παράδειγμα επίδειξης. Πραγματευτείτε ένα από τα τρίγωνα προκειμένου να δείξετε πώς λειτουργεί το σχέδιο. Κατόπιν σταματήστε την επίδειξη και αφήστε τους μαθητές να προσπαθήσουν με το δεύτερο τρίγωνο.

Βήμα 3 Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ στο τρίγωνο είναι σταθερό, σε αντίθεση με τη γωνία. Μετακινήστε το σημείο Β έτσι ώστε να ανήκει στο τμήμα ΓΒ στο τρίγωνο. Κατόπιν μεταφέρετε το άκρο Β του τμήματος ΓΒ, του οποίου η γωνία είναι σταθερή, ωσότου τα σημεία Β συμπέσουν.

Έρευνα/Εικασία

Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι με την προεπιλεγμένη εγκατάσταση μπορούν να δημιουργήσουν δύο άνισα τρίγωνα όπως παρακάτω.



Οι μαθητές πρέπει να διατυπώσουν την εξής υπόθεση:

Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες ίσες, δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Το μήκος του δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ μπορεί να προσαρμοστεί έτσι ώστε το ΑΒ μόλις να αγγίζει το ΓΒ. Σε αυτή την περίπτωση μπορείτε να δημιουργήσετε μόνο ίσα τρίγωνα και η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή.

<u>Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών</u> (σ. 77)

Προαπαιτούμενα: Εισαγάγετε τον ορισμό μίας έλλειψης ή αναπαραγάγετε τις οδηγίες κατασκευής χωρίς τον ορισμό και διαπιστώστε αν οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν δικούς τους ορισμούς. Μπορείτε να διευρύνετε αυτή τη δραστηριότητα δίνοντας στους μαθητές ελλιπείς οδηγίες και ζητώντας από αυτούς να κατασκευάσουν ένα σχεδιαστή ελλείψεων βασιζόμενοι στον ορισμό της έλλειψης.

Χρόνος στην τάξη: 20 λεπτά.

Οδηγίες κατασκευής

Βήμα 1 Βεβαιωθείτε ότι οι μαθητές γνωρίζουν πώς να κατασκευάσουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ και όχι απλώς πώς να τοποθετήσουν το σημείο Γ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Βήμα 2 Επεξεργαστείτε τις ετικέτες κάνοντας διπλό κλικ πάνω τους.

Βήμα 3 Επιλέξτε το σημείο $Ε_1$ και το τμήμα ΑΓ καθώς και την εντολή “Κύκλου από το κέντρο και ακτίνα” από το μενού Κατασκευή. Επαναλάβετε τη διαδικασία για το σημείο $Ε_2$ και το τμήμα ΓΒ.

Έρευνα/Εικασίες

Οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία $Ε_1$ και $Ε_2$ έχουν ακτίνες ΑΓ και ΓΒ, αντίστοιχα. Η απόσταση του $Ε_1$ από ένα σημείο τομής είναι ΑΓ και η αντίστοιχη απόσταση του $Ε_2$ είναι ΓΒ. Άρα το άθροισμα των αποστάσεων αυτών είναι ΑΓ + ΓΒ = ΑΒ. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Γ, τα ΑΓ και ΓΒ μεταβάλλονται, αλλά το ΑΒ δηλαδή το άθροισμά τους, παραμένει σταθερό. Τα σημεία τομής του κύκλου ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης, δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων προς δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Οι μαθητές που μετρούν την εκκεντρότητα θα διαπιστώσουν ότι αυτή προσεγγίζει την τιμή 0 όταν οι εστίες πλησιάζουν και την τιμή 1 όταν το τμήμα $Ε_1Ε_2$ τείνει στο τμήμα ΑΒ. Όταν το $Ε_1Ε_2$ γίνει μεγαλύτερο του ΑΒ, οι κύκλοι δεν τέμνονται πλέον όταν το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Β και το σχέδιο δεν είναι σε θέση να δημιουργήσει το ίχνος μιας έλλειψης. Οι κύκλοι τέμνονται όταν το σημείο Γ δε βρίσκεται μεταξύ των Α και Β. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά μεταξύ του μήκους των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ είναι σταθερή και ίση με ΑΒ. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος με εκκεντρότητα μεγαλύτερη του 1 είναι μία *υπερβολή*. Ενδεχομένως οι μαθητές θα θεωρήσουν ότι αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση της εκκεντρότητας έχει περισσότερο νόημα από την παραδοσιακή γεωμετρική αναπαράσταση που συναντούν σε εκπαιδευτικά βιβλία.

Δείτε το δείγμα σχεδίου *Δραστηριότητες\Έλλειψη.gsp* προκειμένου να διαπιστώσετε πώς υπεισέρχεται στη μελέτη το θεώρημα της τριγωνικής ανισότητας.

Ο εμπειρικός τρόπος κατασκευής μιας έλλειψης έγκειται στη χρήση ενός νήματος με δύο πινέζες ως εστίες. Στερεώστε τις πινέζες σε έναν πίνακα ανακοινώσεων, τεντώστε το νήμα με τη βοήθεια της μύτης ενός μολυβιού και χαράξτε την έλλειψη διατηρώντας την τάση του νήματος σταθερή. Το μήκος του νήματος είναι το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων από τις πινέζες.

Το λογισμικό **The Geometer's Sketchpad** εξελληνίσθηκε και προσαρμόσθηκε στο πλαίσιο του έργου **ΚΙΡΚΗ**, αντικείμενο του οποίου ήταν ο εξελληνισμός και η προσαρμογή στις ανάγκες του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος ώριμων και καταξιωμένων προϊόντων εκπαιδευτικού λογισμικού της διεθνούς αγοράς καθώς και η αναπαραγωγή και διανομή των προϊόντων αυτών σε 350 σχολεία.

Η **ΚΙΡΚΗ** - http://kirki.cti.gr - ξεκίνησε ως έργο της ενέργειας **Οδύσσεια-Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας,** το εθνικό πρόγραμμα παιδαγωγικής ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, το οποίο χρηματοδοτήθηκε για το διάστημα 1996-2001 από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης – ΕΠΕΑΕΚ, Β' ΚΠΣ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Η Οδύσσεια περιλάμβανε:

- ανάπτυξη κατάλληλης υποδομής σε 385 σχολεία εφαρμογής (εγκατάσταση σχολικών εργαστηρίων στα οποία υποστηρίζεται η διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων, δικτύωση στο Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο, τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη),
- μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι ανέλαβαν τη
- διαρκή ενδοσχολική επιμόρφωση των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούσαν στα σχολεία αυτά –και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους
- διερευνητικό διαθεματικό εκπαιδευτικό λογισμικό (αναπτύχθηκαν ή προσαρμόσθηκαν συνολικά 72 πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού - http://edsoft.cti.gr – διαφόρων μεγεθών και επιπέδου ωριμότητας, από κοινοπραξίες φορέων που συνδύαζαν τεχνική, παιδαγωγική και παραγωγική τεχνογνωσία (Πανεπιστήμια, Ερευνητικά Ινστιτούτα, Εταιρείες Πληροφορικής, Εκδότες).

Στην υλοποίηση της Οδύσσειας συμμετείχαν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, οι οποίοι εργάστηκαν σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρείες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

Στο πλαίσιο της **ΚΙΡΚΗΣ** εξελληνίστηκαν και προσαρμόστηκαν συνολικά 22 προϊόντα εκπαιδευτικού λογισμικού τα οποία επιλέχθηκαν μέσα από δεκάδες καταξιωμένα προϊόντα της διεθνούς αγοράς (6 προϊόντα χρηματοδοτήθηκαν στο πλαίσιο του ΕΠΕΑΕΚ, Β'ΚΠΣ και άλλα 16 στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Κοινωνία της Πληροφορίας», Γ'ΚΠΣ). Τα πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού διατέθηκαν στα σχολεία μετά από αξιολόγηση του Γραφείου Πιστοποίησης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου ως προς την παιδαγωγική τους αρτιότητα και του ΕΑ.ΙΤΥ ως προς την τεχνολογική τους αρτιότητα. Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής των υποέργων της ΚΙΡΚΗΣ εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη τιμή στη διεθνή αγορά.

Στο πλαίσιο του έργου «**ΠΛΕΙΑΔΕΣ**: Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού και Ολοκληρωμένων εκπαιδευτικών Πακέτων για τα Ελληνικά Σχολεία της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης & Διάθεση Προϊόντων Εκπαιδευτικού Λογισμικού στα Σχολεία» του ΕΑ.ΙΤΥ, που χρηματοδοτείται από το **Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Κοινωνία της Πληροφορίας» - Γ' ΚΠΣ**, εξασφαλίσθηκε η διάθεση του λογισμικού στο σύνολο των σχολείων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (προμήθεια αδειών χρήσης για 3.600 σχολικά εργαστήρια) καθώς και η άδεια χρήσης του από όλους τους Έλληνες εκπαιδευτικούς.

Περισσότερες πληροφορίες για το έργο **ΠΛΕΙΑΔΕΣ** είναι διαθέσιμες στη διεύθυνση http://pleiades.cti.gr.