ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2014

Θ Ε Ω Ρ Ι Α 1 0

ΘΕΜΑ Α 1.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Ισχύει ότι $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta < 0$.

γ. Η απόσταση δύο αριθμών α και β στον άξονα $x'x$ είναι $d(\alpha, \beta) = \alpha - \beta$

δ. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ λέγεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται $[\alpha, \beta]$.

ε. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με κάθε κατακόρυφη ευθεία.

Μονάδες 5x2= 10

Α2. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ που έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι:

α. $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

Μονάδες 5

β. $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Μονάδες 5

Α3. Τι λέγεται συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 2.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η απόσταση των αριθμών α και β ισούται με $|\alpha + \beta|$.

β. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha \neq 0$ με $\Delta > 0$ και x_1, x_2 ρίζες, είναι ετερόσημο του α, **μόνο** για τις τιμές του x που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.

γ. Αν $\rho \in R$ με $\rho > 0$ και $x \in R$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho .$$

δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό α και φυσικό αριθμό ν ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$$

ε. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με α>0 σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 5x2= 10

A2. Αν $\alpha,\beta \geq 0$, να αποδείξετε την ισότητα: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$.

Μονάδες 10

A3. Να δώσετε τον ορισμό της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 3.

A.1 Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες:

i. α_ν =................., όπου α_ν είναι ο ν-οστός όρος αριθμητικής προόδου, α_1 ο πρώτος όρος και ω η διαφορά της προόδου.

ii. d(α, β) = ...

Μονάδες 2x2=4

A.2 *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Αν $\alpha \neq 0$, η εξίσωση $\alpha\cdot x = 0$ είναι αδύνατη.

ii. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$.

iii. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ έχει κλίση $\lambda = \beta$.

Μονάδες 3x2=6

A3. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 10

A4. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 4.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha < 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

ii. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$ για κάθε $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι.

iii. $d(\alpha,\beta) = |\alpha + \beta|$ όπου $d(\alpha, \beta)$ η απόσταση των αριθμών α και β.

iv. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται ομόσημο του α, μόνο όταν Δ>0 και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

v. Αν Δ>0, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Μονάδες 10

Α3. Να αποδείξετε ότι αν τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ισχύει: $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 5.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{x^2} = x$.

β. Η εξίσωση $0x = \beta$ είναι αδύνατη για κάθε $\beta \in R$.

γ. Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι αρνητική τότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

δ. Αν α, β ομόσημοι τότε $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$.

ε. Αν $\gamma < 0$ και $\alpha < \beta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ και με άθροισμα και γινόμενο ριζών S και P αντίστοιχα, μετασχηματίζεται στην μορφή

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Μονάδες 10

Α3. Πότε δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 6.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε πραγματικό α ισχύει $\left|\alpha - |\alpha|\right| = |\alpha| - \alpha$

β. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -\alpha$

γ. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δυο άνισες ρίζες όταν $\Delta \leq 0$

δ. Τα σημεία (α, β) και (–α , β) του καρτεσιανού επιπέδου, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

ε. Αν δυο αριθμοί x_1, x_2 έχουν άθροισμα S και γινόμενο P, τότε η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 είναι: $x^2 - Sx + P = 0$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β

α. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Μονάδες 7

β. Πότε στην παραπάνω σχέση ισχύει το ίσον;

Μονάδες 3

Α3. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 7.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha < 0$ και $\Delta < 0$ ισχύει για κάθε $x \in R$.

β. Αν $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

γ. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

δ. Το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A'(\alpha, -\beta)$.

ε. Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$, τότε ισχύει $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 10

Α3. Τι λέγεται γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών α και γ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 8.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Ως συντελεστής διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε, ορίζεται η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα αρνητική δεν έχει πραγματικές λύσεις.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, ως προς τον άξονα $y'y$.

δ. Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \subseteq B$.

ε. Για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Πότε μία ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 5

Α3. Αν $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Α 9.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$.

β. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$, όταν α=0, έχει μοναδική λύση.

γ. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $|\alpha|=|-\alpha|\geq 0$.

δ. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ γίνεται ομόσημο του α μόνο όταν $\Delta>0$ και για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των ριζών.

ε. $|x|>\rho \Leftrightarrow x>\rho$ ή $x<-\rho$ $(\rho>0)$

Μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα **Α** και **Β** ισχύει: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Μονάδες 5x2=10

Α3. Να δώσετε τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Α 10.

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\theta>0$, τότε: $|x|=\theta \Leftrightarrow x=\theta$

β. Αν είναι $|x|+|y|=0$ τότε $x=0$ και $y=0$.

γ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$

δ. Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει: $P(A')=1-P(A)$.

ε. Αν S το άθροισμα των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, α≠0 τότε: $S=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Μονάδες 5x2= 10

Α2. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. Μονάδες 10

Α3. Να γράψετε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ 1 0

ΘΕΜΑ Γ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΡΙΖΕΣ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+3x+18}}{x-3}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f(0)=-\sqrt{2}$ και $f(5)=\sqrt{2}$.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{1}{1+f(0)}+\dfrac{1}{1+f(5)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω γνωρίζουμε ότι :

$$P(A)=\frac{\left(f\left(P(\varnothing)\right)\right)^2}{8},\quad P(B)=\frac{\left(f(5)\right)^2-P(\Omega)}{2}\quad \text{και}\quad P(A\cup B)=\frac{5}{8}$$

τότε να υπολογίσετε:

α. τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

Μονάδες 4

β. την πιθανότητα $P(A-B)$.

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ

Γ1. Πρέπει :

- $-x^2+3x+18\geq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 6$, αφού οι ρίζες του τριωνύμου $-x^2+3x+18$ είναι οι αριθμοί -3 και 6 και
- $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=[-3,3)\cup(3,6]$.

Γ2. Είναι $f(0)=\dfrac{\sqrt{18}}{-3}=\dfrac{\sqrt{9\cdot 2}}{-3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{-3}=-\sqrt{2}$ και

$$f(5)=\frac{\sqrt{-25+15+18}}{5-3}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\cdot 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Γ3.

$$\frac{1}{1+f(0)}+\frac{1}{1+f(5)}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}=-2$$

Γ4. **α.** Επειδή $P(\varnothing)=0$ και $f\left(P(\varnothing)\right)=f(0)=-\sqrt{2}$,είναι:

$P(A)=\frac{\left(f\left(P(\varnothing)\right)\right)^2}{8}=\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Επίσης επειδή $P(\Omega)=1$,

είναι: $P(B)=\frac{\left(f(5)\right)^2-P(\Omega)}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}+\frac{4}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$$

β. Είναι $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$.

ΘΕΜΑ Γ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

2. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\dots,\ 10\}$ που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, με:

$$A=\{x\in\Omega\ /\ |x-4|<2\} \quad \text{και}$$

$B=\left\{x\in\Omega\ /\ x \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x)=\sqrt{4-x}\right\}$.

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $|x-4|<2$ και να αποδείξετε ότι:

$$A=\{3,\ 4,\ 5\}$$

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{4-x}$ και να αποδείξετε ότι $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις πιθανότητες :

α. $P(A)$, $P(B)$ και $P(A\cap B)$.

Μονάδες 6

β. να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.

Μονάδες 2

γ. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ

Γ1. $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow 2<x<6$ και επειδή $x\in\Omega$, είναι

$$A=\{3,\ 4,\ 5\}.$$

Γ2. Πρέπει $4-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$ και επειδή $x\in\Omega$, είναι $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Γ3. **α.** Είναι $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,...,\ 10\}$, $A=\{3,\ 4,\ 5\}$ και $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, οπότε $A\cap B=\{3,\ 4\}$. Άρα:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}\quad \text{και}\quad P(A\cap B)=\frac{2}{10}.$$

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

γ. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A-B)\cup(B-A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$\begin{aligned}P((A-B)\cup(B-A))&=P(A-B)+P(B-A)\\&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\\&=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-2\frac{2}{10}=\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (Α΄ΒΑΘ. ΜΕ ΑΠΟΛ. ΤΙΜΗ, Β΄ΒΑΘ.)–ΔΕΥΤ. ΕΞΙΣ.–ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

3. Θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega=\{-3,-2,...,\ 2,3\}$ που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, και τα ενδεχόμενα του:

$$A=\{x\in\Omega / |x-1|\le 2\}$$

$$B=\{x\in\Omega / x^2-4x+3\le 0\}$$

$$\Gamma=\{\lambda\in\Omega / \text{η εξίσωση } x^2+(1-\lambda)\cdot x+1=0 \text{ έχει διπλή ρίζα}\}$$

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\le 2$ και να δείξετε ότι :

$$A=\{-1,0,1,2,3\}.$$

Μονάδες 7

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-4x+3\le 0$ και να δείξετε ότι $B=\{1,2,3\}$

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότ ι $\Gamma=\{-1,3\}$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$.

Μονάδες 2

Γ5. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B\cup\Gamma)$ και $P[A-(B\cup\Gamma)]$.

Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

Γ1. $|x-1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-1\le 2 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$ και επειδή $x\in\Omega$, είναι $A=\{-1,0,1,2,3\}$.

Γ2. $x^2-4x+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 3$, αφού οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3 είναι οι αριθμοί 1 και 3 και επειδή $x\in\Omega$, είναι $B=\{1,2,3\}$.

Γ3. Η εξίσωση $x^2+(1-\lambda)\cdot x+1=0$ έχει διπλή ρίζα, άρα $\Delta=0$, οπότε :

$$(1-\lambda)^2-4=0 \Leftrightarrow 1-\lambda=-2 \text{ ή } 1-\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=3 \text{ ή } \lambda=-1.$$

Άρα $\Gamma=\{-1,3\}$.

Γ4. Είναι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{7}$, $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{7}$ και $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{7}$

Γ5. Είναι $B\cup\Gamma=\{-1,1,2,3\}$, άρα $P(B\cup\Gamma)=\frac{4}{7}$.

Επίσης $A-(B\cup\Gamma)=\{0\}$, οπότε $P[A-(B\cup\Gamma)]=\frac{1}{7}$.

ΘΕΜΑ Γ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΡΙΖΕΣ – ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9-|x|}-\lambda,\ \lambda\in R$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Γ2. Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενό του $A=\{\lambda\in R: f(5)=-\lambda^2+2\lambda\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο από το δειγματικό χώρο Ω, να βρείτε την πιθανότητα το στοιχείο αυτό να ανήκει στο A.

Μονάδες 5

Γ3. Για $\lambda=0$,

α. Να βρείτε το $f(-5)$ και να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{f(-5)}{\sqrt{3}-1}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το σημείο που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

Γ1. Πρέπει $9-|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq 9 \Leftrightarrow -9\leq x\leq 9$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-9,9]$.

Γ2. Είναι $f(5)=-\lambda^2+2\lambda$, άρα $\sqrt{9-|5|}-\lambda=-\lambda^2+2\lambda \Leftrightarrow$ $\sqrt{4}-\lambda=-\lambda^2+2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2$.

Άρα $A=\{1,2\}$ και επειδή $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ είναι

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Γ3. **α.** Για $\lambda=0$ είναι $f(-5)=\sqrt{9-|-5|}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$, οπότε :

$$\frac{f(-5)}{\sqrt{3}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\sqrt{3}+1.$$

β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-9,9]$,άρα το $0\in A$, οπότε για $\lambda=0$ είναι $f(0)=\sqrt{9}=3$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0,3)$.

ΘΕΜΑ Γ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ–ΑΡΙΘ. ΠΡΟΟΔΟΣ–ΕΞΙΣ. Β ' ΒΑΘ. ΜΕ ΑΠΟΛ. ΤΙΜΗ

5. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{|x|-4}$ και $g(x)=\sqrt[3]{27-|x|}$.

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(-13), f(-8), f(-5)$, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 3

Γ3. Αν ο $f(-8)$ είναι ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου, να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-19, g(-19))$ ως προς άξονες συμμετρίας τους $x'x$, $y'y$ και ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση : $[f(x)]^4-[g(x)]^3=-3$.

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $g(0)$ και $g(-19)$.

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

Γ1. Είναι:

- $|x|-4\geq 0 \Leftrightarrow |x|\geq 4 \Leftrightarrow x\leq -4$ ή $x\geq 4$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.
- $27-|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq 27 \Leftrightarrow -27\leq x\leq 27$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=[-27,27]$.

Γ2. Είναι $f(-13)=\sqrt{|-13|-4}=\sqrt{13-4}=\sqrt{9}=3$

$f(-8)=\sqrt{|-8|-4}=\sqrt{8-4}=\sqrt{4}=2$ και

$f(-5)=\sqrt{|-5|-4}=\sqrt{5-4}=\sqrt{1}=1$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $f(-8)=\dfrac{f(-13)+f(-5)}{2}$.

Πράγματι είναι $2=\dfrac{3+1}{2}$, άρα οι αριθμοί $f(-13),f(-8),f(-5)$, με την σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Γ3. Ο δεύτερος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_2=f(-8)=2$ και η διαφορά της $\omega=f(-5)-f(-8)=1-2=-1$, άρα έχουμε :

$\alpha_2=\alpha_1+\omega \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2-\omega=2-(-1)=3$, οπότε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι :

$$S_{10}=\frac{10}{2}\left[2\alpha_1+(10-1)\omega\right]=5(6-9)=-15$$

Γ4. Είναι $g(-19)=\sqrt[3]{27-|-19|}=\sqrt[3]{27-19}=\sqrt[3]{8}=2$, άρα $M(-19,2)$.

Άρα:

- Το συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $N(-19,-2)$.
- Το συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $K(19,2)$.
- Το συμμετρικό του Μ ως προς $O(0,0)$ είναι το $\Lambda(19,-2)$.

Γ5. Για $x \in A_f \cap A_g$, δηλαδή για $x \in [-27,-4] \cup [4,27]$, είναι :

$$[f(x)]^4 - [g(x)]^3 = -3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{|x|-4}\right)^4 - \left(\sqrt[3]{27-|x|}\right)^3 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x|-4)^2 - 27 + |x| = -3 \Leftrightarrow |x|^2 - 8|x| + 16 - 27 + |x| = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| - 8 = 0 \Leftrightarrow |x| = 8 \text{ ή } |x| = -1 \text{ (αδύνατη)}$$

Άρα $x = -8$ ή $x = 8$.

Γ6. Είναι $g(0) = \sqrt[3]{27} = 3$ και $g(-19) = \sqrt[3]{27-|-19|} = \sqrt[3]{27-19} = \sqrt[3]{8} = 2$ οπότε $S = g(0) + g(-19) = 3 + 2 = 5$ και $P = g(0) \cdot g(-19) = 3 \cdot 2 = 6$, άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ **ΡΙΖΕΣ – ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^\nu = \alpha$**

6. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ και $B = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

Μονάδες 10

Γ2. Να αποδείξετε ότι $B = 2$.

Μονάδες 8

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = \dfrac{1}{A+\sqrt{A}} + \dfrac{1}{A-\sqrt{A}}$.

Μονάδες 7

Λύση

Γ1. $$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Γ2. $$B = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{4}{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4}{4-2} = 2$$

Γ3. Η εξίσωση $x^3 = \dfrac{1}{A+\sqrt{A}} + \dfrac{1}{A-\sqrt{A}}$ λόγω του ερωτήματος Γ1 γίνεται :

$$x^3=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$ και λόγω του ερωτήματος Γ2 γίνεται :

$$x^3=2,\ \text{οπότε}\ x=\sqrt[3]{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^{\nu}=\alpha$

7. Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda x-1)+\lambda^2=(3\lambda-2)x$ (1),

όπου x ο άγνωστος και $\lambda\in R$ η παράμετρος.

Γ1. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ, αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό 2.

Μονάδες 6

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του αριθμού λ.

Μονάδες 12

Γ3. Αν η εξίσωση είναι αόριστη να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε να ισχύει: $\left|(\alpha+1)^{3\lambda}\right|=8$.

Μονάδες 7

Λύση

Γ1. Η εξίσωση $\lambda(\lambda x-1)+\lambda^2=(3\lambda-2)x$ έχει ρίζα τον αριθμό 2, οπότε

$$\lambda(2\lambda-1)+\lambda^2=(3\lambda-2)2 \Leftrightarrow 2\lambda^2-\lambda+\lambda^2=6\lambda-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2-7\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=\frac{4}{3}.$$

Γ2. Είναι $\lambda(\lambda x-1)+\lambda^2=(3\lambda-2)x \Leftrightarrow \lambda^2x-\lambda+\lambda^2=3\lambda x-2x \Leftrightarrow$

$$\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x=\lambda-\lambda^2$$

- Αν $\lambda^2-3\lambda+2\neq 0$, δηλαδή $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\frac{\lambda-\lambda^2}{\lambda^2-3\lambda+2}=-\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda-2)}=-\frac{\lambda}{\lambda-2}$
- Αν $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$ (αόριστη)
- Αν $\lambda=2$, η εξίσωση γίνεται $0x=-2$ (αδύνατη)

Γ3. Η εξίσωση είναι αόριστη, άρα $\lambda=1$, οπότε η εξίσωση $\left|(\alpha+1)^{3\lambda}\right|=8$ γίνεται $\left|(\alpha+1)^{3}\right|=8 \Leftrightarrow (\alpha+1)^3=-8$ ή $(\alpha+1)^3=8 \Leftrightarrow$

$$\alpha+1=-2 \text{ ή } \alpha+1=2 \Leftrightarrow \alpha=-3 \text{ ή } \alpha=1.$$

ΘΕΜΑ Γ ΕΞΙΣΩΣΗ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ – ΤΥΠΟΙ VIETA

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4\lambda x-12=0$ (1), $\lambda\in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό $x_1=-2$ να βρεθεί η παράμετρος λ και η άλλη ρίζα x_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 10

Γ3. Αν $\lambda=1$ και x_1,x_2 οι ρίζες της (1) να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1=\frac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\frac{1}{x_2}$.

Μονάδες 7

Λύση

Γ1. Είναι $\Delta=(-4\lambda)^2-4(-12)=16\lambda^2+48>0$, άρα η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in R$.

Γ2. Η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό $x_1=-2$, άρα $(-2)^2-4(-2)\lambda-12=0 \Leftrightarrow 4+8\lambda-12=0 \Leftrightarrow \lambda=1$,

οπότε η εξίσωση γίνεται : $x^2-4x-12=0$ (2).

Αν x_2 η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι : $x_1\cdot x_2=-12 \overset{x_1=-2}{\Leftrightarrow} x_2=6$.

Γ3. Είναι $x_1+x_2=4$ και $x_1\cdot x_2=-12$.

Άρα $S=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{4}{-12}=-\frac{1}{3}$ και

$$P=\rho_1\cdot\rho_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-12}=-\frac{1}{12}.$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}=0$.

ΘΕΜΑ Γ ΕΞΙΣΩΣΗ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ – ΤΥΠΟΙ VIETA

9. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - 2(\lambda + 2)x + 8 = 0$ (1) με $\lambda \in R$ και $\lambda \neq 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Γ2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1),

α. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ συναρτήσει του λ.

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί ο λ αν $(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 x_2^2 = 0$.

Μονάδες 10

Λύση

Γ1. Η εξίσωση $\lambda x^2 - 2(\lambda + 2)x + 8 = 0$ είναι δευτέρου βαθμού ($\lambda \neq 0$)

με $\Delta = \left[-2\left(\lambda+2\right)\right]^2 - 32\lambda = 4\left(\lambda^2 + 4\lambda + 4\right) - 32\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 =$

$= 4\left(\lambda - 2\right)^2 \geq 0$. Άρα έχει πραγματικές ρίζες.

Γ2. α. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 - 2(\lambda + 2)x + 8 = 0$, από τύπους Vieta έχουμε για $\lambda \neq 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2\left(\lambda+2\right)}{\lambda} = \frac{2\left(\lambda+2\right)}{\lambda} \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{\lambda}$$

β. Η σχέση $(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 x_2^2 = 0$ λόγω Γ2 γίνεται :

$$\left(\frac{2\left(\lambda+2\right)}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{8}{\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2\lambda+4}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{8}{\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2\lambda+4}{\lambda} + \frac{8}{\lambda}\right)\left(\frac{2\lambda+4}{\lambda} - \frac{8}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda+12}{\lambda} \cdot \frac{2\lambda-4}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda = -6$ ή $\lambda = 2$.

ΘΕΜΑ Γ ΕΞΙΣΩΣΗ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ – ΤΥΠΟΙ VIETA – ΕΞΙΣΩΣΗ

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda-2)x-2\lambda=0$, (1), $\lambda\in R-\{-2\}$.

Γ1. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) τότε:

Να βρεθούν τα x_1+x_2 και $x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του λ.

Μονάδες..10

Γ2. Να βρεθεί η τιμή του λ που επαληθεύει την εξίσωση:

$$\frac{|x_1+x_2+3\lambda-8|-5}{5}+3=\frac{|x_1\cdot x_2+\lambda+3|+3}{2}$$

Μονάδες 15

Λύση

Γ1. Από τύπους του Vieta είναι :

$$x_1+x_2=-\frac{\lambda-2}{1}=-\lambda+2 \qquad \text{και} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{-2\lambda}{1}=-2\lambda$$

Γ2.

$$\frac{|x_1+x_2+3\lambda-8|-5}{5}+3=\frac{|x_1\cdot x_2+\lambda+3|+3}{2}\overset{\Gamma 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{|-\lambda+2+3\lambda-8|-5}{5}+3=\frac{|-2\lambda+\lambda+3|+3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{|2\lambda-6|-5}{5}+3=\frac{|-\lambda+3|+3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{|2(\lambda-3)|-5}{5}+3=\frac{|-\lambda+3|+3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2|\lambda-3|-5}{5}+3=\frac{|-\lambda+3|+3}{2}\overset{|\lambda-3|=|-\lambda+3|}{\Leftrightarrow}$$

$$4|\lambda-3|-10+30=5|\lambda-3|+15\Leftrightarrow$$

$|\lambda-3|=5 \Leftrightarrow \lambda-3=5$ ή $\lambda-3=-5$. Άρα $\lambda=8$ ή $\lambda=-2$.