ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

του CAUCHY

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$

- **i.** είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$
- **ii.** παραγωγίσιμες στο (α, β)
- **iii.** οι $f'(x)$ και $g'(x)$ δεν μηδενίζονται συγχρόνως σε κάποιο εσωτερικό σημείο, και
- **iv.** $g(\alpha) \neq g(\beta)$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} g(x), \;\; x \in [\alpha, \beta]$.

Ισχύει $H(\alpha) = \frac{f(\alpha)g(\beta)-f(\beta)g(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = H(\beta)$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα το Rolle θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $H'(\xi) = 0$

Δηλαδή

$$H'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(\xi), \qquad (1)$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

επειδή $g'(\xi) \neq 0$. (Αν $g'(\xi) = 0$, τότε από τη (1) και $f'(\xi) = 0$ άτοπο από τη συνθήκη iii.)