

φυλλάδιο 3

καλή εβδομάδα

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii) $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii) Ο αριθμός 1 είναι μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .
- iv) Ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση και να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{7\pi}{11}\right)$ και $f\left(\frac{11\pi}{13}\right)$.
- ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = 1$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα συστήματα $\begin{cases} \lambda x + y = 4 \\ x + (\lambda^4 - 2)y = 2\lambda \end{cases}$

και $\begin{cases} \lambda^2 x - 3y = \lambda - 1 \\ x + (1 - \lambda^3)y = 3, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

με αντίστοιχες ορίζουσες D και D' .

- i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.
- ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.
- iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $D + D' = 1$, να αποδείξετε ότι τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 4

i) Αν για το 2×2 σύστημα με ορίζουσες

$$D, D_x, D_y \text{ ισχύει } \begin{cases} 2D_x - 3D_y = 5D \\ 3D_x + 6D_y = 9D \end{cases}$$

και έχει μοναδική λύση να υπολογιστούν τα x, y .

ii) Αν για το 2×2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύει:

$$-2D_x^2 - 2D_y^2 - 4D^2 + 4D_x D - 4D_y D = 0 \quad (1)$$

και έχει μοναδική λύση να υπολογιστούν τα x, y .

Άσκηση 5.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a + 1) \sin(\beta\pi x)$ όπου a, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 3 και η περίοδος 4, να δείξετε ότι

$$a = 2 \text{ και } \beta = \frac{1}{2}$$

ii) Για $a = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 4]$.

Άσκηση 6

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού το οποίο διαιρείται με το $x^2 + 1$, έχει ρίζα το 0 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με 2.

i) Δείξτε ότι $P(x) = x^3 + x$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $(P(x) - 2)^3 + (P(x) - 2)^2 + P(x) > 2$