ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

σχολικό σελ

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

σχολικό σελ

Μονάδες 6

Α3

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης. → Λ

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. → Σ

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς. → Λ

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \cdots$

β. $(f(g(x)))' = \cdots$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:

25, 10, 5, 20, 15.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15 \quad \text{και} \quad R = 25-5 = 20$$

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 7

$$s^2 = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{100 + 25 + 100 + 25 + 0}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

άρα $s = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Β3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{10} \iff \frac{2}{9} > \frac{1}{100} \quad \text{ισχύει}$$

άρα δεν είναι ομοιογενές $\quad CV\% > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

$f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$

για $x=1$ $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 + \alpha = 0$

$-15 + \alpha = 0$

$\alpha = 15$

Γ2. Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$y = \alpha x + \beta$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = -9$

άρα $\alpha = -9$

οπότε $y = -9x + \beta$

για $x = 2$, $y = f(2) = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$

$3 = -18 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21$

άρα εφαπτομένη $\varepsilon: y = -9x + 21$

Γ3. Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 18x + 15 = 0 \quad (:3)$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16$ άρα $x = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$

η f είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 5]$

για $x = 1$ παρουσιάζει τ. μέγιστο το $f(1) = 8$

για $x = 5$ —//— τ. ελάχιστο το $f(5) = -24$

Γ4. Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$$

Μονάδες 5

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-6x+5)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3\cdot\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-5)}{x+1}$$

$$= \frac{3(1-5)}{1+1} = \frac{-12}{2} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

ορίζεται $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

άρα $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ (μον. 4).

Μονάδες 6

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1\cdot(x+1) - 1\cdot x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \quad x \neq -1$$

Δ2. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)}, \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9} \quad \text{και} \quad f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

άρα $\bar{x} = \dfrac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ και $s = \dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

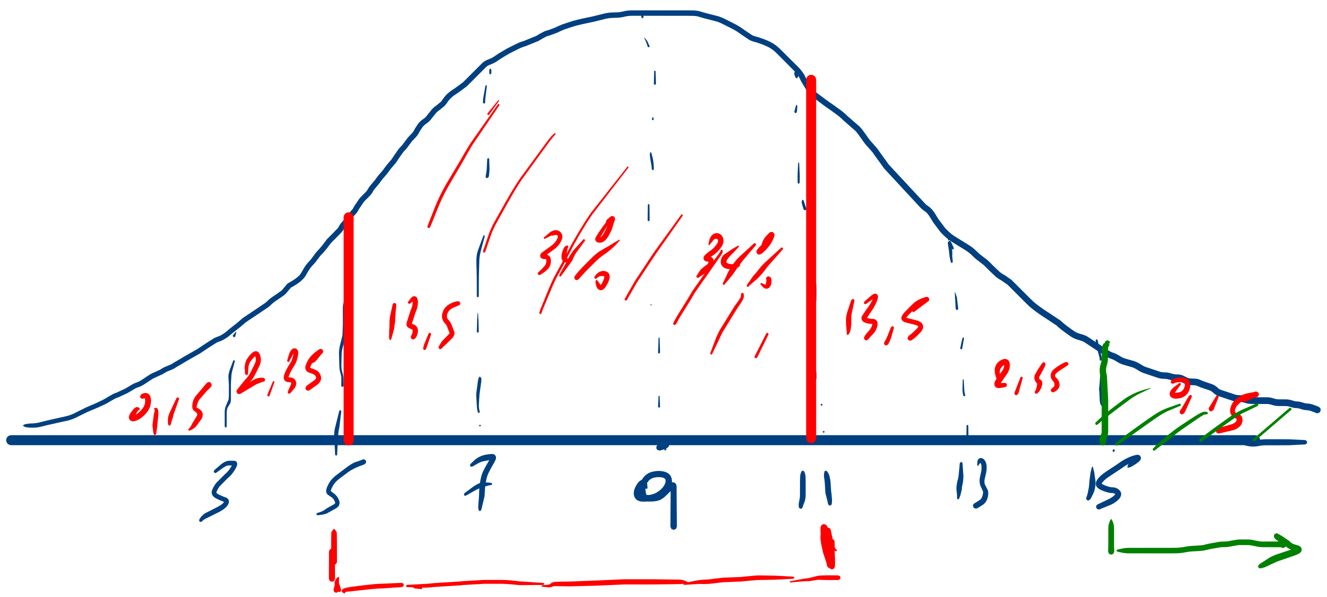
$\bar{x} = 9$ και $s = 2$

Δ3. Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

$\bar{x} = 9$ και $s = 2$

κανονική κατανομή



από 5 έως 11 έχουμε $13,5 + 68 = 81,5\%$

άρα πλήθος $= \frac{81,5}{100} \cdot 2000$

$= 815 \cdot 2 =$

$= 1630$

άρα από 5 έως 11 λεπτά έχουμε 1630 μαθ.

και πάνω από 15 έχουμε 0,15% άρα $\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$ μαθητές

Δ4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

$\bar{x} = 9 \quad s = 2$

Μονάδες 4

αν αυξηθεί κατά 3 λεπτά η νέα μέση τιμή θα αυξηθεί κατά 3 και η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια

$\bar{x}' = 9 + 3 = 12$ και $s' = s = 2$

✓

καλά αποτελέσματα