

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ



## 1.

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = k + \sqrt{2} \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  όπου  $k \in \mathbb{R}$

- i) Αν η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι  $-3 + \sqrt{2}$ , να βρείτε το  $k$ .
- ii) Για  $k = -3$
- α) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της
- β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

## 2

- α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε, για κάθε  $x \neq 2$  και  $x \neq 3$  να ισχύει

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$$

- β) Αν το πολυώνυμο  $P(x) = (k-2)x^4 + kx^3 - (k^2+5)x^2 + (5k+3)x - 6$  είναι τρίτου βαθμού, να βρείτε την τιμή του  $k$  και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

## 3.

Αν η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  έχει 2 ρίζες τότε  $\alpha = \beta = 0$  άρα θα είναι αόριστη.

## 4.

Αν το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  είναι παραπάνω από τον βαθμό της, τότε  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  και άρα θα έχει άπειρες.

## 5.

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$

Το οποίο έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς 3,  $\rho_1$  και  $\rho_2$  τέτοιους ώστε  $\rho_1 \cdot \rho_2 = -1$

1. Να βρείτε τα  $a, \beta$
2. Να λύσετε την εξίσωση  $P(x)=0$
3. Να λύσετε την ανίσωση  $P(x)+x < 3$

## 6.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  στη μορφή

$$f(x) = (x - p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

## 7

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Θεωρούμε και τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = 2 + x + f(f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση  $f(2 - g(x)) > 0$ .

## 8

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) - f(x) = -\frac{x}{4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $4f(x-1) > x-1$ .