

# ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ασκήσεις επανάληψης

Φυλλάδιο

4



**1.**

Έστω η εξίσωση

$$(k^2 - 5k + 4)x^2 - (k - 1)x + 1 = 0$$

- i)** Να βρείτε την τιμή του  $k$  ώστε η εξίσωση να έχει μία μόνο ρίζα την οποία ρίζα να προσδιορίσετε
- ii)** Να βρείτε την τιμή του  $k$  ώστε η εξίσωση να έχει μία ρίζα διπλή την οποία ρίζα να προσδιορίσετε
- iii)** Να βρείτε τις τιμές του  $k$  ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και ανισες

**2.**

**i)** Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{5|x|+1}{3} - \frac{4|x|+3}{3} = \frac{5|x|+4}{6} - 2$$

**ii)** Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{2|x-2|-6}{4} - \frac{2+|2-x|}{3} < 1 - 3|x-2|$$

**3.**

Έστω η εξίσωση  $x^2 + 2(\lambda + 2)x + 8\lambda = 0$

**i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Πότε οι ρίζες είναι ίσες και πότε άνισες;

**ii)** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει  $x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2 = 30(\lambda + 2)$

**iii)** Για ποια τιμή του  $\lambda$  οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίθετες;

**4.**

**i)** Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του  $a$  η εξίσωση  $(a^2 - 2a - 35)x = a + 5$

**ii)** Όταν η εξίσωση του **(i)** ερωτήματος είναι αδύνατη να βρεθούν οι τιμές του  $k$  ώστε η εξίσωση  $(a - 6)x^2 - (k - a)x + (k - 1)^2 = 0$  να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

**5.**

i) Αν  $3 < x < 5$  Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$

ii) Αν  $2 < \alpha < 8$  να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχεται η παράσταση

$$B = 5|\alpha - 1| - 3|\alpha - 9| + 4|\alpha + 2| + 5|10 - \alpha|$$

**6**

Έστω η εξίσωση  $x^2 + x - k^2 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $k \in \mathbb{R}$

ii) Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης να προσδιορίσετε τις τιμές του  $k$  για τις οποίες ισχύει

$$x_1(k + x_2) + kx_2 > -6$$

iii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού της οποίας ρίζες να είναι οι αριθμοί

$$\rho_1 = x_1 + 1 \text{ και } \rho_2 = x_2 + 1$$

**7**

i) Έστω τα σημεία  $A(\lambda^3 - 2, |\mu - 2|)$  και  $B(6, -2)$  Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  ώστε να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $x'x$ .

ii) Για τις τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  του (i) ερωτήματος να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $\mu x^2 - 2\lambda x - (\alpha^2 + \beta^2) = 0$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**8**

Να λυθούν οι ανισώσεις

$$\text{i) } (x - 1)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 1) < 0$$

$$\text{ii) } \frac{(x - 2)(x^2 + x + 1)}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$$

**9.**

i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  έτσι ώστε να ισχύει  $x_1^2 + x_2^2 = 10$

iv) Αν  $\lambda = -2$  να βρείτε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με ρίζες  $\rho_1 = x_1^2$  και  $\rho_2 = x_2^2$

**10.**

Έστω η εξίσωση  $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Δείξτε ότι η διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης είναι ίση με  $\Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3$

ii) Να λυθεί η ανίσωση  $\Delta < 0$

iii) Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $\lambda$  έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες

iv) Αν  $x_1$ ,  $x_2$  οι άνισες ρίζες της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση  $|x_1 + x_2 + 2| < 1$

**11**

(i) Αν  $\alpha\beta > 0$ , να αποδειχθεί ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

(ii) Αν  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  και  $\gamma > 0$ , τότε:  $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$

**12**

Αν  $|x - 2| \leq 1$  και  $|8 - \psi| \leq 5$ , να βρεθεί το διάστημα στο οποίο παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:  $A = 5\chi + \psi$  και  $B = 2\chi\psi + \psi - 2\chi$

**13.**

i) Να αποδείξετε ότι  $2|x - 3| = |6 - 2x|$

i) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) 
$$\frac{|6 - 2x| + 1}{3} - \frac{|x - 3| - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

β)  $|x^2 - 9| + |6 + 2x| = 0$

**14.**

Να λυθούν οι εξισώσεις

i)  $(x + 3)^2 - 5|x + 3| - 14 = 0$

ii)  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

iii) 
$$\frac{2(x + 1)}{x - 2} + \frac{5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

**15.**

Να λυθεί η εξίσωση:

(E):  $2 + 3x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 4$

**16.**

Να λυθεί η ανίσωση:

$(x + 1)^2 - 9|x + 1| - 10 \leq 0$

**17**

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της στο διάστημα  $(2, 3)$ .

δ) Να λυθεί στο πεδίο ορισμού της η εξίσωση:  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$ .

**18**

Αν το τριώνυμο  $\varphi(x) = x^2 + \beta x + \gamma$  έχει μια διπλή ρίζα, ναδειχθεί ότι το τετράγωνο αυτής ισούται με το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης:

$$\left( \frac{2x - \beta}{\beta} \right)^2 + 3x = 0$$

Να λυθεί η ανίσωση:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{6}$$

**Απάντηση:**  $2 < x < 6$

**19**

Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  
(E):  $x^2 + 5(\mu - 1)x - (\mu^2 + 1) = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$(A): \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} > 1.$$

**20**

Να βρεθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε μια ρίζα της εξίσωσης:  $x^2 - 7x + 2\lambda = 0$  να είναι διπλάσια μιας ρίζας της εξίσωσης:  $x^2 - 5x + \lambda = 0$

**Απάντηση:**  $\lambda = 6$