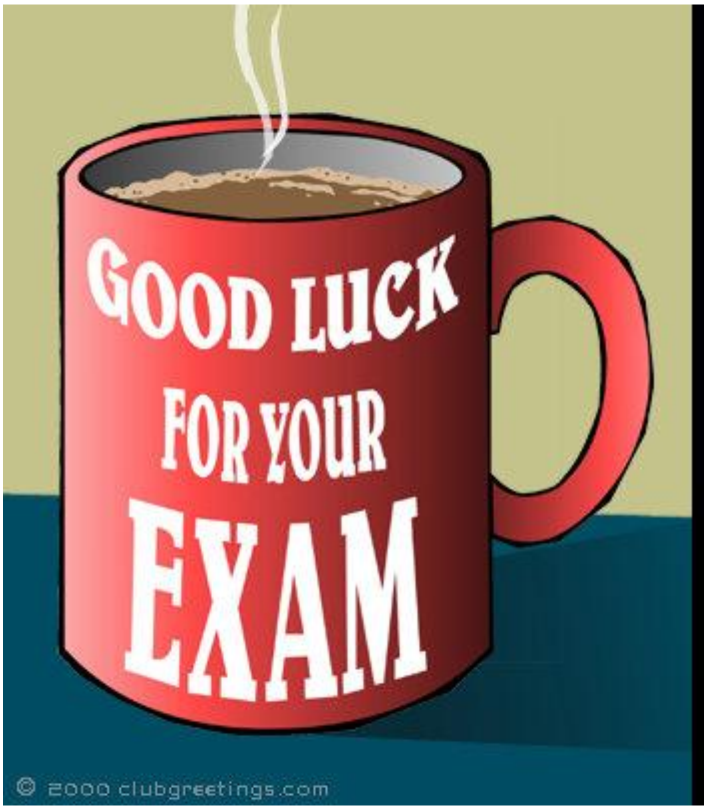
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τελευταίες οδηγίες…

Θυμόμαστε πάντοτε ότι:

1. Στις πράξεις με μιγαδικούς δεν αφήνουμε συνήθως μιγαδικό στον παρονομαστή. Πολλαπλασιάζουμε με τον συζυγή μιγαδικό του παρονομαστή και έτσι **ο παρονομαστής γίνεται πραγματικός και ίσος με το τετράγωνο του μέτρου του**.
2. Αν z = α+βi, α, β ∈R, τότε ισχύουν :

$$z+\bar{z}=2\alpha = 2\mathrm{Re}(z)$$
$$z-\bar{z}=2\beta i = 2\mathrm{Im}(z)i$$
$$z\bar{z}=|z|^2=\alpha^2+\beta^2.$$

3. Για τις δυνάμεις του i ισχύει : $i^{\nu} = i^{4\kappa+\upsilon} = i^{\upsilon} = \ldots$, με υ = 0 , 1 , 2 , 3. Τα κ , υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του ν με το 4.

4. Αν **z = α ± αi** , με **α∈IR** τότε: $\mathbf{z^2 = (\alpha \pm \alpha i)^2 = \pm 2\alpha^2 i}$, οπότε όλες οι δυνάμεις του z με άρτιο εκθέτη μπορούν να εκφραστούν πιο απλά, π.χ. $(\alpha+\alpha i)^{2004} = ((\alpha+\alpha i)^2)^{1002} = (2\alpha^2 i)^{1002} = -2^{1002}\cdot\alpha^{2004}$.
5. Προσοχή στην παραγοντοποίηση με το **i: α + βi = i(β – αi)** κι επειδή **|i| = 1,** ισχύει: **|α + βi| = |β – αi|.** Γενικότερα : **| (±α) ± βi| = |(±β) ± αi|.**
6. Η παράσταση $\alpha^2 + \beta^2$ στους μιγαδικούς γίνεται **διαφορά τετραγώνων**:
$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2-(i\beta)^2 = (\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta).$$
7. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με **<u>πραγματικούς συντελεστές</u>** που έχει ρίζα έναν μιγαδικό z_1 , έχει ρίζα και το συζυγή του $\bar{z}_1$ και αντιστρόφως.
8. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, με α,β,γ ∈IR, και **Δ<0** , έχει ρίζες **δύο συζυγείς μιγαδικούς** z_1 και z_2, με $z_1+z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.Οπότε αν z_1,z_2 ρίζες της εξίσωσης τότε:
$z_1+z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1) = 2\mathrm{Re}(z_2) = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2 = |z_1|^2=|z_2|^2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

9. Όταν έχουμε δεδομένο ή ζητούμενο ότι ένας μιγαδικός είναι πραγματικός ή φανταστικός πιθανότατα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις ισοδυναμίες:

- **z πραγματικός** ⇔ $z=\bar{z}$ ⇔ **Im(z) = 0**
- **z φανταστικός** ⇔ $z=-\bar{z}$ ⇔ **Re(z) = 0.**

(τεύχος 1, σελ. 24 και σελ. 57)

8. Να χρησιμοποιούμε το εξής : $|z|=\rho \Leftrightarrow z\bar{z}=\rho^2 \Leftrightarrow \dfrac{\rho^2}{z}=\bar{z} \Leftrightarrow \dfrac{\rho^2}{\bar{z}}=z$, ρ$\neq 0$.

   1. π.χ.: $|z|=1$ τότε: $\dfrac{1}{z}=\bar{z}$, $\dfrac{1}{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=1$.

9. Αν δυο μιγαδικές παραστάσεις είναι ίσες, τότε και οι *συζυγείς* παραστάσεις τους θα είναι ίσες. Αυτή η παρατήρηση, σε συνδυασμό με την προηγούμενη, μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε ισότητες με μέτρα μιγαδικών παραστάσεων. **(τεύχος 1, σελ. 55)**
10. Αν δίνεται εξίσωση της μορφής $z^{\mu} = (\bar{\mathbf{z}})^{\nu}$ με μ, ν ∈ Z^*, τότε παίρνουμε τα μέτρα των δύο μελών της σχέσης και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μέτρου βρίσκουμε το |z|. Τότε, έχοντας σχέση μεταξύ **z** και $\bar{\mathbf{z}}$, η αρχική εξίσωση λύνεται εύκολα **(τεύχος 1, σελ. 61)**
11. Σε εξισώσεις μιγαδικών συχνά χρειάζεται να βάλουμε μέτρα και στα δυο μέλη της αρχικής εξίσωσης. Η εξίσωση που προκύπτει **δεν είναι ισοδύναμη της αρχικής**, και γι’αυτό οι λύσεις που βρίσκουμε πρέπει να επαληθεύονται.
12. Δεν έχουν νόημα ανισώσεις μιγαδικών, εκτός αν αυτοί είναι πραγματικοί.
13. Ένα σημείο του επιπέδου Μ(χ , ψ) είναι ισοδύναμο με τον μιγαδικό z = χ+ψi και λέγεται εικόνα του z. Επίσης, το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM}$ = (χ,ψ) είναι ισοδύναμο με τον μιγαδικό z = χ+ψi.
14. Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι ***η απόσταση της εικόνας του από την αρχή των αξόνων. Η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς τους.***
15. Αν z ένας μιγαδικός τότε:
η εικόνα του –z είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς το Ο.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

η εικόνα του $\bar{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον χ΄χ.

η εικόνα του $-\bar{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον ψ΄ψ.

Οι εικόνες των z , -z , $\bar{z}$, $-\bar{z}$ ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων δηλαδή:

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

16. Η ιδιότητα |z| = | $\bar{z}$ | σε συνδυασμό με την ιδιότητα $\bar{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$, για z ≠ 0, μας επιτρέπουν να αποδείξουμε ισότητες/ανισότητες με μέτρα μιγαδικών. **(τεύχος 1, σελ. 51,53,55)**

17. Γενικά ισχύει: $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ **για κάθε** $z_1, z_2 \in C$. (Άσκ. Α9 σχολικό σελ.101). Σε ασκήσεις με δεδομένο π.χ. ότι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, η παραπάνω ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη *(θα πρέπει βέβαια να την αποδείξουμε πριν την χρησιμοποιήσουμε)*.

18. Αν Α η εικόνα του z_1 , Β η εικόνα του z_2 τότε:

- Η εξίσωση (ως προς z) : $|z - z_1| = \rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα ρ. Στην περίπτωση αυτή ο μιγαδικοί **z με το ελάχιστο , μέγιστο μέτρο** θα είναι οι μιγαδικοί που είναι **τα σημεία τομής** του κύκλου και της ευθείας ΟΑ.
- Η εξίσωση (ως προς z) : $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, με $|z_1 - z_2| < 2\alpha$, παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία Α, Β μήκος μεγάλου άξονα 2α.
- Η εξίσωση (ως προς z) : $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$, με $|z_1 - z_2| > 2\alpha$, παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία Α, Β απόσταση κορυφών 2α
- Η εξίσωση (ως προς z) : $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει την μεσοκάθετη ευθεία του ΑΒ.

Γενικά, θα πρέπει να ερμηνεύουμε μια παράσταση ή σχέση μέτρων γεωμετρικά, γνωρίζοντας ότι:

- το μέτρο ενός μιγαδικού z εκφράζει *την απόσταση της εικόνας του z από το Ο(0,0)* και
- το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών |z – w| εκφράζει *την απόσταση των εικόνων των z, w.*

19. Όταν αναζητούμε το μιγαδικό z ή το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z που ικανοποιεί κάποια συνθήκη, να μην κάνουμε αμέσως αντικατάσταση του z με χ+ψi , **αλλά να προχωράμε τις πράξεις οδηγώντας τη συνθήκη σε όσο πιο απλή μορφή γίνεται.**

20. Αν οι w = x + yi , z = κ + λi με x, y, κ, λ∈IR συνδέονται με κάποια σχέση και γνωρίζουμε τη γραμμή c στην οποία κινείται η εικόνα Ρ(κ, λ) του z τότε για να βρούμε τον γ.τ. των εικόνων Μ(x, y) του w θα βρίσκουμε τα κ, λ(*τα «γνωστά»*) συναρτήσει των x, y(*τα «άγνωστα»*). Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα κ, λ στην εξίσωση της c και βρίσκουμε σχέση ανάμεσα στα x, y που καθορίζουν τον γ.τ. των Μ(x, y). **(τεύχος 1, σελ 28 και σελ. 66).**

21. Για να βρούμε τους μιγαδικούς που έχουν μέγιστο ή ελάχιστο μέτρο εργαζόμαστε όπως περιγράφει το **θέμα 9 στη σελ. 70** του πρώτου τεύχους.

1. Ανάλυση

1. Προσέχουμε πάντα το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ή μιας συναρτησιακής σχέσης. Αν δεν δίνεται, η <u>*πρώτη μας δουλειά*</u> είναι να το βρούμε.

2. Για το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ ισχύει $D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$. Προφανώς, αν το σύνολο τιμών της $g(x)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της *f*, τότε το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

3. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $g(x)$ τότε κάνουμε την αντικατάσταση : $g(x) = y \Leftrightarrow x = ...$ και βρίσκουμε τον τύπο της f , αφού f(g(x)) = $f(y) = ...$

4. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $f(x)$ = ... τότε στην $f(x)$ = ... βάζουμε όπου *x* το $g(x)$. Εξισώνουμε τις δύο ισότητες $f(g(x)) = ...$ οι οποίες προκύπτουν και βρίσκουμε εύκολα την $g(x)$.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

5. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται πάντοτε σε κάποιο διάστημα ή ένωση διαστημάτων. **Προσοχή : *Αν f $\uparrow$ στο $Δ_1$ και f $\uparrow$ στο $Δ_2$, τότε δεν ισχύει απαραίτητα f $\uparrow$ στο $Δ_1 \cup Δ_2$.*** Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, χωρίς να αναφέρεται το σύνολο στο οποίο αυτό συμβαίνει, τότε θεωρείται ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

6. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog, είναι γνησίως αύξουσα. Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλ. η fog, είναι γνησίως φθίνουσα. (Αποδεικνύονται εύκολα με βάση τον ορισμό).

7. Μια συνάρτηση f ,**γνησίως μονότονη** στο [α,β], έχει **ελάχιστο** και **μέγιστο** στα άκρα του διαστήματος,

ανεξάρτητα απ'το αν είναι συνεχής ή όχι.

8. Αν μια συνάρτηση *f* είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε
- θα είναι και «1 – 1»,
- θα ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1},
- κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=k$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο πεδίο ορισμού της f,
- αν σε κάποιο $χ_o \in Δ$ μηδενίζεται, δηλ. *$f(x_o)=0$,* τότε στο σημείο αυτό θα αλλάζει πρόσημο. Βρίσκουμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.

9. Για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f να θυμόμαστε ότι:
- ορίζεται μόνο αν η f είναι «1-1»
- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f.
- Είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο τιμών της f *αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της*
- έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.
- έχει γραφική παράσταση συμμετρική της γρ. παράστασης της f ως προς την διχοτόμο $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία ψ = χ.

(Το $(χ_o, ψ_o)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f $\Leftrightarrow$ $f(χ_o)=ψ_o$ και εφόσον η f αντιστρέψιμη , $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(ψ_o)=χ_o$ $\Leftrightarrow$ το $(ψ_o, χ_o)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1})

- για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει μοναδικό x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

10. $f(f^{-1}(x))=x$ για κάθε *x* που ανήκει στο **<u>σύνολο τιμών της *f*</u>**

11. $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε *x* που ανήκει στο **<u>πεδίο ορισμού της *f*</u>**

12. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ψ = χ σε ένα σημείο τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ψ = χ στο ίδιο σημείο.

13. Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} θα τέμνονται **μόνο** πάνω στην ψ = χ όταν η f είναι γνησίως αύξουσα. **<u>Αυτό δεν ισχύει αν η *f* δεν είναι γνησίως αύξουσα.</u>**

14. Αν ένας αριθμός **κ ανήκει στο σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης f τότε η εξίσωση $f(x)=k$ θα έχει ρίζα στο πεδίο ορισμού της f ,δηλαδή **υπάρχει ένα τουλάχιστον $χ_o$** στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x_o)=k$.

15. Από την ισότητα $f(\alpha)=f(\beta)$ μπορούμε να συμπεράνουμε α = β , ***μόνο αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη στο σύνολο όπου ανήκουν τα α, β.*** (Το αντίστροφο, δηλαδή αν α = β, τότε $f(\alpha)=f(\beta)$ ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση f.)

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

16. Όταν μια συνάρτηση δεν είναι «1-1» τότε υπάρχουν α, β στο πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ ενώ α ≠ β. Αυτός είναι και ο πιο σύντομος τρόπος για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση *f* δεν είναι «1 – 1».

17. Αν $x_o \in$ IR, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ έχει νόημα μόνο όταν η *f* ορίζεται σε διάστημα της μορφής *(α, x_o)* ή *(x_o,β)* ή *(α, x_o) ∪ (x_o,β)*. Αν x_o = +∞ ή – ∞, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ έχει νόημα όταν η *f* ορίζεται σε διάστημα της μορφής *(α,+∞)* ή *(–∞,β)* αντίστοιχα.

18. Αν $x_o \in$ IR∪{–∞,+∞} και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ένας θετικός αριθμός ή +∞, τότε κοντά στο x_o οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι θετικές.

Αντίστοιχα, αν $x_o \in$ IR∪{–∞,+∞} και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ένας αρνητικός αριθμός ή –∞, τότε κοντά στο x_o οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι αρνητικές.

19. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και η συνάρτηση έχει τιμές , κοντά στο x_o , θετικές ή 0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$ (**προσοχή: μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ = 0 ακόμη και αν ισχύει $f(x)>0$ κοντά στο x_o**).

20. Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να ζητηθεί χωρίς να γνωρίζουμε τον τύπο της f αλλά κάποια συναρτησιακή σχέση που αληθεύει συνήθως για κάθε x,y∈IR. Τότε:

- Αν η σχέση[1] περιέχει την παράσταση **f(x + y)**, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να υπο-λογιστεί με την αντικατάσταση ***x = x*** ***$x = x_o + h$***. Αν ***$x \to x_o$***, τότε ***$h \to 0$***, οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_o+h)$ και έτσι αξιοποιούμε τη συναρτησιακή σχέση.

(Σημ.[1] : *Θυμηθείτε ότι σε τέτοιες περιπτώσεις για x = y = 0 βρίσκουμε το f(0)*)

- Αν η σχέση[2] περιέχει την παράσταση ***f(xy)***, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με την αντικατάσταση ***$x = x_o \cdot h$***. Αν ***$x \to x_o$***, τότε ***$h \to 1$***, οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{h\to 1} f(x_o \cdot h)$ και έτσι αξιοποιούμε τη συναρτησιακή σχέση.

(Σημ.[2] : *Θυμηθείτε ότι σε τέτοιες περιπτώσεις για x = y = 1 βρίσκουμε το f(1)*)

21. **Προσοχή!!!** Μπορούμε να γράφουμε

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

μόνο όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o.
Όταν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης , ασυνέχεια ενδεχομένως να έχουμε μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της. Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης, τα συμπεράσματά μας , για τη συνέχεια, θα προκύπτουν μόνο από τα δεδομένα. Μην ξεχνάμε ότι **εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο x_0 μόνο όταν $x_0 \in D_f$.**

22. Όταν μας δίνεται ένα όριο μιας παράστασης, που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και μας ζητείται ένα άλλο όριο μιας διαφορετικής παράστασης που περιέχει την $f(x)$, μπορούμε να θέτουμε ως συνάρτηση $g(x)$ την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριό της , κοντά στο x_o. Κατόπιν να λύνουμε , προσέχοντας τους περιορισμούς, ως προς $f(x)$ και τέλος να αντικαθιστούμε την $f(x)$ στην δεύτερη παράσταση. **Προσοχή!!!** Η συνάρτηση $g(x)$ δεν ορίζεται στο x_o ενώ το $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ ισούται με το όριο που μας δίνεται αρχικά.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

23. Αν γνωρίζουμε ότι $g(x) \le f(x)$ κοντά στο x_o και $\lim_{x \to x_o} g(x) = +\infty$ τότε θα πρέπει να ισχύει g(x) > 0 για x "κοντά" στο x_o. Άρα $0 < \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{g(x)}$, με $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{g(x)} = 0$, οπότε (κρ. Παρεμβολής) και $\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$. Όμως f(x) ≥ g(x) > 0, οπότε $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$.

Αντίστοιχα, αν γνωρίζουμε ότι $g(x) \le f(x)$ κοντά στο x_o και $\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$, τότε προκύπτει: $\lim_{x \to x_o} g(x) = -\infty$.

24. Προσοχή!!! **Δεν υπάρχουν** τα όρια $\lim_{x \to \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \to \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$. Σε περίπτωση που τα συναντάμε σε κάποια παράσταση χρησιμοποιούμε το Κ.Π. λαμβάνοντας υπόψιν μας τις ιδιότητες: $|\eta\mu x| \le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \le 1$, $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in$ IR (η ισότητα στην **τελευταία** ανίσωση ισχύει μόνο στο 0). Γενικά, να θυμόμαστε ότι:

- Αν $\alpha \in$ IR $\cup\{-\infty,+\infty\}$ και $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, τότε: $\lim_{x \to \alpha} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$ (η απόδειξη γίνεται με την αντικατάσταση u = f(x))
- Αν $\alpha \in$ IR $\cup\{-\infty,+\infty\}$ και $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε:

$\lim_{x \to \alpha} \frac{\eta\mu^{\kappa} f(x)}{x^{\lambda}} = \lim_{x \to \alpha} \frac{\sigma\upsilon\nu^{\kappa} f(x)}{x^{\lambda}} = 0$, όπου κ, λ ∈ N^* (η απόδειξη γίνεται με χρήση της ανίσωσης $\left|\frac{\eta\mu^{\kappa} f(x)}{x^{\lambda}}\right| \le \frac{1}{|x^{\lambda}|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x^{\lambda}|} \le \frac{\eta\mu^{\kappa} f(x)}{x^{\lambda}} \le \frac{1}{|x^{\lambda}|}$ και του κριτηρίου παρεμβολής).

- Για τις περιπτώσεις παραμετρικών ορίων στο $x_o \in$ IR$\cup\{-\infty,+\infty\}$ να μελετήσεις λυμένα παραδείγματα.

25. Όταν μας δίνεται ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y = αx + β τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$ (**ορισμός**) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ και } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$ (**πρόταση**).

Αντίστροφα, αν μας δοθεί ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y = αx + β.

Αν α = 0, ισχύουν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα για την οριζόντια ασύμπτωτη y = β.

Αντίστοιχα συμπεράσματα διατυπώνονται και στην περίπτωση που η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την y = αx + β.

26. Απροσδιόριστες μορφές ορίων έχουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

$(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\frac{0}{0}$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΙ : $\frac{0}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$.

Για τις μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ εφαρμόζουμε κανόνα de L' Hospital. Για τις υπολοιπες:

- **Μορφή 0($\pm\infty$):** Γράφουμε το γινόμενο f(x)g(x) στην μορφή $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ ή $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ οπότε προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

Μορφή (+∞) – (+∞) ή (–∞) – (–∞) : Αν έχουμε διαφορά κλασμάτων, τότε τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και καταλήγουμε στην μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Αλλιώς μετατρέπουμε τη διαφορά f(x)-g(x) στη μορφή $f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$ ή $g(x)\left[1-\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ οπότε αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$, προκύπτει η απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$ αλλιώς αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\neq 1$ το ζητούμενο όριο θα είναι $\pm\infty$.

- **Μορφές $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$:** Στην περίπτωση αυτή μετατρέπουμε τη μορφή $f(x)^{g(x)}$ στη μορφή $e^{g(x)\ln f(x)}$, αν f(x)>0, και το πρόβλημα μεταφέρεται στην εύρεση του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]$ που συνήθως καταλήγουμε στην μορφή $0(\pm\infty)$. *(Τέτοιες περιπτώσεις δεν εμφανίζονται πάντως στο σχολικό βιβλίο.)*

27. Αν σε κάποια συνάρτηση δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την τιμή της στο x_o ενδεχομένως να χρειάζεται να υπολογίσουμε το όριό της στο x_o. Αν έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o, τότε η τιμή της θα συμπίπτει με το όριό της. Αν f συνεχής στο x_o, τότε: $f(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$.

- Κάθε **συνεχής** και μη σταθερή συνάρτηση f στο [α , β] θα έχει **ελάχιστη και μέγιστη τιμή**. Προσοχή, ελέγχουμε πάντοτε για τοπικά ακρότατα και στα άκρα του διαστήματος. Για να είναι συνεχής η f στο [α,β] πρέπει να είναι συνεχής στο (α,β) και $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$.

28. Αν η f είναι **συνεχής** συνάρτηση στο [α , β], τότε παραστάσεις όπως : $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$, με $x_1, x_2, \ldots x_\nu\in$[α , β] ανήκουν στο σύνολο τιμών της f. (Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α,β], τότε ισχύει m ≤ $f(x_i)$ ≤ M , για κάθε $x_i\in$[α,β], i = 1,2,…ν, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη δείχνουμε ότι m ≤ $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$ ≤ M. Έτσι, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$).

29. Αν η f είναι **γνησίως μονότονη** και **συνεχής** σε διάστημα Δ, τότε μπορούμε να βρίσκουμε το **σύνολο τιμών** της, ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της:

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ **ΣΥΝΕΧΟΥΣ** f	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ f	ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f
(α,β)	Γν. αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to a^+}f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
[α,β]	Γν. αύξουσα	[f(α),f(β)]
[α,β)	Γν. αύξουσα	[f(α), $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$)
(α,β]	Γν. αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right.$, f(β))
(α,β)	Γν. φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x), \lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right)$
[α,β]	Γν. φθίνουσα	[f(β),f(α)]
[α,β)	Γν. φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right.$, f(α)]

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

(α,β]	Γν. φθίνουσα	[f(β), $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$)

30. Όταν μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)$ αλλά και το $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$, αφού η συνάρτηση θα είναι και συνεχής.

31. Όταν μας ζητείται η παράγωγος ***f ΄(x$_o$)*** και μας δίνεται συναρτησιακή σχέση που αληθεύει συνήθως για κάθε x,y∈IR. Τότε:

- Αν η σχέση περιέχει την παράσταση **f(x + y)**, τότε για να βρούμε την ***f ΄(x$_o$)*** είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ ώστε να αξιοποιήσουμε τη συναρτησιακή σχέση.
- Αν η σχέση περιέχει την παράσταση ***f(xy)***, τότε για να βρούμε την ***f ΄(x$_o$), με x$_o$ ≠ 0,*** είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ με την αντικατάσταση ***x = x$_o$·h***. Αν ***x→ x$_o$***, τότε ***h→ 1***, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_o\cdot h)-f(x_o)}{x_o\cdot h-x_o}$$ και έτσι αξιοποιούμε τη συναρτησιακή σχέση.

Παράδειγμα: Αν *f* παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε *x, y*∈IR* ισχύει *f(xy) = f(x) + f(y),* να αποδείξετε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη στο IR*.

Απάντηση: Για *x = y = 1* έχουμε : *f(1) = f(1)+ f(1)⇔f(1)= 0. Οπότε αν x$_o$*∈IR*, τότε*:*

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_o\cdot h)-f(x_o)}{x_o\cdot h-x_o}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_o)+f(h)-f(x_o)}{x_o(h-1)}=\frac{1}{x_o}\lim_{h\to 1}\frac{f(h)}{h-1}=\frac{1}{x_o}f'(1)$$

32. Μην ξεχνάμε ότι η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $f^{/}(x_o)$ και εξίσωση $y-f(x_o)=f^{/}(x_o)(x-x_o)$. Αν έχουμε άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_o,f(x_o))$. Αν δεν δίνεται ή δεν προκύ-πτει από κάποιο δεδομένο, ξεκινάμε υποθέτοντας έστω $(x_o,f(x_o))$ το σημείο στο οποίο εφάπτεται η ευθεία η οποία....».

33. Όταν σε άσκηση ζητείται ***κοινή εφαπτόμενη ευθεία (ε)*** των C_f, C_g, χωρίς να διευκρινίζεται αν η (ε) εφάπτεται στις C_f, C_g σε κοινό τους σημείο ή σε διαφορετικά σημεία, τότε:

- Για την περίπτωση κοινής εφαπτομένης σε κοινό σημείο λύνουμε το σύστημα :

$\begin{cases} f(x)=g(x)\\ x\in D_f\cap D_g\end{cases}$ και βρίσκουμε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των C_f, C_g. Αν Α(x_o,y_o) κοινό σημείο των C_f, C_g, τότε υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στο Α όταν ισχύει: $f'(x_o)=g'(x_o)$.

- Για την περίπτωση κοινής εφαπτομένης ***(ε)*** των C_f, C_g σε διαφορετικά σημεία, τότε

θεωρούμε Α$(x_1, f(x_1))$, Β$(x_2,g(x_2))$ τα σημεία επαφής της ***(ε)*** με τις C_f, C_g αντίστοιχα. Τότε : ***(ε)***:

$$y-f(x_1)=f^{/}(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f^{/}(x_1)\,x-x_1\cdot f^{/}(x_1)+f(x_1)$$

και ***(ε)***: $y-g(x_2)=g^{/}(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=g^{/}(x_2)\,x-x_2\cdot g^{/}(x_2)+g(x_2)$

οπότε πρέπει να ισχύουν:

$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2)\\ -x_1\cdot f'(x_1)+f(x_1)=-x_2\cdot g'(x_2)+g(x_2)\end{cases}$, απ'όπου υπολογίζουμε τα *x$_1$, x$_2$* και έτσι βρίσκουμε την ζητούμενη εξίσωση της ***(ε)***.

34. Για την εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας μιάς συνάρτησης f ακολουθούμε την εξής πορεία:

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

ι)βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
ιι)εξετάζουμε την f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
ιιι)βρίσκουμε, αν υπάρχουν ρίζες της f΄.
ιν)κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f΄
Στον πίνακα αυτόν θα πρέπει να υπάρχουν:

- οι τιμές που η f δεν ορίζεται,
- οι τιμές που η f δεν παραγωγίζεται,
- οι ρίζες της f΄,
- τα άκρα του πεδίου ορισμού της f (αν αυτό είναι κλειστό),
- το πρόσημο της f΄.

35. Αν f,g παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ και ισχύει *f(x) > g(x)*, για κάθε *x*∈Δ, τότε **<u>δεν συνεπάγεται</u>** *f΄(x) > g΄(x)* και αντιστρόφως αν ισχύει *f΄(x) > g΄(x)*, για κάθε *x*∈Δ, τότε **<u>δεν συνεπάγεται</u>** *f(x)>g(x).* Αν μας δοθεί όμως μία σχέση της μορφής *f΄(x)>g΄(x)* ή *f΄(x)<g΄(x),* για κάθε x∈Δ, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση h(x)= f(x)-g(x) η οποία προφανώς θα είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

36. **Ρίζες εξισώσεων:** *Στις ασκήσεις Ανάλυσης που αναφέρονται σε ρίζες εξισώσεων συνήθως ζητείται κάποιο από τα παρακάτω ερωτήματα :*

Α. Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας κάποιας εξίσωσης: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή *f(x) = 0* και

- Ελέγχουμε αν υπάρχουν προφανείς λύσεις, ή λύσεις που προκύπτουν άμεσα από τα δεδομένα, ή
- Εφαρμόζουμε ***θεώρημα Bolzano*** ή ***θεώρημα ενδιάμεσων τιμών*** σε κατάλληλο διάστημα ή
- Βρίσκουμε το ***σύνολο τιμών της f*** απ'όπου προκύπτει η ύπαρξη ρίζας , ή
- Εφαρμόζουμε ***θεώρημα Rolle ή Θ.Μ.Τ.*** σε κατάλληλο διάστημα για μια παράγουσα της f , ή
- Εφαρμόζουμε ***θεώρημα Fermat***, εφόσον διαπιστώνουμε την ύπαρξη ακρότατου για την παράγουσα της *f*.

Β. Ύπαρξη το πολύ 1 ρίζας κάποιας εξίσωσης : Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή *f(x) = 0* και

- υποθέτουμε ότι έχει δύο ρίζες και με το Θ. Rolle καταλήγουμε σε άτοπο, ή
- δείχνουμε ότι η f είναι γν. μονότονη ή «1-1» οπότε δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες.

Γ. Ύπαρξη ν τουλάχιστον ριζών κάποιας εξίσωσης: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή *f(x) = 0* και

- χωρίζουμε το πεδίο ορισμού της f σε ν υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε σε κάθε διάστημα έναν από τους τρόπους της ενότητας Α. Η επιλογή των διαστημάτων γίνεται με την βοήθεια των σημείων αλλαγής της μονοτονίας ή των σημείων ασυνέχειας της f.

Δ. Ύπαρξη το πολύ ν ριζών μιας εξίσωσης: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή *f(x) = 0* και δείχνουμε ότι *αποκλείεται να έχει ν+1 ρίζες*. Αυτό μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ν + 1 το πλήθος ρίζες και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στα ν διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών ριζών της f. Αν δεν καταλήγουμε έτσι σε άτοπο, εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στα ν-1 διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών ριζών της f ΄, ή ακόμη και στα ν-2 διαστήματα για την f΄΄ κ.ο.κ έως ότου καταλήξουμε σε άτοπο, ή
- Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από ν υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

Σημείωση: Αν η f είναι πολυωνυμική βαθμού ν , τότε το συμπέρασμα ισχύει προφανώς.

Ε. Ύπαρξη ακριβώς ν ριζών κάποιας εξίσωσης: Η περίπτωση αυτή είναι συνδυασμός των δυο προηγουμένων **(Γ , Δ).**

ΣΤ. Εύρεση πλήθους ριζών εξίσωσης: Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή *f(x) = 0* και βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f. Τότε:

- Από το σύνολο τιμών σε κάθε υποδιάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη προκύπτει η ύπαρξη ρίζας ή το αντίθετο, ή
- ελέγχουμε σε κάθε υποδιάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη την ύπαρξη ρίζας βρίσκοντας το αντίστοιχο σύνολο τιμών ή με το Θ. Bolzano.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

37. i) Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση, στην οποία υπάρχει έκφραση παραγώγου *f΄(ξ)* ,συνήθως εφαρμόζουμε το Θ. Rolle σε βοηθητική συνάρτηση στο (α,β).
Για την επιλογή μερικών τέτοιων συναρτήσεων δείτε το διπλανό πίνακα
ii) Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\ldots \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ικανοποιούν μια συναρτησιακή σχέση, στην οποία υπάρ-χουν εκφράσεις των παραγώγων *f΄*(ξ_1), *f΄*(ξ_2),… εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f σε κατάλληλα υποδιαστήματα του (α,β). Το πλήθος των υποδιαστημάτων είναι το ίδιο με το πλήθος των ξ_i που αναζητούμε και η επιλογή τους γίνεται με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Ζητούμενη σχέση	**Βοηθητική συνάρτηση**
$f'(\xi) = c$	$g(x) = f(x) - cx$
$f'(\xi) = c\cdot f(\xi)$	$g(x) = e^{-cx}\cdot f(x)$
$f'(\xi)(\xi - c) = f(\xi)$	$g(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$
$f'(\xi)\cdot(c - \xi) = f(\xi)$	$g(x) = (x - c)\cdot f(x)$
$f'(\xi) = \nu\cdot\xi^{\nu-1}$	$g(x) = f(x) - x^{\nu}$
$\xi\cdot f'(\xi) = \nu\cdot f(\xi)$	$g(x) = \dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$
$f'(\xi)\cdot\ln\xi = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$	$g(x) = \dfrac{f(x)}{\ln x}$

38. Πρόσημο συνάρτησης ή παραγώγων της - Απόδειξη ανισώσεων.

- **Επίλυση ανίσωσης:** Μπορεί το πρόσημο να προκύπτει άμεσα από την επίλυση μιας εύκολης ανίσωσης ή από τα δεδομένα της άσκησης. **Μην ξεχνάμε το πρόσημο ενός τριωνύμου**.
- **Χρήση μονοτονίας:** Μετασχηματίζουμε την ανίσωση στη μορφή *f(x)>0* ή *f(x)<0* και μελετάμε τη μονοτονία της *f*. Αν η *f* είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ και σε κάποιο $x_o \in \Delta$ μηδενίζεται, τότε στο σημείο αυτό αλλάζει πρόσημο.

  Παράδειγμα: Αν f γνησίως αύξουσα στο IR και $f(x_o)=0$ τότε:

  για κάθε $x \in (-\infty, x_o)$ ισχύει: $x < x_o \Leftrightarrow f(x) < f(x_o) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και

  για κάθε $x \in (x_o, +\infty)$ ισχύει: $x > x_o \Leftrightarrow f(x) > f(x_o) \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- **Χρήση Bolzano:** Αν η συνάρτηση f είναι <u>συνεχής σε ένα διάστημα Δ</u> και ισχύει ότι **f(x) ≠ 0, για κάθε x∈Δ,** τότε θα διατηρεί <u>σταθερό πρόσημο στο διάστημα</u> αυτό. Το πρόσημό της μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, διαφορετικά απλά διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- **Χρήση Θ.Μ.Τ. : Αν η f ΄ είναι γν. μονότονη**, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα για την απόδειξη ανισοτήτων.

Παράδειγμα: Αν η f κυρτή στο IR και $f(0)=0$, να δείξετε ότι :

$$f(x) - xf'(x) < 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Απάντηση: Αν *x* > 0 στο διάστημα [*0, x*] ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την *f* οπότε υπάρχει x_o μεταξύ του *0* και του *x* ώστε: $f'(x_o) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f', η οποία είναι γνησίως αύξουσα (αφού f κυρτή στο IR), ως εξής:

$0 < x_o < x$ άρα: $f'(0) < f'(x_o) < f'(x) \Leftrightarrow f'(0) < \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$$f(x) < x\cdot f'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

- **Χρήση ακροτάτων:** Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή έναν αριθμό α τότε όλες οι τιμές της θα είναι μεγαλύτερες από τον αριθμό αυτό, δηλαδή ***f(x)*≥ α , για κάθε *x*∈D_f.** Αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή έναν αριθμό α τότε όλες οι τιμές της θα είναι μικρότερες από τον αριθμό αυτό, δηλαδή ***f(x)*≤ α , για κάθε *x*∈D_f.**
- **Χρήση κυρτότητας:** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και Α$(x_o, f(x_o))$ ένα τυχαίο σημείο της με $x_o \in \Delta$ τότε η γραφική της παράσταση της f βρίσκεται πιο πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο Α. Αυτό είναι ισοδύ-
  ναμο με την ανίσωση: $f(x) \geq y$ για κάθε x ε Δ, με $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

Δηλαδή: $f(x) \geq f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x∈Δ, και η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x=x_o$.

Ομοίως αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ: $f(x) \leq f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x∈Δ, και η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x = x_o$.

Παραδείγματα: $e^x \geq x + 1$, για x∈IR ή $\ln x \leq x - 1$ για $x > 0$ (καλό είναι να θυμόμαστε αυτές τις ανισώσεις).

- **Το πρόσημο του ορίου:** Προσοχή!!! Αυτό δίνει το πρόσημο της συνάρτησης **μόνο κοντά στο x_o.**
- **Χρήση συνόλου τιμών:** Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μας δείχνει ακριβώς ποιες είναι οι τιμές της συνάρτησης οπότε ενδεχομένως να προκύπτει και το πρόσημό της.
- **Η ανισότητα του ορισμένου ολοκληρώματος:** Χρησιμοποιείται όταν έχουμε ορισμένο ολοκλήρωμα σε ένα διάστημα [α , β] ή σε διάστημα [α , *x*] με *x* > α.

  Αν f συνεχής στο [α,β] και $f(x) \geq 0$ *για κάθε x∈[α , β], τότε* $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$*.Αν όμως υπάρχει* x_o*∈[α , β] για το οποίο ισχύει* $f(x_0) > 0$, *τότε* $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$. Αυτή η ιδιότητα, σε συνδυασμό με την ύπαρξη ακροτάτου για την f μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε ανισώσεις.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι: $\int_1^x e^{t^2} dt \geq x - 1$.

Απάντηση: Η f(t) = e^{t^2} , t∈IR είναι παραγωγίσιμη στο IR με f ΄(t) = 2te^{t^2} . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: f ΄(t) = 0 ⇔ t = 0 και f ΄(t) > 0 ⇔ t > 0, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο t = 0, το f(0) = 1. Οπότε ισχύει : f(t) ≥ 1⇔ f(t) – 1 ≥ 0 , για κάθε t∈IR. Με τη βοήθεια της ανισότητας του ορισμένου ολοκληρώματος στο διάστημα [1, *x*], όπου *x* > 1, έχουμε :

$$\int_1^x [f(t) - 1]dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x 1dt \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2} dt \geq x - 1.$$

Γενικά, να θυμόμαστε ότι:

Αν f συνεχής στο [α,β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α,β]αντί-στοιχα, τότε ισχύει:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$$

39. Χρήση ανισότητων:

Όταν **μας δίνεται μια ανισότητα** η οποία αληθεύει για κάθε τιμή της μεταβλητής που περιέχει τότε:

- Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη ότι μια συνάρτηση έχει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο *(είναι εκείνη η τιμή του x για την οποία η δοσμένη ανισότητα αληθεύει ως ισότητα)* ενός διαστήματος στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη οπότε εφαρμόζουμε θεώρημα **FERMAT**.
- Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό ορίου με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής.
- Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με την ιδιότητα των ορίων: Αν οι συναρτήσεις f, g κοντά στο x_o είναι άνισες και τα όρια των f, g στο x_o υπάρχουν και είναι αριθμοί, τότε και τα όριά τους θα είναι ομοιοτρόπως άνισα.
- Η ανισότητα μπορεί να δίνεται για να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιου ζητούμενου, π.χ. το πρόσημο μιας παραγώγου, την εύρεση μιας άλλης ανισότητας, την τιμή κάποιας παραμέτρου κ. α.

40. Για να βρούμε τιμές παραμέτρων ώστε

i. η συνάρτηση f να είναι γν. μονότονη σε διάστημα Δ:

Η *f* που μας δίνεται είναι κατά κανόνα συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Βρίσκουμε την παράγωγο *f΄(x)* και μελετάμε το πρόσημο της *f΄(x)* για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, οπότε βρίσκουμε τις ζητούμενες.

ii. η συνάρτηση f να εμφανίζει τοπικό ακρότατο στο x_o στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη:

Παίρνουμε τη σχέση *f΄(x_o)=0*, η οποία είναι αναγκαία λόγω του θεωρήματος Fermat, αλλά όχι και ικανή. Γι'αυτό, με τις τιμές των παραμέτρων που ικανοποιούν την *f΄(x_o)=0* φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών των *f, f΄* και επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη του τοπικού ακρότατου.

iii. η συνάρτηση f να είναι κυρτή(αντ. κοίλη) σε διάστημα Δ:

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

Η f που μας δίνεται είναι κατά κανόνα συνεχής στο Δ και 2 φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Βρίσκουμε την παράγωγο $f''(x)$ και μελετάμε το πρόσημο της $f''(x)$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, οπότε βρίσκουμε τις ζητούμενες.

iv. η C_f να εμφανίζει σημείο καμπής στο x_o, στο οποίο η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη:
Παίρνουμε τη σχέση $f''(x_o)=0$, η οποία είναι αναγκαία λόγω γνωστού θεωρήματος, αλλά όχι και ικανή. Γι'αυτό, με τις τιμές των παραμέτρων που ικανοποιούν την $f''(x_o)=0$ φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών των f, f'' και επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη του σημείου καμπής.

41. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατο σε ανοικτό διάστημα (α,β):

- ελέγχουμε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) οπότε το συμπέρασμα ισχύει προφανώς, ή
- υποθέτουμε ότι έχουμε ακρότατο στο $x_o \in (\alpha , \beta)$ στο οποίο η f είναι παραγω-γίσιμη, οπότε από θεώρημα Fermat θα ισχύει $f^{/}(x_o) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

42. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημείο καμπής σε ανοικτό διάστημα (α,β):

- ελέγχουμε αν η f ΄ είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) οπότε το συμπέρασμα ισχύει προφανώς, ή
- υποθέτουμε ότι έχουμε σημείο καμπής στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο υπάρχει η $f''(x_o)$, οπότε από γνωστό θεώρημα θα ισχύει $f''(x_o)= 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

43. Σταθερές συναρτήσεις:

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι **μια συνεχής συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ**, προσπαθούμε να αποδείξουμε **ότι έχει παράγωγο ίση με 0 στο *εσωτερικό του Δ***.
- Αν θέλουμε να δείξουμε ότι **δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g είναι ίσες σε ένα διάστημα Δ**, δείχνουμε ότι **η διαφορά τους f – g έχει παράγωγο ίση με το 0 στο εσωτερικό του Δ**, οπότε f(x) – g(x) = c. Κατόπιν δείχνουμε ότι c = 0.

44. Εύρεση τύπου:

Όταν μας δίνεται μια συναρτησιακή σχέση που περιέχει κάποιες από τις $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ κλπ. και ζητάμε τον τύπο της f, προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τη συναρτησιακή σχέση είτε σε ισότητα παραγώγου με το 0 είτε σε ισότητα παραγώγων, και χρησιμοποιούμε τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. Μερικά παραδείγματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δεδομένη σχέση	Ισότητα παραγώγου με 0
1. $f'(x) = c$	**1.** $[f(x) - cx]' = 0$.
2. $f'(x) = c\cdot f(x)$	**2.** $[e^{-cx}\cdot f(x)]' = 0$.
3. $f'(x)(x - c) = f(x)$	**3.** $\left[\dfrac{f(x)}{x-c}\right]' = 0$.
4. $f'(x)\cdot(c - x) = f(x)$	**4.** $[(x - c)\cdot f(x)]' = 0$.
5. $f'(x) = \nu\cdot x^{\nu-1}$	**5.** $[f(x) - x^{\nu}]' = 0$.
6. $x\cdot f'(x) = \nu\cdot f(x)$	**6.** $\left[\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}\right]' = 0$.
7. $f'(x)\cdot \ln x = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$	**7.** $\left[\dfrac{f(x)}{\ln x}\right]' = 0$.

Αν δυσκολευόμαστε πάρα πολύ:

- Οδηγούμε τη σχέση στη μορφή: **$f'(x) + g(x)f(x) = 0$. (1)**

Αν G μια παράγουσα της g, τότε πολλαπλασιάζουμε την (1) με $e^{G(x)}$ οπότε:

$$e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}g(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow [e^{G(x)} f(x)]' = 0.$$

- Εξετάζουμε αν εμφανίζεται ισότητα της μορφής: **$f'(x) = f(x)$,** οπότε από γνωστή εφαρμογή προκύπτει ότι **$f(x) = c\cdot e^x$.**

45. Αν F μία **αρχική** μιας συνάρτησης f σ'ένα διάστημα Δ, τότε **η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο Δ *άρα για την F εφαρμόζονται τα βασικά θεωρήματα των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.*** *(π.χ. αν εργαζόμαστε με περίπλοκες συνθήκες που περιέχουν κάποιες από τις f, f'' και*

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

$\int_a^x f(t)dt$ είναι προτιμότερο να τις εκφράζουμε όλες μέσω της F ώστε να επιλέγουμε ευκολότερα το κατάλληλο θεώρημα.)

46. Για τον υπολογισμό ενός αόριστου ολοκληρώματος είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι:

i) $\int \boldsymbol{f'(x)dx} = f(x) + c$.

ii) Να βάζουμε το … + c στο τέλος του υπολογισμού του!

iii) **A.** Ολοκληρώματα της μορφής:

$\int \boldsymbol{e^{\alpha x+\beta}} P(x)dx$ ή $\int \boldsymbol{\eta\mu(\alpha x+\beta)} P(x)dx$ ή $\int \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)} P(x)dx$ ή $\int ln(\alpha x+\beta)\boldsymbol{P(x)}dx$ ή $\int \eta\mu(\alpha x+\beta)\boldsymbol{e^{\kappa x+\lambda}}dx$ ή $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\boldsymbol{e^{\kappa x+\lambda}}dx$ όπου P(x) πολυώνυμο, υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση στη συνάρτηση με έντονο χρώμα. Γενικά, αν παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα υπάρχει παράσταση της μορφής $f^{/}(x)g(x)$ τότε μάλλον χρειάζεται να κάνουμε ***ολοκλήρωση κατά παράγοντες***.

B. Η εφαρμογή παραγοντικής ολοκλήρωσης μια ή περισσότερες φορές στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος I μπορεί να εμφανίσει ξανά το αρχικό ολοκλήρωμα I. Δηλαδή, προκύπτει μια σχέση της μορφής : I = A(x) + κ ·I, με κ ≠ 1. Λύνουμε αυτή τη σχέση ως προς I οπότε: I = $\frac{1}{1-\kappa}$·A(x) + c.(Σ'αυτή την κατηγορία ανήκουν τα ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu(\alpha x+\beta)\boldsymbol{e^{\kappa x+\lambda}}dx$, $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\boldsymbol{e^{\kappa x+\lambda}}dx$ *κ.α.)*

Γ. Αν I_ν ένα αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης στην οποία εμφανίζεται ο φυσικός ν, και ζητείται να αποδείξουμε μια σχέση που συνδέει τα I_ν, $I_{\nu-1}$, $I_{\nu-2}$ κλπ. *(αναγωγικός τύπος)*, τότε χρησιμοποιούμε, κατά κανόνα, ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

iv) Σε ειδικές περιπτώσεις χρειάζεται η διάσπαση ενός ολοκληρώματος I σε δυο μέρη και η εφαρμογή, στο ένα από αυτά, της παραγοντικής ολοκλήρωσης (μία ή και περισσότερες φορές). Τότε εμφανίζονται δυο αντίθετα ολοκληρώματα οπότε ο υπολογισμός του I έχει επιτευχθεί. (τεύχος 2 σελ 434)

v) **A.** Αν παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα **υπάρχει μια συνάρτηση *φ(x)* και η παράγωγός της *φ΄(x)*,** τότε μάλλον χρειάζεται να κάνουμε την **αντικατάσταση *φ(x) = t* .**

Να μην ξεχνάμε όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης, π.χ. ***φ(x) = t*** *, στο τέλος να επαναφέρουμε το φ(x) στη θέση του t!*

B. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δύσκολη η απ'ευθείας εύρεση της κατάλληλης αντικατάστασης. *Σε τέτοιες περιπτώσεις αναζητούμε έναν όρο φ(x) της συνάρτησης μέσα στο ολοκλήρωμα και*

- *αν* ***η εξίσωση φ(x) = t λύνεται ως προς x,*** τότε θέτουμε *φ(x) = t* και προκύπτει ότι : *x = g(t)* και *dx = g΄(t)dt, όπου g η αντίστροφη συνάρτηση της φ.*
- *αν* ***η εξίσωση φ(x) = t δεν λύνεται ως προς x,*** τότε γράφουμε *dt = φ΄(x)dx* και εκμεταλλευόμαστε τη σχέση που προκύπτει (τεύχος 2, σελ 435)

vi) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης I = $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, και ο βαθμός του P(x) είναι μικρότερος του βαθμού του Q(x), τότε:

- Αν το P(x) μπορεί να πάρει τη μορφή P(x) = αQ΄(x), έχουμε:

  I = $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ = $\int \frac{\alpha\cdot Q'(x)}{Q(x)}dx$ = *ln|Q(x)| + c.*
- Αν το P(x) δεν μπορεί να πάρει την παραπάνω μορφή, τότε παραγοντοποιούμε το Q(x) και αναλύουμε το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα κλασμάτων ως εξής:

Σε κάθε παράγοντα του Q(x) της μορφής (αx + β) αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{A}{\alpha x+\beta}$

(επίσης, σε κάθε παράγοντα του Q(x) της μορφής $(x-\rho)^\nu$ αντιστοιχεί το άθροισμα

$\frac{A_1}{x-\rho}$ + + $\frac{A_2}{(x-\rho)^2}$ + … + $\frac{A_\nu}{(x-\rho)^\nu}$, ενώ σε κάθε παράγοντα του Q(x) της μορφής ($\alpha x^2 + \beta x + \gamma$), με Δ < 0, αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, αλλά αυτές οι περιπτώσεις <u>*δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο*</u>), οπότε προσδιορίζουμε τους συντελεστές A_i από την ισότητα : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{A_2}{\alpha_2 x+\beta_2} + \ldots + \frac{A_\kappa}{\alpha_\kappa x+\beta_\kappa}$.

Τότε θα ισχύει: I = $\int \frac{A_1}{\alpha_1 x+\beta_1}dx + \int \frac{A_2}{\alpha_2 x+\beta_2}dx + \ldots + \int \frac{A_\kappa}{\alpha_\kappa x+\beta_\kappa}dx = \ldots$

vi) Στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με τριγωνομετρικές παραστάσεις πρέπει να θυμόμαστε τα εξής:

- Αν υπάρχει περιττή δύναμη του ημx, τότε γράφουμε: $\eta\mu^{2\nu+1}x = \eta\mu^{2\nu}x\cdot\eta\mu x = (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^\nu\cdot\eta\mu x$ και θέτουμε *t = συνx.*
- Αν υπάρχει περιττή δύναμη του συνx, τότε γράφουμε: $\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x = \sigma\upsilon\nu^{2\nu}x\cdot\sigma\upsilon\nu x = (1-\eta\mu^2 x)^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και θέτουμε *t = ημx.*
- Αν όλες οι δυνάμεις του ημx και του συνx είναι άρτιες, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού: $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$.

47. Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ της <u>**ΣΥΝΕΧΟΥΣ**</u> συνάρτησης *f* είναι **ο** <u>**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ**</u> $F(\beta)-F(\alpha)$, όπου *F* παράγουσα της *f* στο (α,β).

48. Για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι:

i) $\int_\alpha^\beta f'(x)dx = f(\beta)-f(a)$

ii) Ο υπολογισμός ενός ορισμένου ολοκληρώματος διαφέρει του υπολογισμού ενός αόριστου ολοκληρώματος στα εξής:

- Δεν βάζουμε το … + c στο τέλος του υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης όταν κάνουμε αντικατάσταση.
- Αν χρησιμοποιήσουμε αντικατάσταση, δεν χρειάζεται να επιστρέψουμε στην αρχική μεταβλητή.

iii) Οι μέθοδοι **2**iii),…, **2**vi) που αναφέρθηκαν παραπάνω εφαρμόζονται και στα ορισμένα ολοκληρώματα.

iv) Μια σημαντική αντικατάσταση που μας διευκολύνει πολλές φορές στον υπολογισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι η: ***t = α + β – x.*** Τότε ισχύει dt = – dx και τα καινούρια όρια ολοκλήρωσης φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

x	*α*	*β*
t	*β*	*α*

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(a+\beta-x)dx$$

Η παράσταση *f(α + β – x)* δημιουργεί νέες δυνατότητες μέσα στο ολοκλήρωμα που συνήθως οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

vi) ***Αν σε άσκηση μας δίνεται ή έχουμε αποδείξει κάποια συναρτησιακή σχέση, πιθανότατα ο υπολογισμός ολοκληρώματος θα γίνεται με βάση αυτή τη σχέση***. ***(Δες παλαιότερα θέματα Πανελλαδικών).***

49. Ισχύουν:

i. Αν ***f άρτια***, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{2}\int_0^\alpha \mathbf{f(x)dx}$ («σπάμε» το αρχικό ολοκλήρωμα στο 0 και θέτουμε στο πρώτο x = -t.)

ii. Αν ***f περιττή***, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{0}$ (θέτουμε x = - t).

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

50. Για το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma}^{\delta} \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ της αντίστροφης συνάρτησης μιας παραγωγίσιμης και 1-1 συνάρτησης f θέτουμε **x = f(u)** οπότε: **u = f** $^{-1}$**(x), dx = f ΄(u)du.** Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης προκύπτουν από τις σχέσεις:

f(u) = γ ⇔ u = f $^{-1}$**(γ) και f(u) = δ ⇔ u = f** $^{-1}$**(δ).**

Αν το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma}^{\delta} \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ παριστάνει εμβαδόν (δηλ. $f^{-1}(x) \geq 0$ για $x \in (\gamma, \delta)$), μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία των C_f , C_f^{-1} ως προς την **y = x**. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των C_f , C_f^{-1} σ'αυτή την περίπτωση είναι επιβεβλημένη.

51. Αν δίνεται ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ = κ, με κ∈R, τότε μπορούμε να γράφουμε F(β) = κ, όπου F παράγουσα της f στο [α,β].

52. Η ισότητα $f(\beta) - f(a) = \int_{a}^{\beta} f^{/}(x)dx$ είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό **τιμών** της συνάρτησης f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f, οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{\beta} f^{/}(x)dx$.

Αντίστοιχα, η ισότητα $f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} f^{/}(t)dt$ είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό **της συνάρτησης** f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f και η τιμή της $f(a)$ οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{x} f^{/}(t)dt$.

53. Για την *συνάρτηση F(x)* = $\int_{a}^{x} f(t)dt$ πρέπει να θυμόμαστε πάντοτε ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού **το διάστημα** στο οποίο *η f(t) ορίζεται, είναι συνεχής και ανήκει το α* ,
- είναι **παράγουσα** της συνεχούς $f(t)$, δηλαδή ισχύει: *F΄(x)* = $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)^{/} = f(x)$.

54. Για να βρούμε το π**εδίο ορισμού** , (όταν αυτό μας ζητείται ή δεν δίνεται), μιας συνάρτησης της μορφής *F(x)*= $\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x) f(t)dt$, όπου f συνεχής σε ένωση διαστημάτων $\Delta_1 \cup \Delta_2$ θα **πρέπει να τεθούν οι εξής περιορισμοί για το** *x*:

- το *x* να ανήκει στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$,
- το *x* να ανήκει στα πεδία ορισμού των ϕ, h, g και
- Τα $h(x), g(x)$ να ανήκουν **και τα δύο στο** Δ_1 **ή και τα δύο στο** Δ_2.

55. Αν θέλουμε να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση *F(x)*= $\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x) f(t)dt$ επιλέγουμε σταθερό αριθμό α ο οποίος απαραίτητα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της F οπότε ο τύπος της f παιρνει τη μορφή:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x) f(t)dt = \phi(x)\left(\int_{\alpha}^{h(x)} f(t)dt - \int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right) \text{ και}$$

$$F'(x) = \phi'(x)\left(\int_{\alpha}^{h(x)} f(t)dt - \int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right) + \varphi(x)[f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)]$$

56. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{a}^{\beta} f(x+t)dt$ (ή $\int_{a}^{\beta} f(xt)dt$ ή $\int_{a}^{\beta} f\left(\frac{t}{x}\right)dt$ κ.α.) είναι **<u>συναρτήσεις του x</u>**. Σε τέτοια ολοκληρώματα *<u>πρέπει να αποδεσμεύουμε τη μεταβλητή x από τη συνάρτηση f μέσα στο ολοκλήρωμα</u>* και γι'αυτό κάνουμε αντικατάσταση στην παράσταση εντός της *f*. Δηλαδή θέτουμε *y = x + t* (ή *y = xt* ή *y* = $\frac{t}{x}$ αντίστοιχα), οπότε : $\int_{a}^{\beta} f(x+t)dt = \int_{a+x}^{\beta+x} f(y)dy$.

57. Αν μας δίνεται ισότητα στην οποία εμφανίζεται ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και ζητείται η εύρεση της f, τότε εξασφαλίζουμε την παραγωγισιμότητα των 2 μελών της ισότητας και

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com

παραγωγίζουμε κατά μέλη(φροντίζουμε να μην υπάρχει γινόμενο g(x)$\cdot\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, ώστε η παραγώγιση να «εξαφανίσει» το $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$).

58. Σε ασκήσεις που θα πρέπει να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων με ολοκληρώματα τότε:

i)σε όρια της μορφής L=$\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ή L=$\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\varphi(x)}^{\omega(x)} f(t)dt$ χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης ή παρεμβολής.

ii) σε όρια που οδηγούν στη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ χρησιμοποιούμε κανόνες de L' Hospital.

59. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

- Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε για το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα των x και τις ευθείες x=α, x=β ισχύει Ε(Ω)=$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.Στην περίπτωση που ισχύει f(x)≥ 0 (αντίστοιχα f(x)≤ 0) για κάθε x$\in$[α,β], έχουμε Ε(Ω)=$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (αντίστοιχα Ε(Α)=-$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$).
- Αν δίνεται μια μόνο ευθεία π.χ η x = α, τότε η άλλη θα είναι η x = ρ, όπου ρ θα είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0.
- Στην περίπτωση που δεν έχουμε καμία ευθεία ,αλλά η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον (αλλά πεπερασμένου πλήθους) πραγματικές ρίζες, τότε το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τον άξονα των x θα δίνεται από την σχέση Ε(Ω)=$\int_{x_1}^{x_\nu} |f(x)|dx$, όπου x_1,x_ν είναι η μικρότερη και η μεγα-λύτερη ρίζα της f(x)=0.
- Αν η f,g είναι συνεχείς στο [α,β], τότε για το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, Cg και τις ευθείες x = α, x = β, Ε(Ω)=$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)-g(x)|dx$. *(Στην περίπτωση αυτή δεν μας ενδιαφέρει η σχέση κάθεμιάς των C_f,Cg με τον άξονα των x , αλλά μόνο η μεταξύ τους θέση στο [α,β]).*
- Στην περίπτωση που δεν έχουμε καμία ευθεία ,αλλά η εξίσωση f(x)=g(x) έχει δύο τουλάχιστον αλλά πεπερασμένου πλήθους πραγματικές ρίζες, τότε το εμβα-δόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f ,C_g θα δίνεται από την σχέση Ε(Ω) = $\int_{x_1}^{x_\nu} |f(x)-g(x)|dx$, όπου x_1,x_ν είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα της f(x) = g(x).
- Αν ζητείται να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις **3 συνεχών συναρτήσεων** (συχνά ζητείται το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ *x΄x*, C_f , και εφαπτομένης της C_f σε δεδομένο σημείο (x_o, $f(x_o)$), τότε κατασκευάζουμε ακριβές σχήμα. Οι κορυφές του χωρίου μας οδηγούν στο να χωρίσουμε το χωρίο σε μικρότερες περιοχές, οπότε με προσθέσεις ή αφαιρέσεις αυτών θα φθάνουμε στο ζητούμενο.

Γαμβρέλλης Αργύρης
gamvrellis@gmail.com