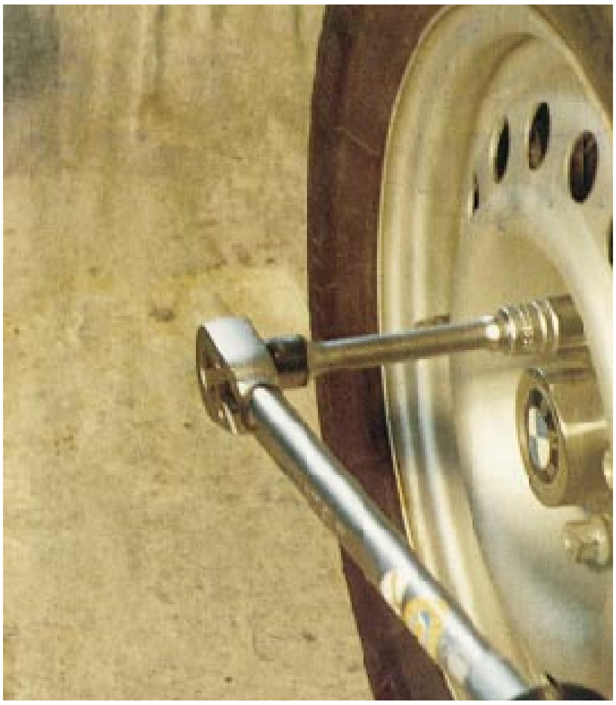


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΡΟΠΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

2.1 Ροπή δύναμης

2.2 Θεώρημα των ροπών ή του Varignon

2.3 Ζεύγος δυνάμεων - Ροπή ζεύγους

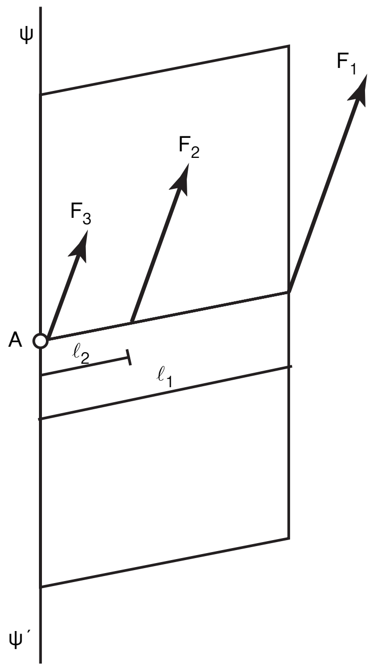
2.4 Μετάθεση δύναμης σε διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της

Επιδιωκόμενοι στόχοι:

- Να ορίζετε τη ροπή δύναμης και τη ροπή ζεύγους, να περιγράφετε τα χαρακτηριστικά τους και να αναφέρετε παραδείγματα από την πράξη.
- Να περιγράφετε το θεώρημα των ροπών και τον τρόπο μετάθεσης δύναμης παράλληλα προς τη διεύθυνσή της.
- Να λύνετε πρακτικά προβλήματα, σχετικά με όσα αναφέρονται παραπάνω, να συγκρίνετε και να μελετάτε τα αποτελέσματα, ώστε να καταλήγετε στη διατύπωση χρήσιμων συμπερασμάτων.

2.1 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Η πόρτα του σπιτιού μας περιστρέφεται περί τον άξονά της, αν ασκήσουμε σε αυτήν μία δύναμη F_1, τέτοια που ο φορέας της να μη διέρχεται από τον άξονα περιστροφής της ψ - ψ´ (σχ. 2.1α). Δεν θα περιστραφεί, αν συμβεί ο φορέας της δύναμης, να τέμνει τον άξονα αυτόν. (Η δύναμη F_3 δεν περιστρέφει την πόρτα).



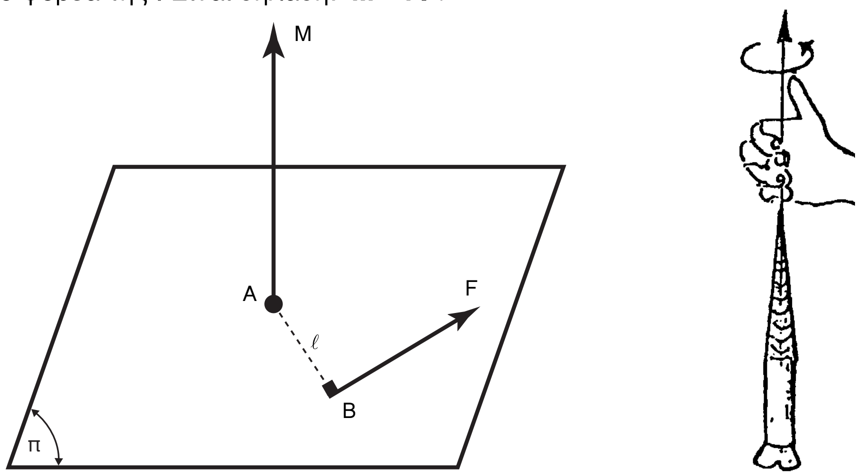
Σχήμα 2.1α *Η ροπή δύναμης.*

Στο παραπάνω παράδειγμα διαπιστώνουμε, ότι για την περιστροφή ενός σώματος σημαντικό ρόλο παίζουν, εκτός από τις δυνάμεις που επενεργούν σε αυτό, και η απόσταση των δυνάμεων από τον άξονα περιστροφής.

Με τα φαινόμενα της περιστροφής συνδέεται το φυσικό μέγεθος, που ονομάζεται ροπή δύναμης .

Ονομάζουμε λοιπόν **ροπή**

δύναμης F ως προς σημείο A και τη συμβολίζουμε με M, το διάνυσμα που έχει: α) **διεύθυνση** (φορέα) την κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης F και το σημείο A (σχ. 2.1β)**,** β) **φορά**, αυτήν που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία*, και γ) **μέτρο**, το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση του σημείου A από το φορέα της . Είναι δηλαδή: $\mathbf{M = F.}\ \ell$



Σχήμα 2.16 *Ροπή δύναμης ως προς σημείο*

Από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνεται ότι: η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο A, σαν μέγεθος ισοδυναμεί προς το διπλάσιο εμβαδό του τριγώνου AB F. Επανερχόμενοι στο αρχικό παράδειγμα (σχ. 2.1α), έχουμε:

$$\mathbf{MF_1 = F_1 \cdot \ell_1 \quad MF_2 = F_2 \cdot \ell_2}$$

Αν $F_1 = F_2$ και επειδή $\ell_1 > \ell_2$, θα είναι: $M_{F1} > M_{F2}$, που σημαίνει ότι η πόρτα κλείνει με μεγαλύτερη ευκολία. Από τον ορισμό της ροπής μίας δύναμης ως προς σημείο, συνάγουμε :

- Η ροπή μιας δύναμης δεν μεταβάλλεται, όταν η δύναμη ολισθαίνει κατά μήκος του φορέα της.
- Η ροπή μιας δύναμης ως προς σημείο, είναι μηδενική όταν η δύναμη είναι μηδενική ή όταν ο φορέας της διέρχεται από το σημείο A (αναφορά των ροπών) .

*Δηλαδή έχει φορά που συμπίπτει με τη φορά που προχωρεί δεξιόστροφος κοχλίας, περιστρεφόμενος κατά τη φορά περιστροφής του επιπέδου (π), υπό την επίδραση της δύναμης F.

Το σημείο αναφοράς των ροπών, (ως προς το οποίο θα παίρνουμε τις ροπές των δυνάμεων), δύναται να είναι τυχαίο επί του επιπέδου των, για τη λύση των προβλημάτων όμως, επιλέγουμε σημείο στο οποίο να διέρχονται όσο το δυνατόν περισσότερες δυνάμεις ώστε οι αποστάσεις τους, να μπορούν να υπολογισθούν εύκολα.

- Υπό την προϋπόθεση, ότι ροπές ενεργούν επί του ίδιου σημείου ενός σώματος, είναι προφανές, ότι “ροπές της ίδιας φοράς προσθέτονται, ενώ ροπές αντίθετης φοράς αφαιρούνται”.

Έτσι, η συνισταμένη ροπή, είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που επενεργούν στο αυτό (ίδιο) σημείο του σώματος .

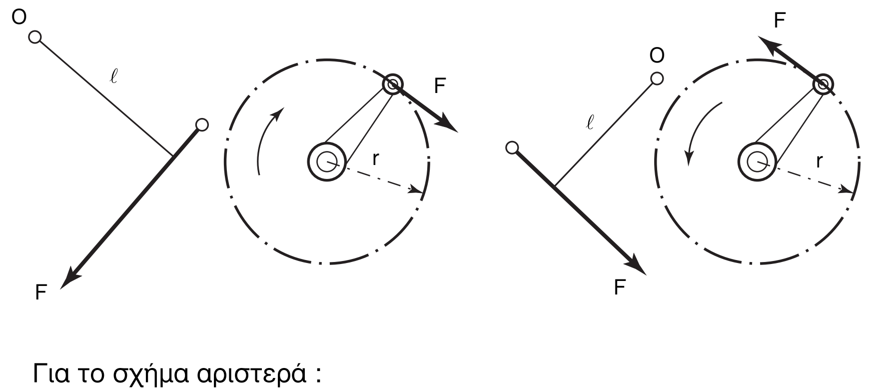
Γενική παρατήρηση:

Για τη σωστή λύση των προβλημάτων, δεν έχει σημασία ποιά φορά θα επιλέξουμε ως θετική, αλλά αρκεί η επιλογή που θα κάνουμε, να παραμείνει η ίδια μέχρι τέλους.

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν ορίσουμε συμβατικά, ως **θετική** τη ροπή που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και **αρνητική** στην αντίθετη περίπτωση, να υπολογίσετε τις ροπές των δυνάμεων, που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με κλίμακες: μηκών 1 cm: 1 m
δυνάμεων 1 cm: 20 daN

Με τη γραφική μέθοδο



Για το σχήμα αριστερά :

$M = F \cdot \ell$

$M = 3 \cdot 20\ daN \cdot 2{,}5 \cdot 1m$

$M = 150 daN \cdot m$

Για το σχήμα δεξιά :

$M = - F \cdot \ell$

$M = - 2{,}5 \cdot 20\ daN \cdot 2 \cdot 1m$

$M = - 100\ daN \cdot m$

Με την αναλυτική μέθοδο

Για το σχήμα αριστερά :

Αν $F = 6\ daN$

$\ell = 2{,}5\ m$

τότε: $M = F \cdot \ell = 60\ daN \cdot 2{,}5\ m$

$M = 150\ daN$

Για το σχήμα δεξιά:

Αν $F = 50\ daN$

$\ell = 2m$

τότε: $M = - F \cdot \ell$

$M = - 50\ daN \cdot 2m$

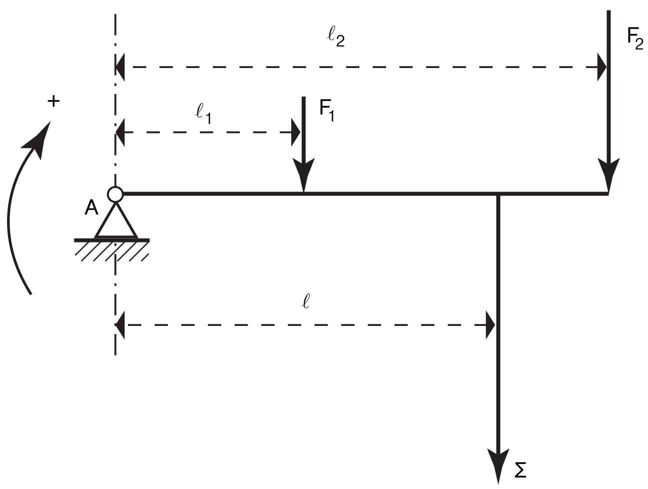
$M = - 100\ daN$

2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ Ή ΤΟΥ VARIGNON

Το θεώρημα αφορά τη **σύνθεση των ροπών** δύο ή περισσοτέρων δυνάμεων , δηλαδή –κατ΄ αναλογία της σύνθεσης των δυνάμεων– τον εντοπισμό μιας συνισταμένης ροπής, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα, η οποία να αντικαθιστά τις επιμέρους ροπές, υπό την προϋπόθεση, ότι θα επιφέρει στο σώμα το ίδιο αποτέλεσμα.

Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής: **Η ροπή της συνισταμένης ενός συστήματος ομοεπιπέδων δυνάμεων, ως προς ένα σημείο του επιπέδου ή ως προς ένα άξονα, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα.**

Σύμφωνα με το σχ. 2.2 α, προκύπτει ότι:



Σχήμα 2.2α *Το θεώρημα των ροπών*

Οι ροπές όλων των δυνάμεων, συνιστωσών και συνισταμένης, ως προς το σημείο Α, είναι οι:

$MF_1 = F_1 \cdot \ell_1$

$MF_2 = F_2 \cdot \ell_2$

$M_\Sigma = \Sigma \cdot \ell$

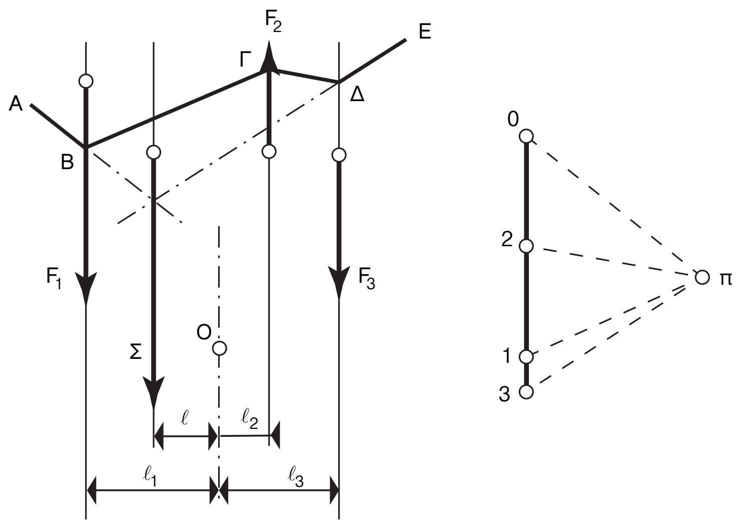
Επομένως, κατά το θεώρημα:

$\mathbf{M_\Sigma = M_{F1} + M_{F2}}$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Varignon, ως προς ένα σημείο Ο του επιπέδου, του συστήματος των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, που φαίνονται στο σχήμα, χρησιμοποιώντας τις κλίμακες: μηκών: 1cm : 1m

δυνάμεων: 1cm: 5 daN



Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο 0-1-2-3, αρχίζοντας από ένα τυχόν σημείο 0 και προσδιορίζουμε τη συνοσταμένη Σ κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο.

Παίρνουμε ένα σημείο π, το οποίο ονομάζεται **πόλος** και φέρνουμε τις **πολικές ακτίνες** π–0, π–1, π–2, π–3.

Αρχίζοντας από το τυχόν σημείο Α φέρνουμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλες εντίστοιχα προς τις πολικές ακτίνες π–0, π–1, π–2, π–3 και σχηματίζουμε το **σχοινοπολύγωνο** Α–Β–Γ–Δ–Ε. Το σημείο τομής των προεκτάσεων των Α–Β και Δ–Ε προσδιορίζει **ένα σημείο της διεύθυνσης της συνισταμένης Σ**. Αν Ο είναι το σημείο αναφοράς και ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ είναι οι αποστάσεις, από αυτό, των συνιστωσών αντίστοιχα F_1, F_2, F_3 και της συνισταμένης Σ, προκύπτουν:

$$M_{F1} = F_1 \cdot \ell_1 = -3 \cdot 5\ \text{daN} \cdot 1{,}8 \cdot 1\ \text{m} = -27\ \text{daN} \cdot \text{m}$$

$$M_{F2} = F_2 \cdot \ell_2 = -1{,}5 \cdot 5\ \text{daN} \cdot 0{,}6 \cdot 1\ \text{m} = -4{,}5\ \text{daN} \cdot \text{m}$$

$$M_{F3} = F_3 \cdot \ell_3 = 2 \cdot 5 \cdot \text{daN} \cdot 1{,}5 \cdot 1\ \text{m} = 15\ \text{daN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\Sigma} = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} = -16{,}5\ \text{daN} \cdot \text{m}$$

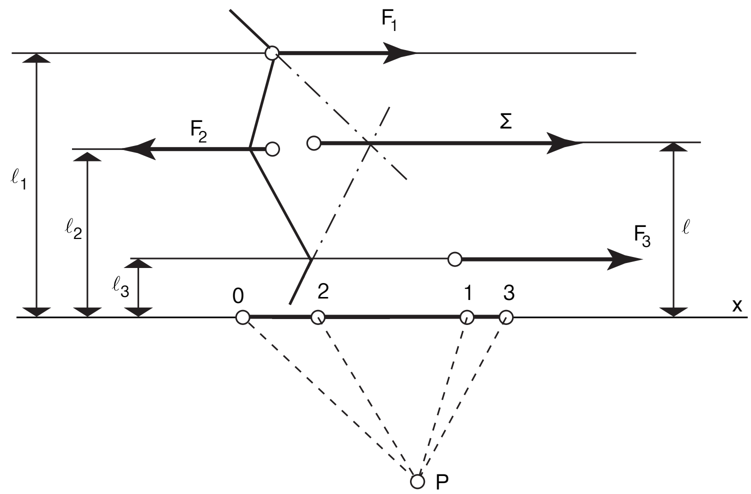
$M_{\Sigma} = -3{,}5 \cdot 5 \text{ daN} \cdot 0{,}94 \cdot 1 \text{ m}$

$\mathbf{M\Sigma = -16{,}45 \text{ daN} \cdot m}$

❑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Varignon, ως προς τον άξονα x του συστήματος των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, που φαίνονται στο σχήμα, χρησιμοποιώντας τις κλίμακες: μηκών: 1 cm : 1 m

δυνάμεων: 1 cm : 15 daN



Μετά τον προσδιορισμό της συνισταμένης Σ με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και τους συμβολισμούς που φαίνονται στο σχήμα, προκύπτουν:

$M_{F1} = F_1 \cdot \ell_1 = 3 \cdot 15 \text{ daN} \cdot 3{,}6 \cdot 1 \text{ m} = 162 \text{ daN} \cdot \text{m}$

$M_{F2} = -F_2 \cdot \ell_2 = -2.15 \text{ daN} \cdot 2{,}3 \cdot 1 \text{ m} = -69 \text{ daN} \cdot \text{m}$

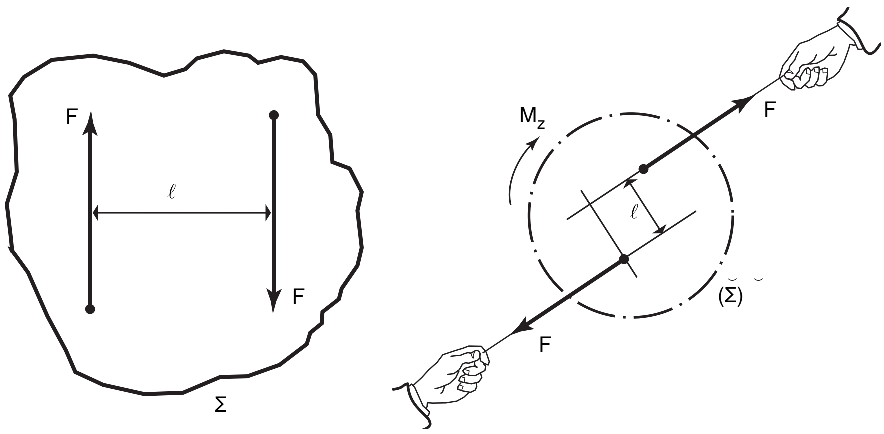
$M_{F3} = F_3 \cdot \ell_3 = 2{,}5 \cdot 15 \text{ daN} \cdot 0{,}8 \cdot 1\text{m} = 30 \text{ daN} \cdot \text{m}$

$M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} = 123 \text{ daN} \cdot \text{m}$

$M_{\Sigma} = \Sigma \cdot \ell = 3{,}5 \cdot 15 \text{ daN} \cdot 2{,}35 \cdot 1 \text{ m} = \mathbf{123{,}37 \text{ daN} \cdot m}$

2.3 ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ - ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ

Ζεύγος δυνάμεων, είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων που είναι παράλληλες και αντίφορες, με το ίδιο μέτρο και οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος (σχ. 2.3α).



Σχήμα 2.3α *Ζεύγος δυνάμεων - Ροπή ζεύγους*

Υπό την επίδραση ζεύγους δυνάμεων γίνεται η κίνηση του τιμονιού του αυτοκινήτου, η κίνηση της χειρολαβής της πόρτας, η κίνηση του εκπωματισμού κ.λ.π.

Ροπή ζεύγους είναι το γινόμενο μίας εκ των δύο δυνάμεων επί την απόσταση μεταξύ τους :

$$M_Z = F \cdot \ell$$

Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι για το οποιοδήποτε σημείο Α του επιπέδου των δυνάμεων του ζεύγους που θα επιλέξουμε, η ροπή M_Z του ζεύγους είναι διάνυσμα, που έχει σαν:

α) Διεύθυνση (φορέα), την κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων του ζεύγους.

β) Φορά, αυτήν που καθορίζεται απο τη φορά των δυνάμεων του ζεύγους με βάση τον κανόνα του δεξιοστρόφου κοχλία και

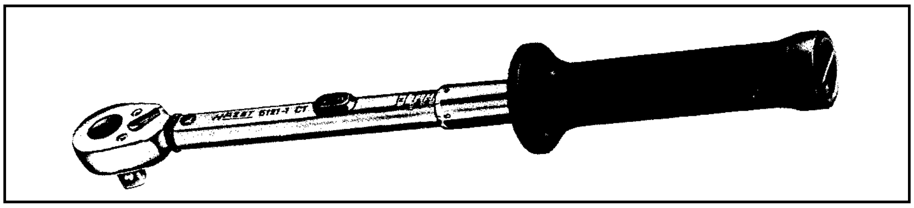
γ) Μέτρο, το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων και αντιρρόπων αυτών δυνάμεων.

Αποδεικνύεται έτσι ότι :

α) Η Συνισταμένη ενός ζεύγους δυνάμεων έχει μηδενικό μέτρο.

β) Ο φορέας της βρίσκεται σε άπειρη απόσταση.

Πίνακας Μετατροπής μονάδων Ροπής



ft/lbs.	Nm
1	1,4
2	2,7
3	4,1
4	5,4
5	6,8
6	8,1
7	9,5
8	10,9
9	12,2
10	13,6
15	20,4
20	27,1
25	33,9
30	40,7
35	47,5
40	54,3
45	61,1
50	67,9
60	81,4
70	95,0
80	108,6
90	122,1
100	135,7
120	162,8
140	190,0
160	217,1
180	244,2
200	271,4

kpm	ft/lbs.	Nm	Nm	ft/lbs.	kpm
22,4	162,1	220	210	154,8	21,4
20,4	147,4	200	190	140,0	19,4
18,4	132,7	180	170	125,3	17,3
16,3	117,9	160	150	110,6	15,3
14,3	103,2	140	130	95,8	13,3
12,2	88,4	120	110	81,1	11,2
10,2	73,7	100	95	70,0	9,7
9,2	66,3	90	85	62,7	8,7
8,2	59,0	80	75	55,3	7,7
7,1	51,6	70	65	47,9	6,6
6,1	44,2	60	55	40,5	5,6
5,1	36,9	50	45	33,2	4,6
4,1	29,5	40	35	25,8	3,6
3,1	22,1	30	25	18,4	2,6
2,1	14,7	20	15	11,1	1,5
1,0	7,4	10	9	6,6	0,9
0,8	5,9	8	7	5,2	0,7
0,6	4,4	6	5	3,7	0,5
0,4	3,0	4	3	2,2	0,3
0,2	1,5	2	1	0,7	0,1

1 Nm ≙ 0,1019 kpm
1 kpm ≙ 9,807 Nm
1 ft/lbs. ≙ 1,3569 Nm
1 Nm ≙ 0,7370 ft/lbs.

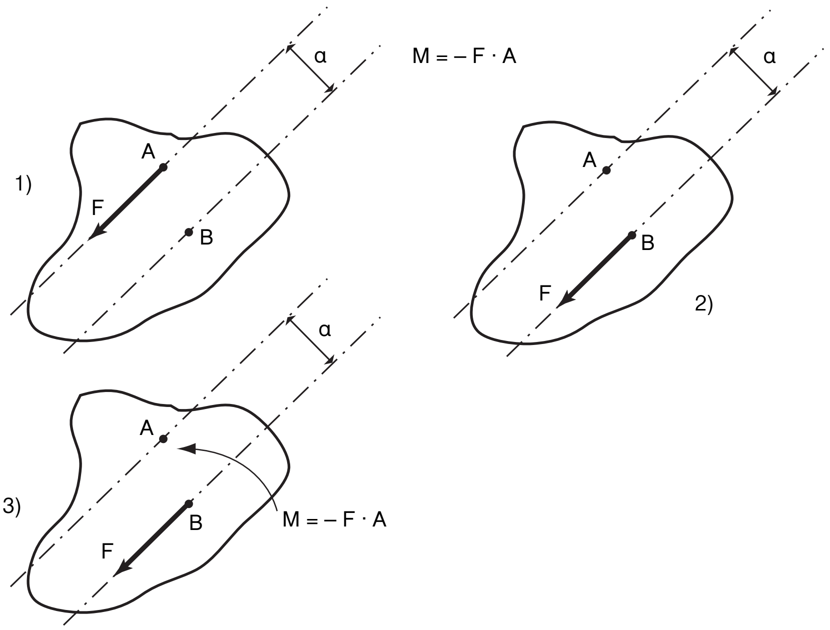
Σχήμα 2.36 *Πίνακας μετατροπής μονάδων ροπής*

2.4 ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΠΡΟΣ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ

Αν η δύναμη F, που ενεργεί στο σημείο A του σώματος (σχ. 2.4α -1), μετατεθεί στο σημείο B σε μία διεύθυνση παράλληλη προς την αρχική της (σχ. 2.4α -2) –που απέχει από αυτήν απόσταση (α)– διαπιστώνεται, ότι η δύναμη στη νέα της θέση, τείνει να περιστρέψει το σώμα ως προς το σημείο A, δηλαδή εξασκεί στο σώμα μία θετική ροπή:

$$M = F \cdot a$$

Αυτό σημαίνει, ότι για να βρίσκεται το σώμα στην αρχική του κατάσταση, όταν σε αυτό ενεργούσε η δύναμη F στο σημείο A, θα πρέπει να εξαλείψουμε την επίδραση της θετικής αυτής ροπής, εξασκώντας στο σώμα μία ίση και αρνητική ροπή (σχ. 2.4α -3):

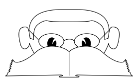


Σχήμα 2.4α *Μετάθεση δύναμης*

Επομένως : **Είναι δυνατή η μεταφορά μιας δύναμης σε μία διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της, εφόσον η μεταφορά της αυτή στη νέα θέση συνοδευτεί με την προσθήκη μιας ροπής, ίσης και αντίθετης προς την αρχική της ροπή που δημιούργησε η δύναμη αυτή.**

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Ονομάζουμε **ροπή δύναμης F ως προς σημείο A** και τη συμβολίζουμε με M, το διάνυσμα που έχει **διεύθυνση** (φορέα) τη κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης F και το σημείο A, **φορά** αυτή που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, και **μέτρο** το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση του σημείου A από το φορέα της. Είναι δηλαδή: $\mathbf{M = F \cdot \ell}$
- Το θεώρημα των ροπών ή του Varignon διατυπώνεται ως εξής: Η ροπή της συνισταμένης ενός συστήματος ομοεπιπέδων δυνάμεων, ως προς ένα σημείο του επιπέδου ή ως προς ένα άξονα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών, ως προς το ίδιο σημείο ή ως προς τον ίδιο άξονα.
- Ζεύγος δυνάμεων είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων που ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος , έχουν το ίδιο μέτρο και είναι παράλληλες και αντίφορες.
- Ροπή ζεύγους είναι το γινόμενο μίας εκ των δύο δυνάμεων επί την απόσταση μεταξύ τους .
- Είναι δυνατή η μεταφορά μίας δύναμης σε μία διεύθυνση παράλληλη προς τη διεύθυνσή της, εφόσον η μεταφορά της συνοδευτεί με τη προσθήκη μίας ροπής, ίσης και αντίθετης της ροπής που δημιουργεί η δύναμη, όταν βρίσκεται στη νέα της θέση, ως προς την αρχική της.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του VARIGNON στο σύστημα των δυνάμεων του σχήματος, ως προς το σημείο, O (κλίμακες: μηκών 1 cm: 1 m δυνάμεων 1 cm: 15 N).