



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right)$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{4}{14} + \frac{14}{14} - \frac{1}{14} \right) \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{14}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{17}{14} \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left( \frac{9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{6}{6} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \frac{31}{6} = 0. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο  $\nu$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα  $\frac{10}{\nu}$  παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}$$

**Λύση**

Επειδή το κλάσμα  $\frac{10}{\nu}$  παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός  $\nu$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του  $\nu$  είναι  $\nu = 2$  ή  $\nu = 5$ .

- Για  $\nu = 2$ , έχουμε:  $B = \frac{2}{2 - \frac{1}{5}} : \frac{2 - \frac{2}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{9}{5}} : \frac{2 - 1}{9} = \frac{10}{9} : \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \cdot 9 = 10$ .
- Για  $\nu = 5$ , έχουμε:  $B = \frac{2}{5 - \frac{1}{5}} : \frac{5 - \frac{5}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{24}{5}} : \frac{\frac{5}{2}}{9} = \frac{10}{24} : \frac{5}{18} = \frac{10}{24} \cdot \frac{18}{5} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}$ .

### Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό  $\gamma$  ως μειωτέο και τον αριθμό  $\alpha$  ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

#### Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι:  $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{9} = \frac{\gamma}{11} = \omega$ , οπότε θα είναι  $\alpha = 3\omega$ ,  $\beta = 9\omega$  και  $\gamma = 11\omega$ . Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma - \alpha = 56 \Leftrightarrow 11\omega - 3\omega = 56 \Leftrightarrow 8\omega = 56 \Leftrightarrow \omega = 7.$$

Άρα είναι:  $\alpha = 3 \cdot 7 = 21$ ,  $\beta = 9 \cdot 7 = 63$  και  $\gamma = 11 \cdot 7 = 77$ .

### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  κατά το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\text{H}$  έτσι ώστε  $A\Delta = \Delta\text{H}$ . Από το σημείο  $H$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ .

1. Να αποδείξετε ότι:  $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$ .
2. Να βρείτε τη γωνία  $\hat{E}\hat{D}Z$ , αν γνωρίζετε ότι:  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$ .

#### Λύση

1. Επειδή η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας

$\hat{A}$ , θα ισχύει:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ .

Από την παραλληλία των  $AB$  και  $ZH$ , συμπεραίνουμε ότι  $\hat{A}_1 = \hat{H}$  (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει  $\hat{A}_2 = \hat{H}$ , οπότε το τρίγωνο  $A\text{E}H$  είναι ισοσκελές.

Το  $\Delta$  είναι το μέσο της βάσης  $AH$  του ισοσκελούς τριγώνου  $A\text{E}H$ , οπότε η διάμεσος  $E\Delta$  θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $A\text{E}H$ , δηλαδή θα είναι  $E\Delta \perp AH$  και  $\hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$

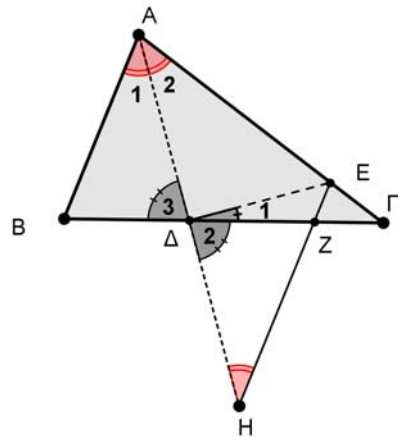
2. Επειδή  $\hat{G}\hat{D}E = \hat{A}\hat{D}E = 90^\circ$ , θα ισχύει:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_3.$$

Η  $\hat{\Delta}_3$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ , δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}_3 = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}$ . Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ.$$



Σχήμα 1

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$ ,  $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$  και  $10^{-1} \cdot 1000$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2.$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2} \\ &= \left( 2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left( 2 \cdot 10^2 \right)^{-2} = \frac{1}{(2 \cdot 10^2)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^4} = \frac{1}{4 \cdot 10000} = \frac{1}{40000} \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

### Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{x-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x-6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x-6-2x+9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν  $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ , οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1, 2 και 3.

### Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνεται ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$ , όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\delta)$  με εξίσωση  $y = 2\lambda x$  και περνάει από το σημείο  $K(2, 8)$ .

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  ανήκουν στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $ΚΛ$ .

### Λύση

(α) Επειδή είναι  $(\varepsilon) \parallel (\delta)$ , οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση  $3\lambda - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$ . Έτσι η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  γίνεται  $y = 2x + 2\mu$ . Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο  $K(2, 8)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , οπότε θα ισχύει:  $8 = 2 \cdot 2 + 2\mu \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$ . Άρα έχουμε:

$$\lambda = 1, \mu = 2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon): y = 2x + 4.$$

(β) Επειδή ισχύουν  $2 \cdot (-4) + 4 = -4$  και  $2 \cdot (-1) + 4 = 2$ , τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ , οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας  $(\varepsilon)$ . Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου  $M$  από τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

$$MK = \sqrt{(2+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$M\Lambda = \sqrt{(-4+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $ΚΛ$ .

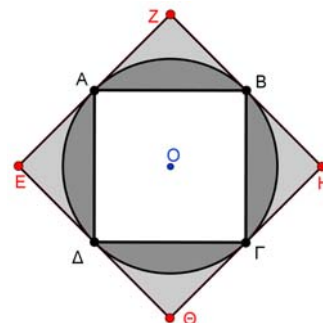
### Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα  $ΑΒΓΔ$  και  $ΕΖΗΘ$  είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο  $ΕΖΗΘ$  έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου  $C(O, \rho)$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_1$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $ΑΒΓΔ$ .

(β) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_2$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου  $ΕΖΗΘ$  και εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$ . (Θεωρείστε ότι  $\pi = 3,1415$ ).



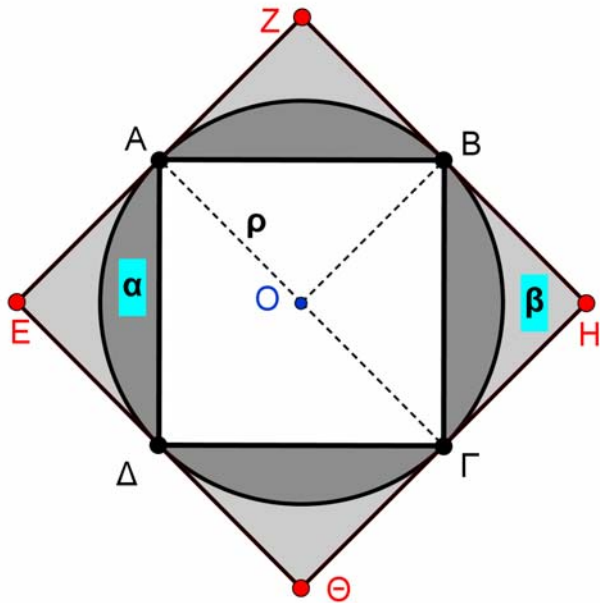
### Λύση

1. Επειδή είναι  $OA = OB$ ,  $OA \perp EZ$  και  $OB \perp ZH$ , έπεται ότι το τετράπλευρο  $OAZB$  είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο  $AOB$  είναι ορθογώνιο στο  $O$ . Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $OAB$  λαμβάνουμε:

$$AB^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:  $2\rho^2$ . Το εμβαδόν του κύκλου είναι  $\pi\rho^2$ , οπότε το άθροισμα  $\Sigma_1$ , θα είναι:

$$\Sigma_1 = \pi\rho^2 - 2\rho^2 = (\pi - 2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι  $OA \perp EZ$  και  $OG \perp H\Theta$ , έπεται ότι η  $AG$  είναι διάμετρος του κύκλου  $C(O, \rho)$ . Άρα το τετράπλευρο  $AGHZ$  είναι ορθογώνιο, οπότε  $ZH = 2\rho$ . Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  είναι ίσο με  $4\rho^2$ . Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi - 2)\rho^2}{(4 - \pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi - 2) < 4(4 - \pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3,1428\dots, \text{ που ισχύει.}$$

### Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-10)(x^2 - 7x + 10) = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{2x - 1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{array} \right.$$

#### Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2 - 7x + 10) = 0 \Leftrightarrow x - 10 = 0 \text{ ή } x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Η εξίσωση  $x^2 - 7x + 10 = 0$ , έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -7$ ,  $\gamma = 10$ , οπότε είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9$  και οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x = 2$  ή  $x = 5$ .

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση  $x^2 - 7x + 10 = 0$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x(x-7) = -10$ . Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο  $x$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ . Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2 + 5 + 4x - 2 < 5x^2 + 5x \Leftrightarrow x > 3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι:  $x = 5$  ή  $x = 10$ .

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

**Λύση**

Αν θέσουμε

$$B(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x) = \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση  $A(x)$  είναι ίση με τη διαφορά  $B(x) - \Gamma(x)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} = \frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2} \\ &= \frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2} = \frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2} = \frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1} = x^2+x+1. \\ \Gamma(x) &= \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)} = \frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A(x) = B(x) - \Gamma(x) = x^2 + x + 1 - (x + 1) = x^2.$$

3. (α) Αν  $\kappa$  ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x - 1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου  $\kappa$  η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

**Λύση**

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x + x = 4\kappa(x+2) - 3(\kappa x - 1) \Leftrightarrow 2\kappa x + x = 4\kappa x + 8\kappa - 3\kappa x + 3 \Leftrightarrow \kappa x + x = 8\kappa + 3$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 1)x = 8\kappa + 3. \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν  $\kappa = -1$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $0 \cdot x = -5$  και είναι αδύνατη.
2. Αν  $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ , δηλαδή, αν ο  $\kappa$  είναι ακέραιος διαφορετικός από το  $-1$ ,

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση  $x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}$ .

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8\kappa + 8 - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa + 1) - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$x = 8 - \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}.$$

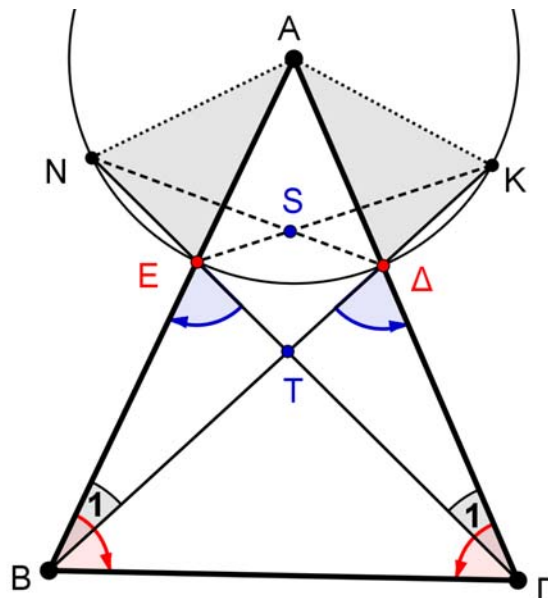
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το  $\kappa$  είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του  $-1$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Κύκλος με κέντρο την κορυφή  $A$  και ακτίνα  $\rho < AB$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία  $K$ ,  $N$  αντίστοιχα. Αν  $T$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  και  $S$  το σημείο τομής των  $\Delta N$ ,  $E K$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $S$  και  $T$  βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

#### Λύση

Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A E \Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν: (α)  $A\Delta = A E$ , ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β)  $AB = A\Gamma$  (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ ) και (γ) η γωνία  $\hat{A}$  είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων  $A\Delta B$  και  $A E \Gamma$ , προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$  και κατά συνέπεια:

$$\hat{B\hat{T}\Gamma} = \hat{\Gamma\hat{T}B}. \quad (1)$$

- $\hat{A}\hat{D}B = \hat{A}\hat{E}\hat{G}$  και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών  

$$\hat{B}\hat{E}\hat{G} = \hat{B}\hat{D}\hat{G} \quad (2)$$
- $\hat{\Delta}B = \hat{\Delta}\Gamma$ . (3)

Από την ισότητα (1) των γωνιών  $\hat{B}\hat{T}\hat{G} = \hat{G}\hat{T}\hat{B}$  προκύπτει ότι το τρίγωνο  $B\hat{T}\hat{G}$  είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο  $T$  θα ανήκει στη μεσοκάθετη της  $B\hat{G}$ .

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $B\hat{T}\hat{G}$  έχουμε:  $T\hat{B} = T\hat{G}$  και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε:  $T\hat{E} = T\hat{\Delta}$ .

Από την ισότητα (2) των γωνιών  $\hat{B}\hat{E}\hat{G} = \hat{B}\hat{D}\hat{G}$ , προκύπτει η ισότητα των ισοσκελών τριγώνων  $\hat{A}\hat{D}\hat{K}$  και  $\hat{A}\hat{E}\hat{N}$ . Άρα  $\hat{\Delta}K = \hat{E}N$  και επειδή  $T\hat{E} = T\hat{\Delta}$ , καταλήγουμε  $T\hat{K} = T\hat{N}$ .

Από τις ισότητες  $T\hat{E} = T\hat{\Delta}$  και  $T\hat{K} = T\hat{N}$  συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων  $\hat{E}\hat{T}\hat{K}$  και  $\hat{\Delta}\hat{T}\hat{N}$ .

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων  $\hat{S}\hat{E}\hat{N} = \hat{S}\hat{A}\hat{K}$  και στη συνέχεια η ισότητα  $\hat{S}\hat{A}\hat{E} = \hat{S}\hat{A}\hat{K}$ , οπότε το σημείο  $S$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ .

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1) + x - 4}{x^2 - 2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2012 \cdot 4019 \cdot 2009 + 2006}{2010^2 - 2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

### Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x-1)(x-1) + x - 4}{x^2 - 2} &= \frac{(x+2)(2x^2 - 3x + 1) + x - 4}{x^2 - 2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2 + x - 4}{x^2 - 2} = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 2}{x^2 - 2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 2) + x^2 - 2}{x^2 - 2} = \frac{(x^2 - 2)(2x + 1)}{x^2 - 2} = 2x + 1. \end{aligned}$$

(β) Για  $x = 2010$  η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την  $A$ , οπότε θα έχουμε:

$$A = K(2010) = 2 \cdot 2010 + 1 = 4021.$$

### Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το  $x$ , έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$ , για όλες τις τιμές των παραμέτρων  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ .



### Λύση

Για  $a = b$  η εξίσωση γίνεται:  $\frac{2}{x-a} = \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow x = a + 2c^2$ .

Έστω  $a \neq b$ . Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b) = c^2(x-a+x-b), \text{ με } x \neq a \text{ και } x \neq b \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+b+2c^2)x + ab + (a+b)c^2 = 0, \text{ με } x \neq a \text{ και } x \neq b \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$\Delta = (a+b+2c^2)^2 - 4ab - 4(a+b)c^2 = (a+b)^2 - 4ab + 4c^4 = (a-b)^2 + 4c^4 > 0$ ,  
οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο  $\mathbb{R}$  που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2} = \frac{a+b+2c^2 \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^4}}{2}. \quad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα  $a$  και  $b$  δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για  $x = a$  η εξίσωση γίνεται:  $(a-a)(x-b) = c^2(a-a+x-b) \Leftrightarrow 0 = c^2(a-b)$ , που είναι άτοπο, αφού είναι  $c \neq 0$  και έχουμε υποθέσει ότι  $a \neq b$ . Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για  $x = b$ . Επομένως, για  $a \neq b$ , η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο  $\mathbb{R}$  που δίνονται από τις ισότητες (2).

### Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2, \quad z = y^3 + 2y - 2, \quad x = z^3 + 2z - 2.$$

### Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) \quad (1)$$

$$z - x = (y - z)(y^2 + yz + z^2 + 2) \quad (2)$$

Επειδή είναι  $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$  και ομοίως προκύπτει ότι

$y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0$ , αν υποθέσουμε ότι είναι  $x > y$ , τότε από

την (1) λαμβάνουμε ότι  $y > z$ . Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε  $z > x$ .

Έτσι έχουμε  $x > y > z > x$ , άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι  $x < y$ . Επομένως έχουμε  $x = y$ , οπότε θα είναι και  $y = z$ . Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο  $x^2 + x + 2$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = -7 < 0$ .

### Πρόβλημα 4

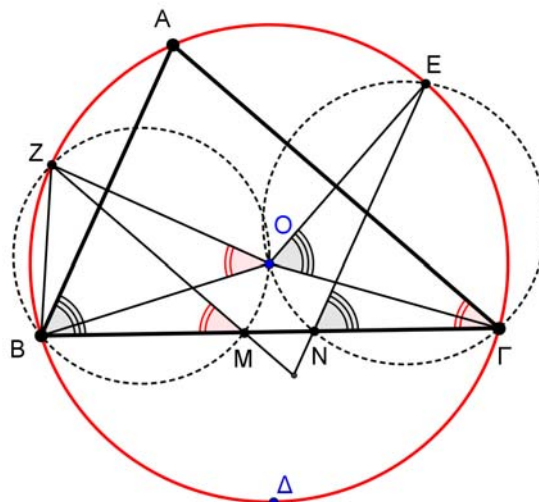
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ , τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$

στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Από το σημείο  $Z$ , θεωρούμε παράλληλη στην  $ΑΓ$ , που τέμνει την  $ΒΓ$  στο σημείο  $M$ . Από το σημείο  $E$ , θεωρούμε παράλληλη στην  $ΑΒ$ , που τέμνει την  $ΒΓ$  στο σημείο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τετράπλευρα  $BMOZ$  και  $\Gamma NOE$  είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω  $(c_1)$  και  $(c_2)$ , αντίστοιχα.
- β)** Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω  $K$ ) των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο  $\Delta$  και ακτίνα  $\Delta I$ , όπου  $I$  το έκεντρο του τριγώνου  $ΑΒΓ$ .

**Λύση**

**α)** Εφόσον η  $ZM$  είναι παράλληλη στην  $ΑΓ$ , θα ισχύει:  $Z\hat{M}B = A\hat{I}B = \hat{\Gamma}$ . Η γωνία  $Z\hat{O}B$  είναι επίκεντρη στον κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνει στο τόξο  $ZB$  (που είναι το μισό του τόξου  $AB$ ). Άρα  $Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$ . Άρα είναι  $Z\hat{M}B = Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$ , οπότε το τετράπλευρο  $BMOZ$  είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι  $E\hat{N}G = E\hat{O}G = \hat{B}$  και ότι το τετράπλευρο  $\Gamma NOE$  είναι εγγράψιμο.

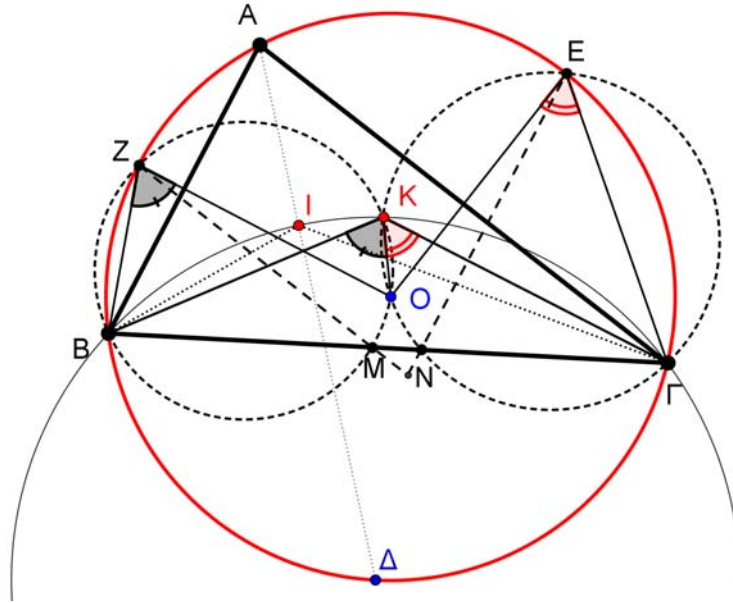
**β)** Επειδή το σημείο  $I$  είναι το έκεντρο του τριγώνου  $ΑΒΓ$ , θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}G = \Delta\hat{G}I = \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι  $\Delta B = \Delta I = \Delta G$  και επίσης εύκολα προκύπτει ότι:  $B\hat{I}G = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία  $B, I, K, G$  είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}G = \hat{A} + \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}G.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο  $OBZ$  είναι ισοσκελές ( $OB = OZ = R$ ), με  $\widehat{B\hat{O}Z} = \hat{\Gamma}$ . Άρα  $\widehat{B\hat{Z}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ . Το τρίγωνο  $OΓΕ$  είναι ισοσκελές ( $OΓ = OE = R$ ), με  $\widehat{Γ\hat{O}E} = \hat{B}$ .

Άρα  $\widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ . Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\begin{aligned} \widehat{B\hat{K}\Gamma} &= \widehat{O\hat{K}B} + \widehat{O\hat{K}\Gamma} = \widehat{B\hat{Z}O} + \widehat{Γ\hat{E}O} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = \widehat{B\hat{I}\Gamma}. \end{aligned}$$

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2 + 3x + 2)^4 + (x^2 + x - 2)^4 = 16(x + 2)^4.$$

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα  $x^2 + 3x + 2$  και  $x^2 + x - 2$  έχουν παράγοντα το  $x + 2$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} (x + 2)^4 \left[ (x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^4 = 0 \text{ ή } (x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4 + 12x^2 - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4 + 6x^2 - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = -7 &\text{ (αδύνατη)} \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x = 1 \text{ ή } x = -1. \end{aligned}$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Αν θέσουμε  $a = x^2 + 3x + 2$ ,  $b = x^2 + x - 2$ , τότε  $a - b = 2x + 4$  και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a - b)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ &\Leftrightarrow -ab(2a^2 - 3ab + 2b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0, \end{aligned}$$

αφού η εξίσωση  $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ , αν  $ab \neq 0$ , είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0, \quad u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο  $\mathbb{R}$ . Άρα έχουμε:

$$a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \text{ (διπλή)} \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)} \end{aligned}$$

## Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , αν το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array} \right\}, \quad (\Sigma)$$

έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ , δια κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x^2 + (2x + \lambda)^2) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 \quad (1) \\ y = 2x + \lambda \quad (2) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Αν ήταν  $\alpha \neq 0$ , τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο  $\mathbb{R}$  για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \quad (3)$$

Όμως, το τριώνυμο  $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$  έχει διακρίνουσα  $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$ , οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  (αφού είναι  $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{4}{\alpha^2} < 0$ ).

Επομένως θα έχουμε  $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$ , για  $\lambda < \lambda_1$  ή  $\lambda > \lambda_2$ , άτοπο.

Για  $\alpha = 0$  η εξίσωση (1) έχει τη λύση  $x = 0$ , οπότε προκύπτει ότι  $y = \lambda$  και το σύστημα έχει τη λύση  $(x, y) = (0, \lambda)$ . Άρα είναι  $\alpha = 0$ .

### Πρόβλημα 3

Η ακολουθία  $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$  είναι τέτοια ώστε η ακολουθία  $d_n = a_n - a_{n-1}$ , με  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\omega = a_1 - a_0$ .

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των  $a_0, \omega$  και  $n$  τον γενικό όρο  $a_n$  και το άθροισμα  $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .
2. Αν είναι  $a_0 = 1$  και  $a_1 = 7$ , να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο  $n$  για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:  $a_n > 10^3$  και  $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$ .

### Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega, d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2, 3, \dots$$

οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \dots + d_n &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \\ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + \dots + n\omega &= a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1 + 2 + \dots + n)\omega \\ &\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega. \end{aligned}$$

Για το άθροισμα  $S_{n+1}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_0 + a_1 + \dots + a_n = (n+1)a_0 + \left( \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \omega \\ &= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) \omega + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n k \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \omega \\ &= (n+1)a_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \right) \omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \omega. \end{aligned}$$

2. Αν είναι  $a_0 = 1$  και  $a_1 = 7$ , τότε έχουμε  $\omega = 6$  και

$$a_n = 1 + 3n(n+1), S_{n+1} = n+1 + n(n+1)(n+2) = (n+1)[1 + n(n+2)] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{aligned} a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3 &\Leftrightarrow a_n = 1 + 3n(n+1) > 10^3, S_{n+1} = (n+1)^3 \leq 8 \cdot 10^3 \Leftrightarrow \\ n(n+1) > 333, n+1 &\leq 2 \cdot 10 \Leftrightarrow n > 18, n \leq 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19. \end{aligned}$$

αφού είναι  $17 \cdot 18 = 306, 18 \cdot 19 = 342$ .

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος  $n$  είναι ο 18.

### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(c)$  και  $\Delta$  τυχόν σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ , τέμνει τον κύκλο  $(c)$  στο σημείο  $\Sigma$ , τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  στο σημείο  $K$  και τη διχοτόμο της γωνίας  $A\hat{\Delta}\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , τέμνει τον

κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας AΔΓ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας AΔΒ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία A, I, Λ, M και A, I, K, N είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c<sub>1</sub>) και (c<sub>2</sub>) αντίστοιχα, όπου I το έγκεντρο του τριγώνου ABΓ.

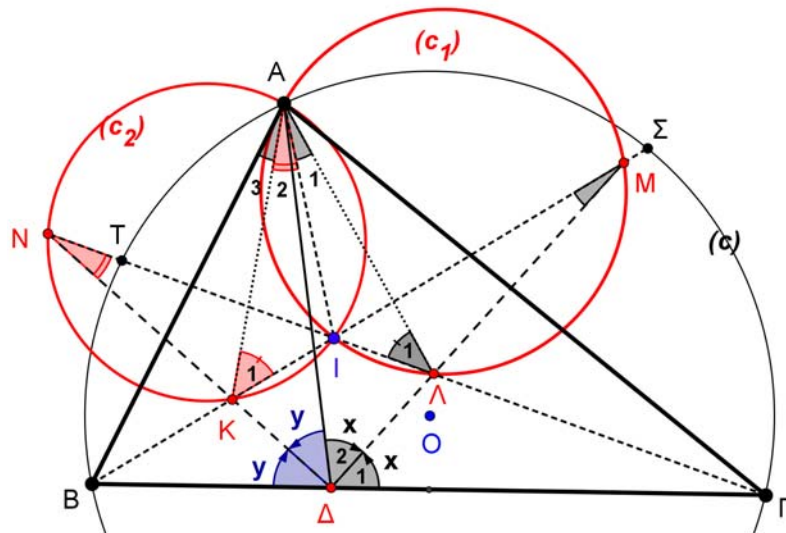
β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ABΓ, που αντιστοιχεί στη κορυφή Α τότε οι κύκλοι (c<sub>1</sub>) και (c<sub>2</sub>) είναι ίσοι μεταξύ τους.

### Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K, Λ είναι τα έγκεντρα των τριγώνων AΔB και AΔΓ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_1 = \hat{I}\hat{A}\hat{\Gamma} - \hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο ΜΔB έχουμε:  $\hat{x} = \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$ , δηλαδή  $\hat{A}_1 = \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$ .

Άρα το τετράπλευρο AΙΛM είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2 = \hat{I}\hat{A}\hat{B} - \hat{K}\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^\circ - 2\hat{y} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Από το τρίγωνο ΝΔΓ έχουμε:  $\hat{y} = \hat{N} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ , δηλαδή  $\hat{A}_2 = \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ .

Άρα το τετράπλευρο AΙΚN είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{A}\hat{I}\hat{B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} = \hat{B} + \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AΙΚ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{B} - \hat{A}_2 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{N} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο ΑΙΛ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^\circ - \hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma} - \hat{A}_1 = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι  $A\Delta \perp B\Gamma$  τότε  $\hat{x} = \hat{y} = 45^\circ$ , οπότε  $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ .

Άρα οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες  $\hat{K}_1, \hat{\Lambda}_1$  βαίνουν στη κοινή χορδή ΑΙ).

### Παρατηρήσεις

**α)** Τα κέντρα των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  βρίσκονται επάνω στην ΣΤ.

**β)** Το σημείο Α είναι το σημείο Μiquel του πλήρους τετραπλεύρου ΔΚΙΛΜΝ.