



1.

A.

Εστω  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα

- i) Να γράψετε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου τους  
ii) Αν τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσής τους, αποδείξτε την ισοδυναμία

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

- iii) Αν τα διανύσματα είναι μη μηδενικά και  $\theta$  είναι η γωνία τους, δείξτε ότι

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

B.

- i) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 1)$  και  $\vec{\beta} = (4, \lambda)$ .  $\lambda \neq 0$

Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $\lambda$  τα διανύσματα είναι κάθετα ;

$\lambda = 1$  ,  $\lambda = 3$  ,  $\lambda = 2$  ,  $\lambda = -2$  ,  $\lambda = -3$  .

Κυκλώστε την σωστή απάντηση

- ii) Αν  $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$ ,  $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$ ,  $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία της στήλης A με το μέτρο της , της στήλης B

Στήλη A	Στήλη B
Γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	$\frac{\pi}{2}$
Γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	$\frac{\pi}{6}$
Γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	$\frac{\pi}{4}$
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{3\pi}{4}$
	$\frac{\pi}{3}$

## 2.

Δίνονται τα σημεία  $A(8, 0)$  και  $B(0, 4)$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και το μέσο  $\Delta$  του τμήματος  $AB$
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από το  $\Delta$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $OA$
- iii) Αν  $M$  τυχαίο σημείο της  $(\varepsilon)$ , δείξτε ότι  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MO}^2$

## 3.

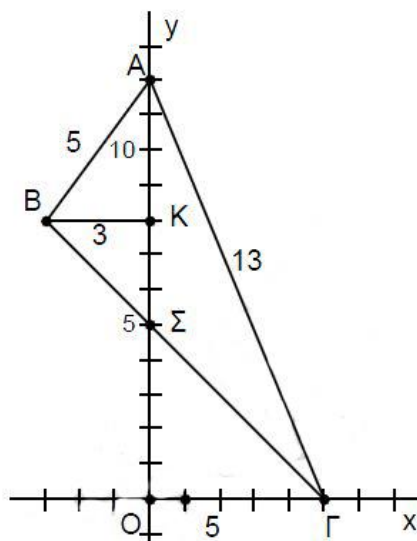
Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$  και  $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$

- i) Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$
- ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\kappa$  ώστε τα διανύσματα  $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα
- iii) Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του  $\vec{\alpha}$ .

## 4.

Στο παρακάτω σχήμα με καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $Oxy$ , τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  παριστάνουν τις θέσεις τριών χωριών, ο άξονας  $y'y$  παριστάνει μία εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  δύο επαρχιακούς δρόμους με μήκος 5km και 13km αντίστοιχα. Οι αποστάσεις των χωριών  $B$  και  $\Gamma$  από την εθνική οδό είναι 3km και 5km αντίστοιχα. Να βρείτε

- i) Τις συντεταγμένες των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$
- ii) Την απόσταση των χωριών  $B$  και  $\Gamma$
- iii) Την εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma$  και τις συντεταγμένες του σημείου  $\Sigma$ , στο οποίο η ευθεία  $B\Gamma$  συναντάει την εθνική οδό.



## 5.

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}|=1$ ,  $|\vec{\beta}|=2$  και  $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

Έστω τα διανύσματα  $\vec{u}=2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  και  $\vec{v}=\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε:

- Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- Τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$
- Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Το συνημίτονο της γωνίας των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

## 6.

- Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ , να γράψετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$  όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί.
- Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του επιπέδου και  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $AB$  να αποδείξετε ότι
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
- Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του επιπέδου να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overline{AB}$  και την απόσταση των σημείων  $A, B$
- Στον παρακάτω πίνακα στη στήλη  $A$  δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων  $A$  και  $B$  και στην στήλη  $B$  δίνονται οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\overline{AB}$  και η απόσταση των σημείων  $A, B$ . Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη A	Στήλη B
α. $A(1, 3)$ και $B(-2, 5)$	κ. $\overline{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = \sqrt{15}$
β. $A(2, -1)$ και $B(2, -3)$	λ. $\overline{AB} = (0, -2)$ και $(AB) = 2$
γ. $A(4, -3)$ και $B(6, -3)$	μ. $\overline{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = \sqrt{13}$
	ν. $\overline{AB} = (2, 0)$ και $(AB) = 2$

- Αν  $K(x_1, 6)$  και  $\Lambda(-9, y_2)$  δύο σημεία του επιπέδου και  $M(-5, 4)$  το μέσο του τμήματος  $KL$ , τότε  
 $x_1 = 1$  και  $y_2 = -2$   
 $x_1 = -1$  και  $y_2 = 2$   
 $x_1 = -3$  και  $y_2 = 2$   
 $x_1 = 4$  και  $y_2 = 5$   
τίποτα από αυτά .

Κυκλώστε την σωστή απάντηση .