

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -(x-1)^2 + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ που έχει μέγιστη τιμή το $\sqrt{2}$.

A. Να υπολογίσετε τη γωνία θ .

B. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2} \cdot f(1) + 2 \cdot \eta\mu\omega = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Γ. Αν η κορυφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι το σημείο $K\left(4 - \varepsilon\varphi^2\varphi, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon\varphi\varphi\right)$ να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 3 \cdot \eta\mu(2x) \text{ και } g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)$$

A. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των f και g .

B. Αν $|g(x)| \leq \theta$ ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού θ ;

Γ. Πόσες λύσεις έχει η $f(x) = 4$;

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

E. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) + 3f(x) - 18 = 0$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} \lambda x + \psi = \lambda^2 + \lambda \\ x + \psi = 2\lambda \end{cases} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R} .$$

A. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο?

B. Αν (x_0, ψ_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ)

i) Να λύσετε την εξίσωση $|2x_0 + 1| = 4 - \psi_0$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $x_0^2 - 3\psi_0 + 2 \leq 0$.

iii) Εστω ότι το σύστημα (Σ) έχει **άπειρες λύσεις (x, ψ)** . Να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκουν τα x και ψ , ώστε τα σημεία $M(x, \psi)$ να βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις

$$(\varepsilon_1) : x + \lambda\psi = \lambda + 1 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2) : -\lambda x + \psi = 1 - \lambda$$

A. Να βρείτε το **σημείο τομής** των ευθειών (ε_1) και (ε_2)

B. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} \alpha x + 2\beta\psi = 3 \\ -2\alpha x + 3\beta\psi = 1 \end{cases}$$

να έχει την ίδια λύση με το σύστημα ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

Γ. Αν D, D_x, D_ψ είναι οι ορίζουσες του συστήματος των ευθειών (ε_1) και (ε_2) , να βρείτε το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης

$$f(m) = \frac{m-3}{2D_x - D_\psi} + \sqrt{m^2 + (D - D_\psi)m + D_\psi}$$