φυλλάδιο 3

καλή εβδομάδα

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο: $|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \alpha\geq 0\\ -\alpha & \alpha<0\end{cases}$.

Συνέπειες του ορισμού

1. $|-x|=|x|$
2. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$
3. $|x|+|y|=0 \Leftrightarrow x=y=0$
4. $|x|^{2\nu}=x^{2\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^{*}$.
5. $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$
6. $|x|\geq x$ και $|x|\geq -x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
7. $-|x|\leq x\leq |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Απόσταση δύο αριθμών

Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α,β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β και ισχύει: $\mathbf{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$

Είναι προφανές ότι d(α,β) = d(β,α)

1.Αν $x\leq 1$ να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση:

$$A=|x-3|-2|x-1|+|2-x|$$

2.Αν $x<2$ να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση:

$$A=|x-2|-2|3-x|+|x-4|$$

3.Αν $-1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A=|x-2|+|x+1|+|3-x|$.

4.Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$ **β)** $0<A<4$.

5.Αν $x\in[1,2)$, να αποδείξετε ότι: $3<|x|-|x-1|+2|3-x|\leq 5$.

6. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$

7. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x\le\dfrac{3}{2}$.

β) Αν $x\le\dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

8. Αν $\alpha<\beta<\gamma<0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|=0$ **β)** $|\alpha+\beta|-|\beta+\gamma|-|\alpha+\gamma|=2\gamma$

9. Αν $\alpha<x<\beta$ να δείξετε ότι $\big||\alpha-x|+|\beta-x|\big|=\beta-\alpha$.

10.α) Αν $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2$ (1)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Αν $x\ne y$, να αποδείξετε ότι $|x-y|+\dfrac{1}{|x-y|}\ge 2$.

12. Αν $|x|\le 4$ και $|y|\le 1$ να δείξετε ότι $|x+y|\le 5$ και $|3y-x-2|\le 9$

13. Αν $|x|=2$, $|y|=3$, $|z|=5$ να δείξετε ότι $|x-y+z|\le 10$.

14. Αν $|x-\alpha|<k$ και $|x-\beta|<m$ να δείξετε ότι $|\alpha-\beta|<k+m$.

15. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$.