ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Μεταβολή και ποσοστιαία μεταβολή μιας μεταβλητής

Έστω μια μεταβλητή X, X_1 η αρχική της τιμή και X_2 η τελική της τιμή. Καθώς κινούμαστε από την χρονική στιγμή 1, στην χρονική στιγμή 2 **η μεταβολή της X ορίζεται ως:**

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

Ενώ **η ποσοστιαία μεταβολή της X ορίζεται ως:**

$$\frac{\Delta X}{X_1} \cdot 100 = \frac{X_2 - X_1}{X_1} \cdot 100$$

Η μεταβολή της X εκφράζεται σε μονάδες μέτρησης της μεταβλητής X, ενώ η ποσοστιαία μεταβολή ως ποσοστό (%).

Παράδειγμα 1:

Έστω X_1=200 η αρχική της τιμή μιας μεταβλητής X. Αν X_2=240 η τελική τιμή, να υπολογίσετε την μεταβολή και την ποσοστιαία μεταβολή της μεταβλητής X.

Λύση:

$\Delta X = X_2 - X_1 = 240 - 200 = 40$ η μεταβολή της X.

$$\frac{\Delta X}{X_1} \cdot 100 = \frac{X_2 - X_1}{X_1} \cdot 100 = \frac{240-200}{200} \cdot 100 = 20\%$$

η ποσοστιαία μεταβολή της X.

2. Μεταβολή μιας μεταβλητής κατά ένα ποσοστό.

Έστω X_1 η αρχική της τιμή μιας μεταβλητής. Αν η X_1 αυξηθεί κατά 20% τότε θα γίνει:

$$X_2 = X_1 + \frac{20}{100} X_1 \Rightarrow X_2 = X_1 + 0,2X_1 \Rightarrow X_2 = 1,2X_1$$

Ενώ αν η X_1 μειωθεί κατά 20% τότε:

$$X_2 = X_1 - \frac{20}{100} X_1 \Rightarrow X_2 = X_1 - 0,2X_1 \Rightarrow X_2 = 0,8X_1$$

Παράδειγμα 1:

Έστω X_1=500

Αν αυξηθεί κατά 40%:

$$X_2 = X_1 + \frac{40}{100} X_1 \Rightarrow X_2 = 500 + 0,4 \cdot 500 \Rightarrow X_2 = 700$$

Έστω X_1=500

Αν μειωθεί κατά 40%:

$$\boldsymbol{X_2 = X_1 - \frac{40}{100}X_1 \Rightarrow X_2 = 500 - 0,4 \cdot 500 \Rightarrow X_2 = 300}$$

Παράδειγμα 2:

Έστω ότι η τιμή (P) ενός αγαθού αυξάνεται κατά 25% και γίνεται 100 χρηματικές μονάδες. Να υπολογίσετε την αρχική τιμή του αγαθού.

Λύση:

Αν P_1 η αρχική τιμή του αγαθού και P_2 η τελική τιμή τότε:

$$\boldsymbol{P_2 = P_1 + \frac{25}{100}P_1 \Rightarrow 100 = P_1 + 0,25P_1}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow 100 = 1,25P_1 \Rightarrow 100 = 1,25P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{100}{1,25} = 80}$$

3. Γραμμικές Εξισώσεις

3.1 Βασικές έννοιες

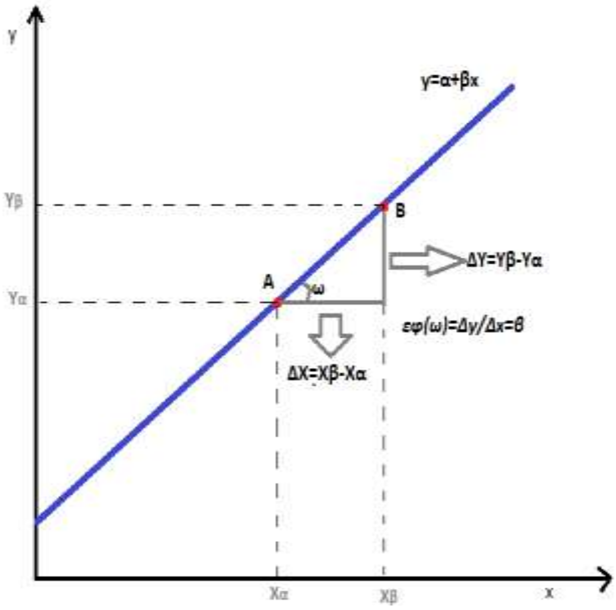
Κάθε εξίσωση της μορφής:

y=α+βx

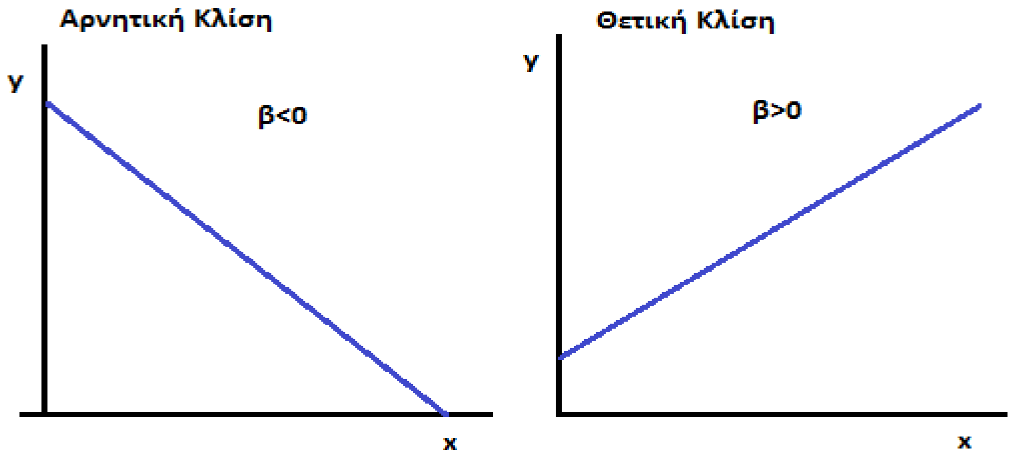
είναι γραμμική. Οι παράμετροι α και β ορίζουν την εξίσωση ως εξής:

- Η παράμετρος **α** της εξίσωσης ονομάζεται **σταθερός όρος ή σταθερά** της εξίσωσης. Αν χ=0 τότε y=α. Έτσι η σταθερά α ορίζει το σημείο τομής της ευθείας με τον κάθετο άξονα.
- Η παράμετρος **β** ονομάζεται κλίση της ευθείας. Έστω μια ευθεία και δυο τυχαία σημεία Α και Β πάνω σε αυτήν. Τότε ισχύει ότι η κλίση της ευθείας ισούται με:

$$E\varphi(\omega) = \frac{Y_\beta - Y_\alpha}{X_\beta - X_\alpha} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta$$



- Αν ΔΧ και ΔΨ ετερόσημα (π.χ ΔΧ>0 και ΔΥ<0), τότε β<0 και η κλίση της ευθείας είναι **αρνητική.**
- Αν ΔΧ και ΔΨ ομόσημα (π.χ ΔΧ>0 και ΔΥ>0), τότε β>0 και η κλίση της ευθείας είναι **θετική.**



3.2 Κατασκευή Γραφικής παράστασης εξίσωσης ευθείας.

Έστω y=200-2x και $x, y \geq 0$. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση.

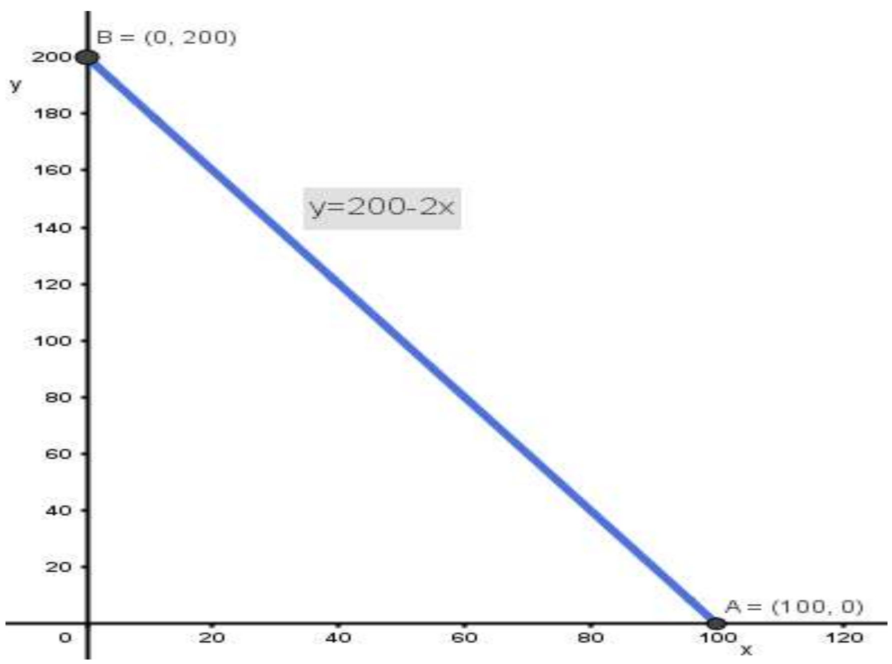
Λύση:

Βήμα 1ο: Για να κατασκευάσουμε την ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση υπολογίζουμε τα σημεία τομής με τους άξονες x και y.

Για **x=0, y=200 (σημείο Β)**

Για y=0, 0=200-2x $\Rightarrow 2x = 200 \Rightarrow x = 100$ **(σημείο Α)**

Βήμα 2ο: Ενώνουμε τα δυο σημεία και σχηματίζεται η ζητούμενη γραφική παράσταση



3.3 Εύρεση εξίσωσης ευθείας

Έστω ότι εξίσωση ευθείας της μορφής **y=α+βx**, στην οποία δίνονται δυο σημεία: **A**(x=4,y=10) και **B**(x=6,y=18). Να υπολογίσετε την εξίσωση.

Λύση: `

Βήμα 1ο: Οι συντεταγμένες κάθε σημείου επαληθεύουν την εξίσωση. Έτσι για κάθε σημείο έχουμε:

Από το σημείο A:

(1) **10=α+β4**

Από το σημείο B:

(2) **18=α+β6**

Βήμα 2ο: Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο σχέσεις έχουμε:

(2)-(1) 18-10=α-α+6β-4β $\Rightarrow 2\beta = 8 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 4}$

Βήμα 3ο: Αντικαθιστώντας στη σχέση 1 (ή 2) υπολογίζουμε τον σταθερό όρο:

(1) $10 = \alpha + 4 \cdot 4 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = -6}$

Έτσι η εξίσωση είναι η: **y=-6+4x**

(Περισσότερα για τις γραμμικές εξισώσεις στην μεθοδολογία ασκήσεων του 2ου κεφαλαίου)

4. Εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής

Η γενική μορφή της εξίσωσης ισοσκελούς υπερβολής είναι:

$$\boldsymbol{y = \frac{A}{x}}$$

Όπου Α μια σταθερή παράμετρος που ταυτοποιεί την εξίσωση. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτής της εξίσωσης είναι ότι το γινόμενο των συντεταγμένων κάθε σημείου είναι σταθερό. (Εξάλλου $\boldsymbol{y \cdot x = A}$)

Έτσι αν η Α= 2000 η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\boldsymbol{y = \frac{2000}{x}}$$

Αν υπολογίσουμε δυο τυχαία σημεία της εξίσωσης

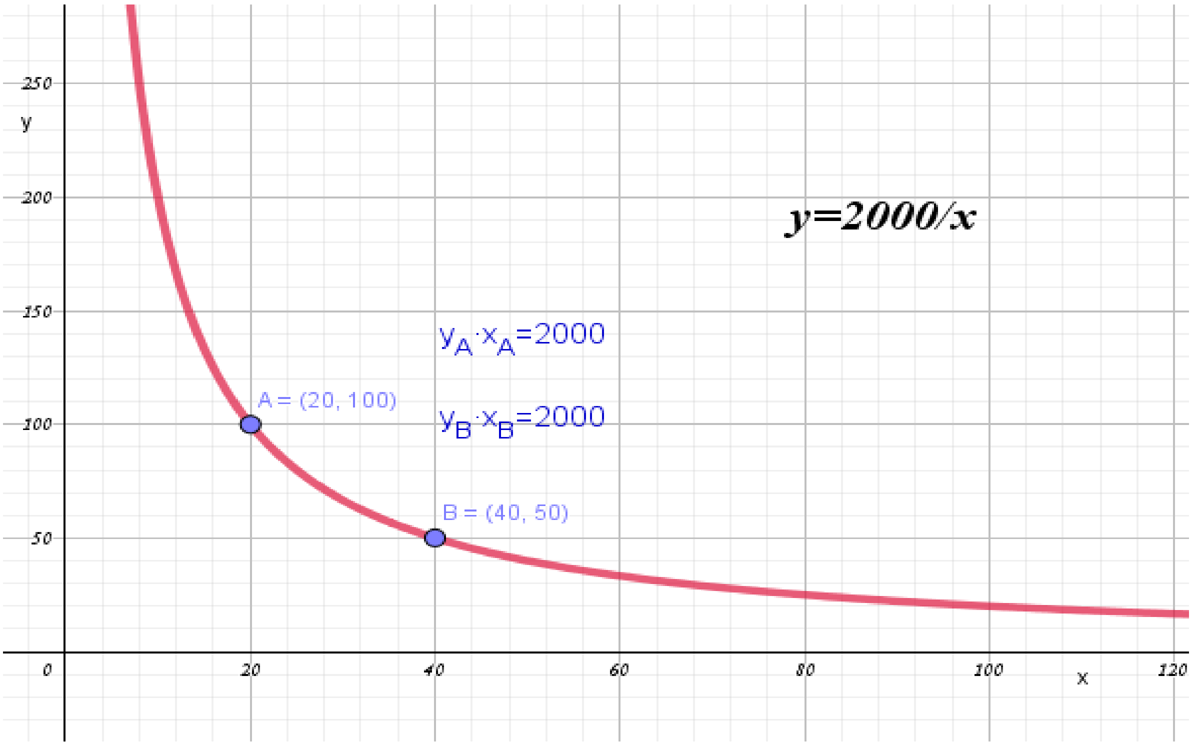
Για x= 20, $y = \frac{2000}{x} = \frac{2000}{20} = 100$ (σημείο Α)

Για x= 40, $y = \frac{2000}{x} = \frac{2000}{40} = 50$ (σημείο Β)

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο των συντεταγμένων σε κάθε σημείο είναι σταθερό :

$$y_A x_A = y_B x_B = 2000$$

Παρακάτω δίνεται η γραφική απεικόνιση της συγκεκριμένης εξίσωσης.



`