Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός: **Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.**

Δηλαδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.

Ιδιότητες

- $\alpha^2 \geq 0$ **για κάθε** $\alpha \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)
  - $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **και** $\beta = 0$
  - $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ **ή** $\beta \neq 0$
- $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$ — Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός
- $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$ — Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
- α, β **ομόσημοι** $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
- α, β **ετερόσημοι** $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$
- $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- **Αν** $\gamma > 0$, **τότε:** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- **Αν** $\gamma < 0$, **τότε:** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- **Αν** $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, **τότε:** $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
- **Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$.
- **Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$.

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$ **β)** $x^2 + 16 \geq 8x$ **γ)** $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

δ) $\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0$ **ε)** $3x^2 + 4x + 4 > 0$ **στ)** $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 \geq 0$

ζ) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ **η)** $2\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$ **θ)** $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$

2. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

3.Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις:

α) $2x^2-4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $x^2+y^2\geq 12x+4y-40$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

γ) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

δ) $\alpha^2+\beta^2+25\geq 6\alpha+8\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

4. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$.

5. Αν $x>2$, να αποδείξετε ότι: $3x\quad+2>x+6$.

6. Αν $x>1$, να αποδείξετε ότι: $5x\quad+2>2x+5$.

7. α) Αν α,β ομόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$.

β) Αν α,β,γ ομόσημοι, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)\geq 6\alpha\beta\gamma$$

8. Αν $\alpha\geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3-1\geq\alpha-\alpha^2$.

9. Αν $\alpha>1$ και $\beta>1$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}<1$.

10.Αν $\alpha+\beta>0$ τότε $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$.

11.Αν $\alpha\geq\beta$ να δείξετε ότι $\alpha^3-\beta^3\geq\alpha\beta^2-\beta\alpha^2$.

12 .Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $6^{14}\cdot 9^{21}$ και $6^{21}\cdot 9^{14}$ **β)** $10^9\cdot 5^7$ και 5^{25}

13 .Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $(x-1)^2$ και $2(x-5)$ **β)** $(x+3)^2$ και $2(2x+3)$

14. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $A=\alpha^2+\beta^2+13$ και $B=4\alpha+6\beta$ **β)** $A=\alpha^2+\beta^2+20$ και $B=8\alpha+4\beta$.

15.Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16.Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$