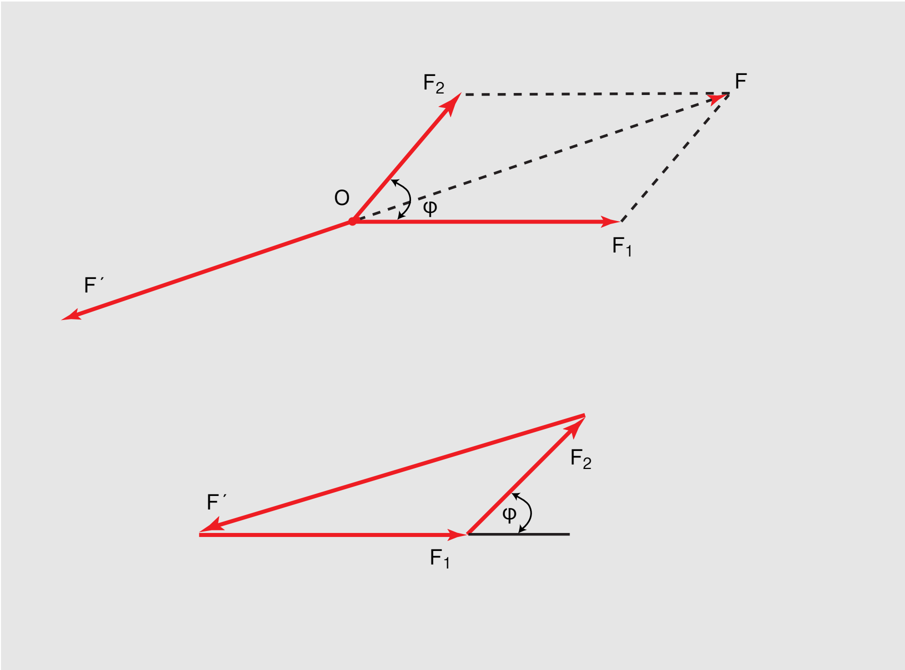


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΘΕΣΗ - ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να περιγράφετε τη σύνθεση , με γραφικό και αναλυτικό τρόπο, συγγραμμικών δυνάμεων, δυνάμεων υπό γωνία 90°, πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής, παραλλήλων ομορρόπων - αντιρρόπων δυνάμεων και πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων οπωσδήποτε τοποθετημένων.
- Να περιγράφετε τις απλές περιπτώσεις ανάλυσης δυνάμεων με γραφικό και αναλυτικό τρόπο, και την ανάλυση σε δύο παράλληλες συνιστώσες.
- Να περιγράφετε τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος.
- Να λύνετε προβλήματα, σχετικά με όσα αναφέρονται παραπάνω, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

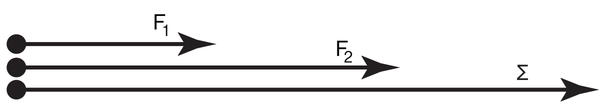
3.1 ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η σύνθεση δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σώμα, αποσκοπεί στον προσδιορισμό μιας δύναμης, της συνισταμένης, η οποία όταν ενεργεί στο σώμα, επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των αρχικών δυνάμεων.

α. Δυνάμεις συγγραμμικές και ομόφορες :

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma = F_1 + F_2$$



Σχήμα 3.1α *Δυνάμεις συγγραμμικές - ομόφορες*

Η διεύθυνση και η φορά, είναι αυτές των συνιστωσών.

β. Δυνάμεις συγγραμικές και αντίφορες:

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{\Sigma = F_1 - F_2}$$

Σχήμα 3.16 *Δυνάμεις συγγραμμικές και αντίρροπες*

Η διεύθυνση, είναι η διεύθυνση των συνιστωσών, και η φορά, είναι αυτή της μεγαλύτερης σε μέτρο συνιστώσας.

γ. Δυνάμεις υπό γωνία φ = 90°

Αφού (σχ. 3.1γ) φ = 90°, συνφ = 0, έπεται:

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2\,\text{συνφ}} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}0°} \rightarrow \text{συν}0 = 1$$

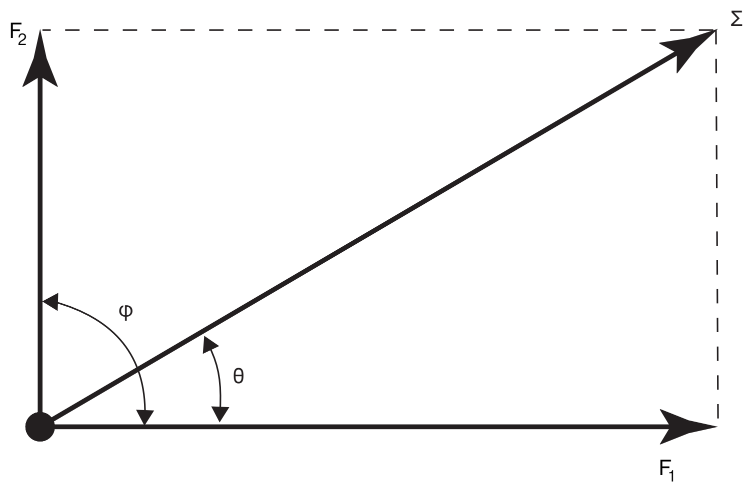
$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2} \rightarrow \sqrt{(F_1 + F_2)^2} \rightarrow F = \mathbf{F_1 + F_2}$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2\,\text{συνφ}} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}180}\,, \qquad \text{συν}180° = -1$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1 \cdot F_2} \rightarrow \Sigma = \sqrt{(F_1 - F_2)^2}$$

και $\mathbf{\Sigma = F_1 - F_2}$



Σχήμα 3.1γ *Συνισταμένη δύο δυνάμεων, υπό γωνία 90°.*

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2\,\text{συνφ}} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot 0} \rightarrow$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Η διεύθυνση της Σ δίνεται :

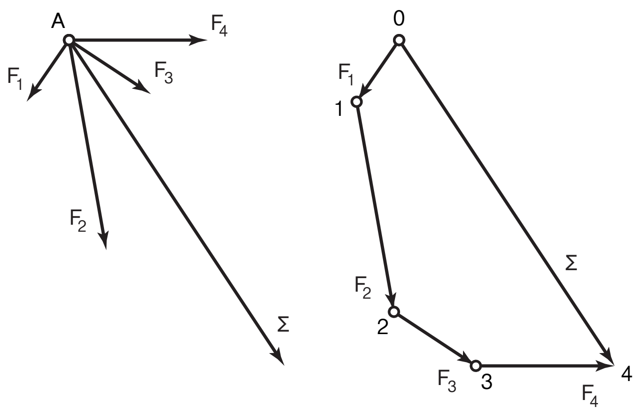
$$\text{εφθ} = \frac{F_2}{F_1}$$

3.2 ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΠΟΛΛΩΝ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.2α):

$F_1 = 20$ N $F_2 = 60$ N $F_3 = 30$ N $F_4 = 40$N



Σχήμα 3.2α *Η συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων γραφικά.*

Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm : 20 N

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3-4 και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ, με σημείο εφαρμογής το κοινό σημείο εφαρμογής των συνιστωσών.

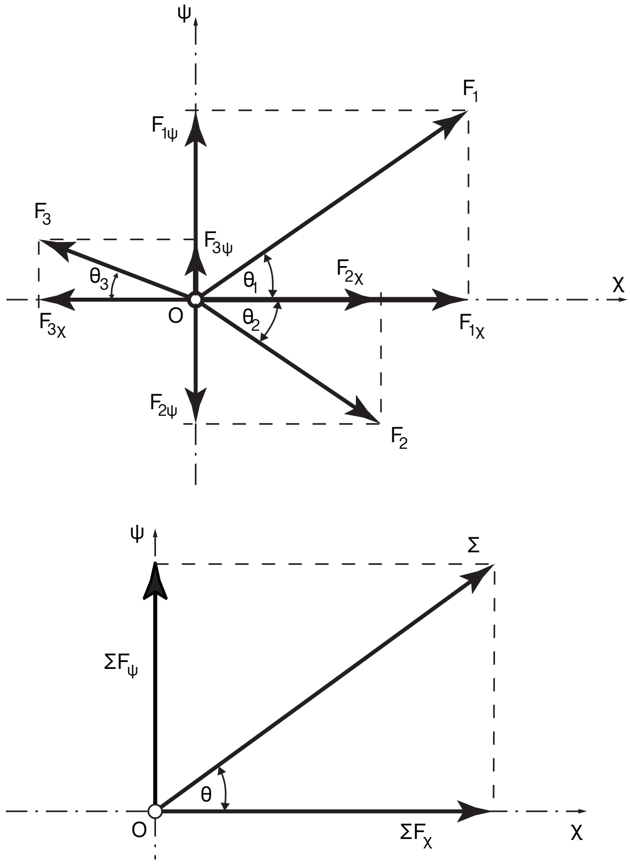
Επομένως :

Σ = 0 - 4 = 5,8 X 20 N

$\boxed{\Sigma = 116\ N}$

β) Με την αναλυτική μέθοδο

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ανάλυσης σε άξονες. Έστω F_1, F_2 και F_3 οι δυνάμεις (σχ.3.2β) με κοινό σημείο εφαρμογής το Ο. Ακολουθούμε τα εξής βήματα :



Σχήμα 3.26 *Συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων.*

Βήμα 1ο

Με αρχή το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων (Ο), παίρνουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων O_χ και O_ψ.

Βήμα 2ο

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες στους άξονες O_χ και O_ψ και υπολογίζουμε τα μέτρα των συνιστωσών με τους γνωστούς μας τύπους:

$F_1 = \Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$ $\quad$ $F_2 = \Sigma \cdot \eta\mu\theta \rightarrow$

$F_\chi = \Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ $\quad$ $F\psi = \Sigma \cdot \eta\mu\theta$

$F_{1\chi} = F_1 \cdot συνθ_1$	$F_{1\psi} = F_1 \cdot ημθ_1$
$F_{2\chi} = F_2 \cdot συνθ_2$	$F_{2\psi} = F_2 \cdot ημθ_2$
$F_{3\chi} = F_3 \cdot συνθ_3$	$F_{3\psi} = F_3 \cdot ημθ_3$

Βήμα 3ο

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης στους άξονες O_χ και O_ψ:

$$\Sigma\, F_\chi = F_{1\chi} + F_{2\chi} - F_{3\chi}$$

$$\Sigma\, F_\psi = F_{1\psi} - F_{2\psi} + F_{3\chi}$$

Βήμα 4ο

Υπολογίζουμε το μέτρο της συνισταμένης :

$$\Sigma^2 = (\Sigma\, F_\chi)^2 + (\Sigma\, F_\psi)^2$$

$$\boxed{\Sigma = \sqrt{(\Sigma\, F_\chi)^2 + (\Sigma\, F_\psi)^2}}$$

και τη γωνία θ που καθορίζει τη διεύθυνσή της :

$$εφθ = \frac{\Sigma F_\psi}{\Sigma F_\chi}$$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης του συστήματος των δυνάμεων του σχήματος.

Δίνονται

$F_1 = 10$ N $\varphi_1 = 30°$

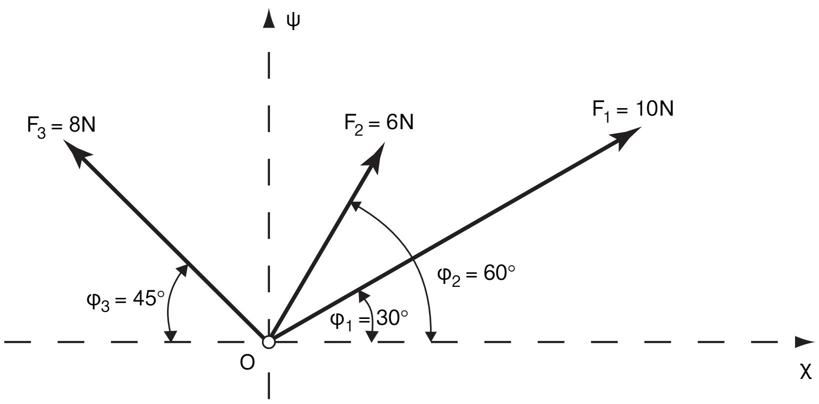
$F_2 = 6$ N $\varphi_2 = 60°$

$F_3 = 8$ N $\varphi_3 = 45°$

Ζητούνται

α) Το μέτρο της συνισταμένης (Σ)

β) Η διεύθυνσή της



Λύση

α) Το ορθογώνιο σύστημα αξόνων έχει δοθεί. Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών των δυνάμεων στους άξονες χ, ψ.

Δυνάμεις	$F_χ$	$F_ψ$
$F_1 = 10$ N	$F_{1χ} = F_1 \cdot$ συν $30°$ $F_{1χ} = 10\text{ N} \cdot 0{,}866$ $\underline{F_{1χ} = 8{,}66\text{ N}}$	$F_{1ψ} = F_1 \cdot$ ημ $30°$ $F_{1ψ} = 10\text{ N} \cdot \frac{1}{2}$ $\underline{F_{1ψ} = 5\text{ N}}$
$F_2 = 6$ N	$F_{2χ} = F_2 \cdot$ συν $60°$ $F_{2χ} = 6\text{N} \cdot \frac{1}{2}$ $\underline{F_{2χ} = 3\text{ N}}$	$F_{2ψ} = F_2 \cdot$ ημ $60°$ $F_{2ψ} = 6\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\underline{F_{2ψ} = 5{,}2\text{ N}}$
$F_3 = 8$ N	$F_{3χ} = -8\text{ N} \cdot$ συν $45°$ $F_{3χ} = -8\text{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\underline{F_{3χ} = -5{,}66\text{ N}}$	$F_{3ψ} = F_3 \cdot$ ημ $45°$ $F_{3ψ} = 8\text{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\underline{F_{3ψ} = 5{,}66\text{ N}}$
	$ΣF_χ = F_{1χ} + F_{2χ} + F_{3χ}$ $ΣF_χ = 8{,}66\text{ N} + 3\text{ N} - 5{,}66\text{ N}$ $ΣF_χ = 6\text{ N}$	$ΣF_ψ = F_{1ψ} + F_{2ψ} + F_{3ψ}$ $ΣF_ψ = 5\text{ N} + 5{,}2\text{ N} + 5{,}66\text{ N}$ $\underline{ΣF_ψ = 15{,}86\text{ N}}$

$$\Sigma = \sqrt{\left(\Sigma F_X\right)^2 + \left(\Sigma F_\psi\right)^2} = \sqrt{6^2 N^2 + 15{,}86^2 N^2}$$

$\Sigma = 16{,}95$ N

β) $\quad \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\Sigma F_\psi}{\Sigma F_X} = \dfrac{15{,}86 \text{ N}}{6 \text{ N}}$

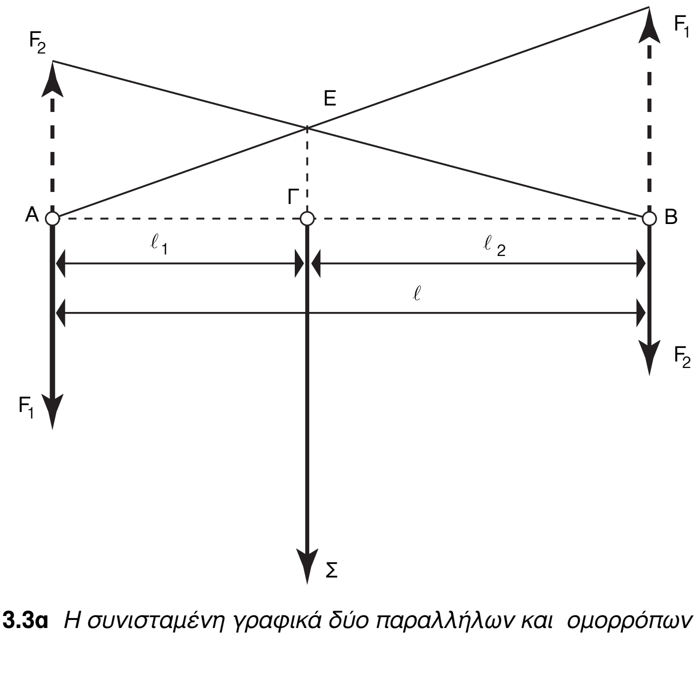
$\varepsilon\varphi\theta = 2{,}64$

$\theta \cong 69^\circ$

3.3 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΦΟΡΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.3α):



Σχήμα 3.3α *Η συνισταμένη γραφικά δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων.*

$F_1 = 12$ daN $\quad F_2 = 8$ daN $\quad \ell = 2$ m

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών 1 cm : 25 cm

δυνάμεων 1 cm : 4 daN

Μεταφέρουμε τις δυνάμεις F_1, F_2 στα σημεία εφαρμογής Β,Α αντίστοιχα, επάνω στις διευθύνσεις των δυνάμεων F_2, F_1. Η διεύθυνση της συνισταμένης Σ θα είναι παράλληλη με τις συνιστώσες, θα διέρχεται από το σημείο τομής Ε και θα έχει σημείο εφαρμογής το σημείο Γ.

Επομένως :

$\Sigma = 5 \text{ X } 4 \text{ daN}$ $\ell_1 = 3{,}2 \text{ X } 25 \text{ cm}$ $\ell_2 = 4{,}8 \text{ X } 25 \text{ cm}$

$\mathbf{\Sigma = 20 \text{ daN}}$ $\mathbf{\ell_1 = 80 \text{ cm}}$ $\mathbf{\ell_2 = 120 \text{ cm}}$

β) Με την αναλυτική μέθοδο (σχ. 3.3α):

Η συνισταμένη Σ έχει μέτρο:

$$\mathbf{\Sigma = F_1 + F_2}$$

και διεύθυνση και φορά, αυτή των συνιστωσών.

Για τον προσδιορισμό του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης, εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών, ως προς το σημείο Γ:

$M_\Sigma = M_{F1} + M_{F2}$

$0 = -F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2$ $F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2$ $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να καταλήξουμε στη διατύπωση:

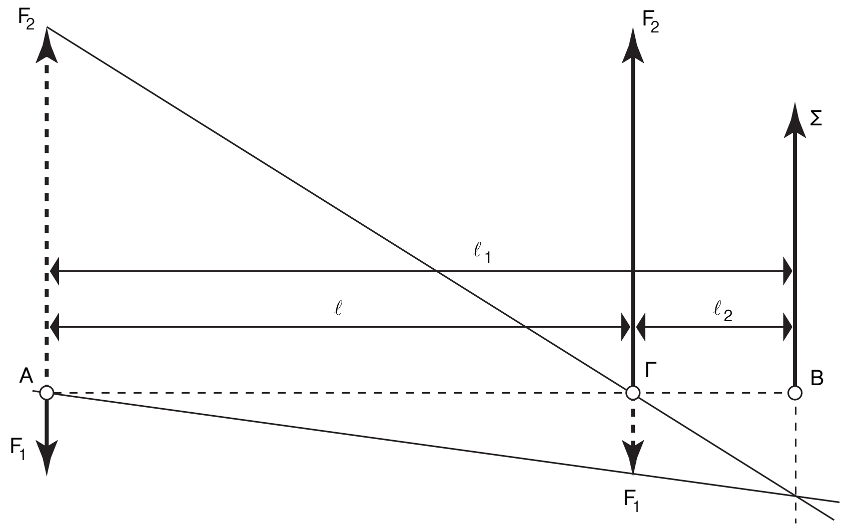
Η συνισταμένη έχει: α) μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών, β) την ίδια διεύθυνση και φορά με τις συνιστώσες, γ) το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, πλησιέστερα προς τη μεγαλύτερη και δ) διαιρεί την ευθεία, που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα προς τις συνιστώσες.

3.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α) Με τη γραφική μέθοδο

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.4α):

$F_1 = 4$ daN $F_2 = 20$ daN $\ell = 2$m



Σχήμα 3.4α *Η συνισταμένη γραφικά δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων*

Ορίζουμε τις κλίμακες μηκών: 1cm : 25 cm
δυνάμεων : 1cm : 4 daN

Η διαδικασία είναι η ίδια με αυτή των δύο παραλλήλων και ομορρόπων δυνάμεων .

Προκύπτει επομένως:

$\Sigma = 4 \times 4$ daN $\ell_1 = 10 \times 25$ cm $\ell_2 = 2 \times 25$ cm

$\Sigma = 16$ daN **$\ell_1 = 250$ cm** **$\ell_2 = 50$ cm**

β) Με την αναλυτική μέθοδο (σχ. 3.4α):

Η συνισταμένη έχει μέτρο :

$$\Sigma = F_2 - F_1$$

Η διεύθυνσή της συμπίπτει με τη διεύθυνση των συνιστωσών και η φορά της με τη φορά της μεγαλύτερης συνιστώσας. Για τον προσδιορισμό του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης, εφαρμόζουμε το θεώρημα των ροπών ως προς το σημείο Β:

$$M_\Sigma = M_{F1} + M_{F2}$$

$$0 = F_1 \cdot \ell_1 - F_2 \cdot \ell_2 \qquad F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2 \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

Κατά συνέπεια, καταλήγουμε στη διατύπωση:

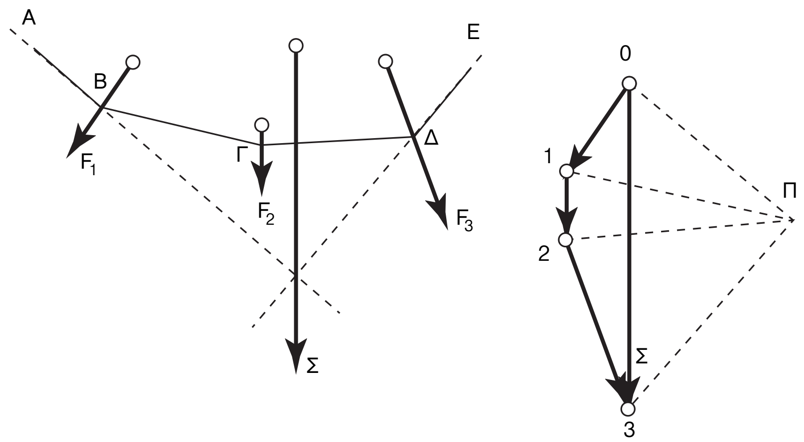
Η συνισταμένη έχει: α) μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των συνιστωσών, β) την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά, αυτή της μεγαλύτερης, γ) το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στην προέκταση της ευθείας, που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, προς το μέρος της μεγαλύτερης και δ) οι αποστάσεις της από τις συνιστώσες, είναι αντιστρόφως ανάλογες προς αυτές.

3.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΥΧΟΥΣΩΝ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Γραφική μέθοδος:

Έστω οι δυνάμεις (σχ. 3.5 α):

$F_1 = 3$ daN $\qquad F_2 = 2$ daN $\qquad F_3 = 5$daN



Σχήμα 3.5α *Σύνθεση τυχουσών ομοεπίπεδων δυνάμεων*

Ορίζουμε κλίμακα: 1cm : 2daN

Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3, αρχίζοντας από ένα τυχόν σημείο Ο και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο.

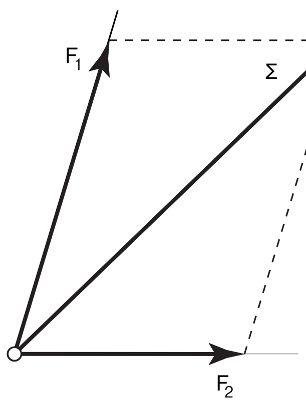
Παίρνουμε έναν πόλο και φέρνουμε τις πολικές ακτίνες π-0, π-1, π-2 και π-3.

Αρχίζοντας από το τυχόν σημείο Α, φέρνουμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλες αντίστοιχα προς τις πολικές ακτίνες π-0, π-1, π-2, π-3 και σχηματίζουμε το σχοινοπολύγωνο Α-Β-Γ-Δ-Ε. Το σημείο τομής των προεκτάσεων των Α-Β και Δ-Ε προσδιορίζει ένα σημείο της διεύθυνσης της συνισταμένης Σ.

3.6 ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η ανάλυση μιας δύναμης που ενεργεί σε ένα σώμα, αποσκοπεί στον προσδιορισμό ενός συστήματος δυνάμεων, το οποίο, όταν ενεργεί στο σώμα, επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της αρχικής δύναμης. Οι δυνάμεις του συστήματος ονομάζονται **συνιστώσες** και η εργασία που περιγράψαμε, **ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες.**

α) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες, των οποίων είναι γνωστές οι διευθύνσεις (σχ. 3.6 α).

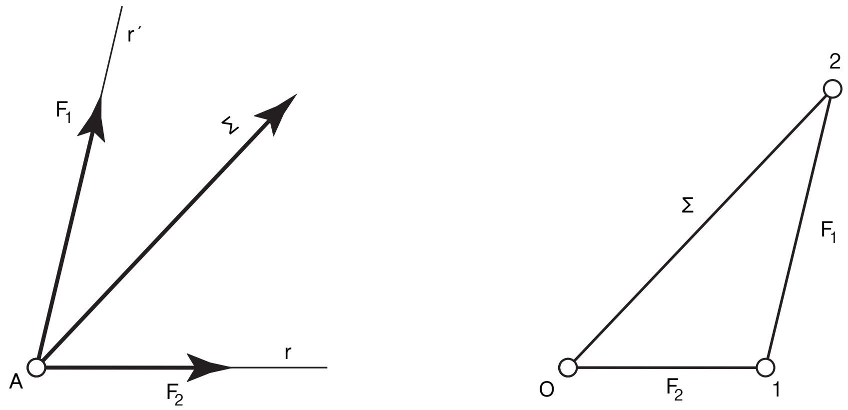


Σχήμα 3.6α *Ανάλυση δύναμης: α) περίπτωση*

Με γνωστές τις διευθύνσεις των συνιστωσών σχηματίζουμε, κατά τα γνωστά από τη σύνθεση των δυνάμεων, το παραλληλόγραμμο και προσδιορίζουμε τις συνιστώσες F_1, F_2.

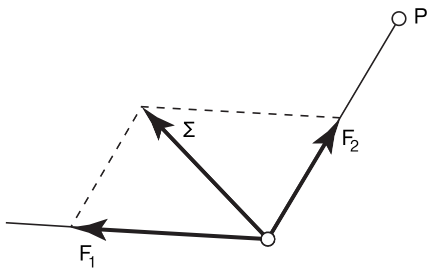
Μία δεύτερη ενδιαφέρουσα λύση του ίδιου προβλήματος, περιγράφουμε παρακάτω:

Από ένα τυχόν σημείο Ο φέρνουμε (σχ. 3.6 α´) την 0-2 ίση και παράλληλη προς τη Σ. Από τα σημεία Ο και 2 φέρνουμε αντίστοιχα τις παράλληλες προς τις διευθύνσεις r, r´. Το σημείο τομής 1 προσδιορίζει τις δύο συνιστώσες F_2, F_1, οι οποίες μεταφέρονται στις διευθύνσεις τους r, r´.



Σχήμα 3.6α´ *Ανάλυση δύναμης: α) περίπτωση - δεύτερη λύση*

β) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστή τη διεύθυνση της πρώτης και ένα σημείο P της διεύθυνσης της δεύτερης.

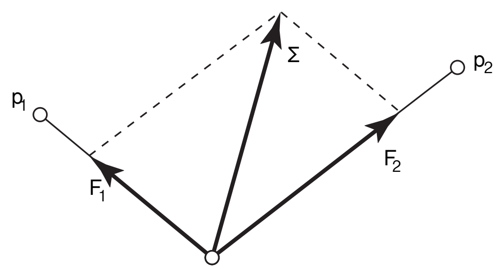


Σχήμα 3.6β *Ανάλυση δύναμης: β) περίπτωση*

Ενώνουμε το σημείο Ρ με το σημείο εφαρμογής της Σ και ανάγουμε το πρόβλημα στην περίπτωση α).

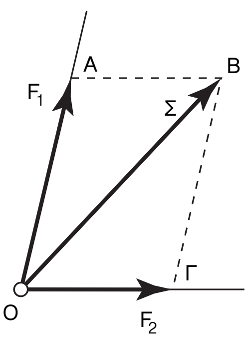
γ) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστό από ένα σημείο των διευθύνσεων των συνιστωσών.

Ανάγεται με ευκολία στην περίπτωση α).



Σχήμα 3.6γ *Ανάλυση δύναμης: γ) περίπτωση*

δ) Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες με γνωστά το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά της μίας.

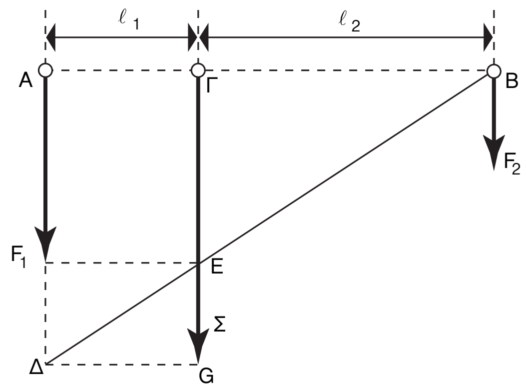


Σχήμα 3.6δ *Ανάλυση δύναμης: δ) περίπτωση*

Με γνωστές τις δυνάμεις Σ, F_1, σχηματίζουμε το τρίγωνο ΟΑΒ. Η ζητούμενη συνιστώσα F_2 θα είναι παράλληλη προς την ΑΒ και θα έχει σημείο εφαρμογής αυτό των Σ, F_1, δηλαδή το Ο.

3.7 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ (ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Έστω (σχ. 3.7α): Σ = 20 daN $\ell_1 = 2$ m $\ell_2 = 4$ m



Σχήμα 3.7α *Ανάλυση δύναμης σε δύο παράλληλες δυνάμεις*

α) Πρώτη γραφική μέθοδος

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών: 1 cm :1 m
δυνάμεων: 1 cm : 5 daN

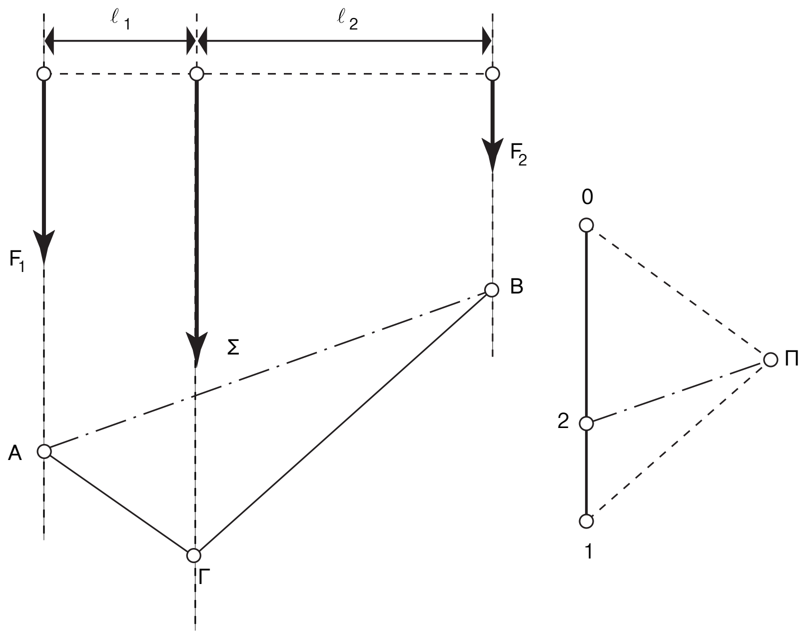
Σχεδιάζουμε τη δύναμη και τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2, στις οποίες φέρουμε τις δύο διευθύνσεις των συνιστωσών. Στη διεύθυνση της συνιστώσας F_1 μεταφέρουμε τη δύναμη Σ (είναι η ΑΔ) και φέρνουμε την ευθεία ΔΒ. Επί της συνισταμένης Σ προσδιορίζονται έτσι δύο ευθύγραμμα τμήματα: το ΓΕ = F_1 που μεταφέρεται στο σημείο Α και το EG = F_2 που μεταφέρεται στο Β. Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν:

F_1 = 2,6 X 5 daN F_2 = 1,3 X 5 daN

F_1 = 13 daN **F_2 = 6,5 daN**

β) Δεύτερη γραφική μέθοδος

Σημειώνουμε τις κλίμακες, τη θέση της Σ και τις διευθύνσεις των συνιστωσών (σχ. 3.7β).



Σχήμα 3.76 *Δεύτερη γραφική μέθοδος*

Από τυχαίο σημείο Ο σχεδιάζουμε τη δύναμη Σ (είναι η Ο-1) και από τυχαίο πόλο π φέρνουμε τις πολικές ακτίνες π-0, π-1.

Από τυχαίο σημείο Γ που βρίσκεται στη διεύθυνση της Σ φέρνουμε τις ΓΑ και ΓΒ παράλληλες αντίστοιχα στις πολικές ακτίνες π-0 και π-1. Ενώνουμε τα σημεία Α και Β και φέρνουμε από τον πόλο π την πολική ακτίνα π-2 παράλληλη προς την ΑΒ. Η Ο-2 προσδιορίζει τη συνιστώσα F_1 και η 2-1 την F_2.

Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν:

$F_1 = 2{,}6 \text{ X } 5 \text{ daN}$ $\qquad F_2 = 1{,}3 \text{ X } 5 \text{ daN}$

$\mathbf{F_1 = 13 \text{ daN}}$ $\qquad \mathbf{F_2 = 6{,}5 \text{ daN}}$

γ) Αναλυτική μέθοδος

$\Sigma = F_1 + F_2 = 20 \text{ daN}$ $\qquad \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{4 \text{ m}}{2 \text{ m}}$

Από το σύστημα: $F_1 + F_2 = 20 \text{ daN}$

$F_1 = 2\,F_2$

προκύπτει :

$2\ F_2 + F_2 = 20\ daN$ $\quad\quad 3\ F_2 = 20 daN$

$F_2 = \dfrac{20\ daN}{3}$

$\mathbf{F_2 = 6{,}66\ daN}$

$F_1 + F_2 = 20\ daN$

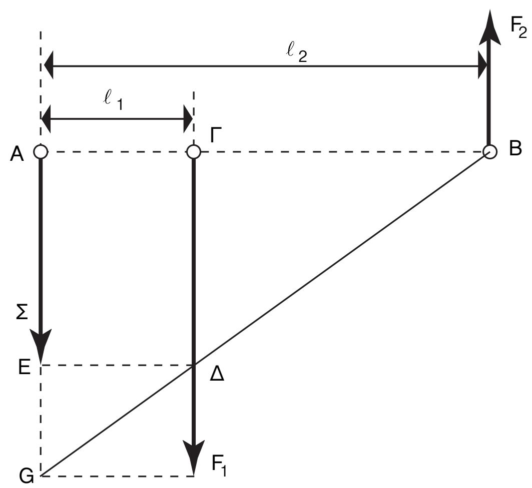
$F_1 = 20\ daN - 6{,}66\ daN$

$\mathbf{F_1 = 13{,}34\ daN}$

Συγκρίνετε τα αποτελέσματα γραφικής και αναλυτικής μεθόδου και αιτιολογήστε τις διαφορές.

3.8 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ (ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Έστω (σχ. 3.8α):



Σχήμα 3.8α *Η γραφική μέθοδος*

$\Sigma = 12\ daN$ $\quad\quad \ell_1 = 2m$ $\quad\quad \ell_2 = 6m$

α) Με τη γραφική μέθοδο

Ορίζουμε τις κλίμακες: μηκών: 1 cm :1 m
δυνάμεων: 1 cm : 4 daN

Σχεδιάζουμε τη δύναμη Σ, σημειώνουμε τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2 καθώς και τις διευθύνσεις των συνιστωσών.

Μεταφέρουμε τη Σ στη διεύθυνση της πρώτης συνιστώσας (είναι η ΓΔ), φέρνουμε τη ΒΔ και την προεκτείνουμε μέχρι να συναντήσει τη διεύθυνση της Σ στο σημείο G.

Η απόσταση AG εκπροσωπεί τη συνιστώσα F_1 στο σημείο Γ και η EG την F_2 στο σημείο Β.

Με αντίστοιχες μετρήσεις προκύπτουν :

F_1 = 4,5 X 4 daN $\quad$ F_2 =1,5 X 4 daN

F_1 = 18 daN $\quad$ **F_2 = 6 daN**

β) Με την αναλυτική μέθοδο

$\Sigma = F_1 - F_2 = 12 \text{ daN}$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ m}}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 3$$

Επομένως:

$F_1 - F_2 = 12 \text{ daN}$

$F_1 = 3 F_2$

$3 F_2 - F_2 = 12 \text{ daN}$

$2 F_2 = 12 \text{ daN}$

$$F_2 = \frac{12 \text{ daN}}{2}$$

$\underline{F_2 = 6 \text{ daN}}$

$F_1 - F_2 = 12$ daN

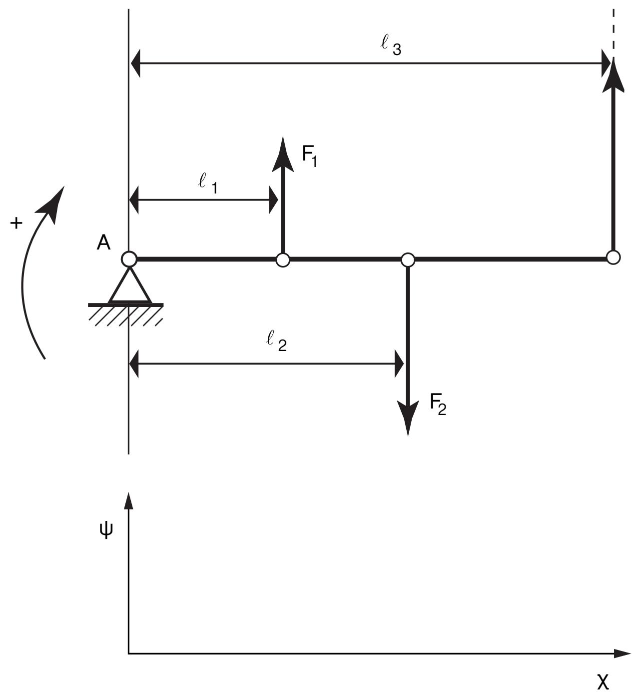
$F_1 = 12$ daN $+ F_2$

$F_1 = 12$ daN $+ 6$ daN

$\underline{F_1 = 18 \text{ daN}}$

3.9 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για να ισορροπήσει ένα στερεό σώμα (σχ.3.9α), στο οποίο ενεργούν πολλές δυνάμεις F_1, F_2 …, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων (Σ F) και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων (ΣΜ), να είναι ίσες με μηδέν.



Σχήμα 3.9α *Συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος*

Δηλαδή :

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση και η δεύτερη την περιστροφική.

Όταν οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες, οι παραπάνω συνθήκες ισορροπίας παίρνουν τις αναλυτικές εκφράσεις :

$\Sigma F = 0\}$	ομοεπίπεδες δυνάμεις $\rightarrow$	$\{\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_\psi = 0$
$\Sigma M = 0\}$		$\{\Sigma M = 0$	

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (σχ. 3.9α)

$\Sigma F_X = 0$

$\Sigma F_\psi = 0$

$\Sigma F_\psi = F1 - F_2 + F_3 = 0$

$\Sigma M_A = 0$

$\Sigma\ M_A = - F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 - F_3 \cdot \ell_3$

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΡΙΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- **Η σύνθεση δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων** που ενεργούν σε ένα σώμα αποσκοπεί στον προσδιορισμό μίας δύναμης, της συνισταμένης, η οποία όταν ενεργεί στο σώμα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των αρχικών δυνάμεων.

α. Δυνάμεις συγγραμμικές και ομόφορες :

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση :

$\mathbf{\Sigma = F_1 + F_2}$

Η διεύθυνση και η φορά είναι αυτές των συνιστωσών.

β. Δυνάμεις συγγραμικές και αντίφορες:

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση :

$\mathbf{\Sigma = F_1 - F_2}$

Η διεύθυνση είναι η διεύθυνση των συνιστωσών και η φορά αυτή της μεγαλύτερης σε μέτρο συνιστώσας.

γ. Δυνάμεις υπό γωνία φ=90°

$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

$$εφθ = \frac{F_2}{F_1}$$

- Η συνισταμένη πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων με κοινό σημείο εφαρμογής προσδιορίζεται από τις σχέσεις :

$$Σ = \sqrt{(ΣF_χ)^2 + (ΣF_ψ)^2}$$

$$εφθ = \frac{ΣF_ψ}{ΣF_χ}$$

- Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και ομοφόρων δυνάμεων έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των συνιστωσών, έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τις συνιστώσες, το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών, πλησιέστερα προς τη μεγαλύτερη και διαιρεί την ευθεία που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών σε τμήματα αντιστρόφως ανάλογα προς τις συνιστώσες.
- Η συνισταμένη δύο παραλλήλων και αντιρρόπων δυνάμεων έχει μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των συνιστωσών, έχει την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά αυτή της μεγαλύτερης, το σημείο εφαρμογής της βρίσκεται στη προέκταση της ευθείας που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των συνιστωσών προς το μέρος της μεγαλύτερης και οι αποστάσεις της από τις συνιστώσες είναι αντιστρόφως ανάλογες προς αυτές.

- Η ανάλυση μίας δύναμης σε δύο παράλληλες συνιστώσες συνοψίζεται στις σχέσεις :

$$Σ = F_1 + F_2 \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad \text{(συνιστώσες ομόρροπες)}$$

$$Σ = F_1 - F_2 \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad \text{(συνιστώσες αντίρροπες)}$$

- Για να ισορροπήσει ένα στερεό σώμα, στο οποίο ενεργούν πολλές δυνάμεις F_1, F_2 …. θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων (ΣF), και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων (ΣΜ) να είναι ίσες με μηδέν .
Δηλαδή:

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Η πρώτη συνθήκη αποκλείει τη μεταφορική κίνηση και η δεύτερη την περιστροφική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

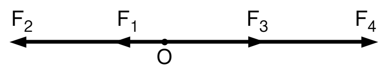
1. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη με την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο των ομοευθειακών δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν στο σώμα Ο.

F_1 =2 daN

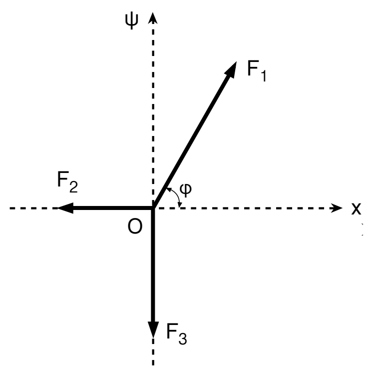
F_2 = 7 daN

F_3 = 4 daN

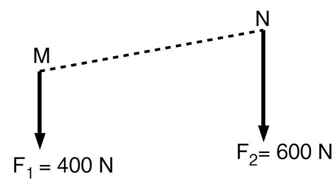
F_4 = 9 daN



2. Να βρεθεί το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων F_1, F_2, F_3 που ενεργούν στο ίδιο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν F_1 = 50 N, F_2 = 10 N, $F_3 = 20\sqrt{3}$ N , και φ = 60°.



3. Να προσδιορίσετε, με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο, το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2 που φαίνονται στο σχήμα, όταν η απόσταση ΜΝ είναι ίση με 0,70 m.

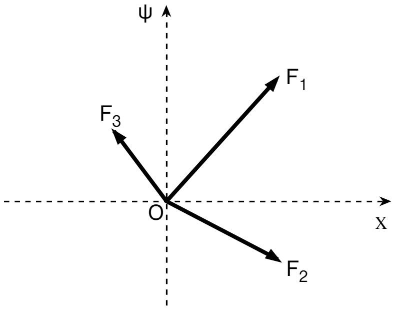


4. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος F_1, F_2, F_3, όταν:

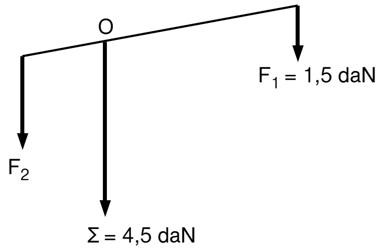
$F_{1x} = 3{,}5$ N $\quad$ $F_{1\psi} = 1{,}5$ N

$F_{2x} = 2$ N $\quad$ $F_{2\psi} = -1$N

$F_{3x} = -1{,}5$ N $\quad$ $F_{3\psi} = 3{,}5$ N



5. Να αναλύσετε τη δύναμη Σ στις συνιστώσες $F_1 = 1{,}5$ daN και F_2, αν η απόσταση της F_1 από το σημείο O είναι ίση με 100 cm.



6. Να προσδιορίσετε τη δύναμη F_2, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία του συτήματος του σχήματος, αν r = 25 cm και R = 40 cm.