

Πραγματικοί αριθμοί

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

Θέμα 2ο

1251. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$

β) $\alpha = \beta$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί.

Ορίζουμε $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς

x, y ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 .$$

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $\beta + \gamma = -\alpha$. ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να

αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$.

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. ii. $\alpha + \beta = 1$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy$$

α) Να αποδείξετε ότι: i) $(2y - x)^2 = 0$ ii) $y = \frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

14473. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

14489. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.