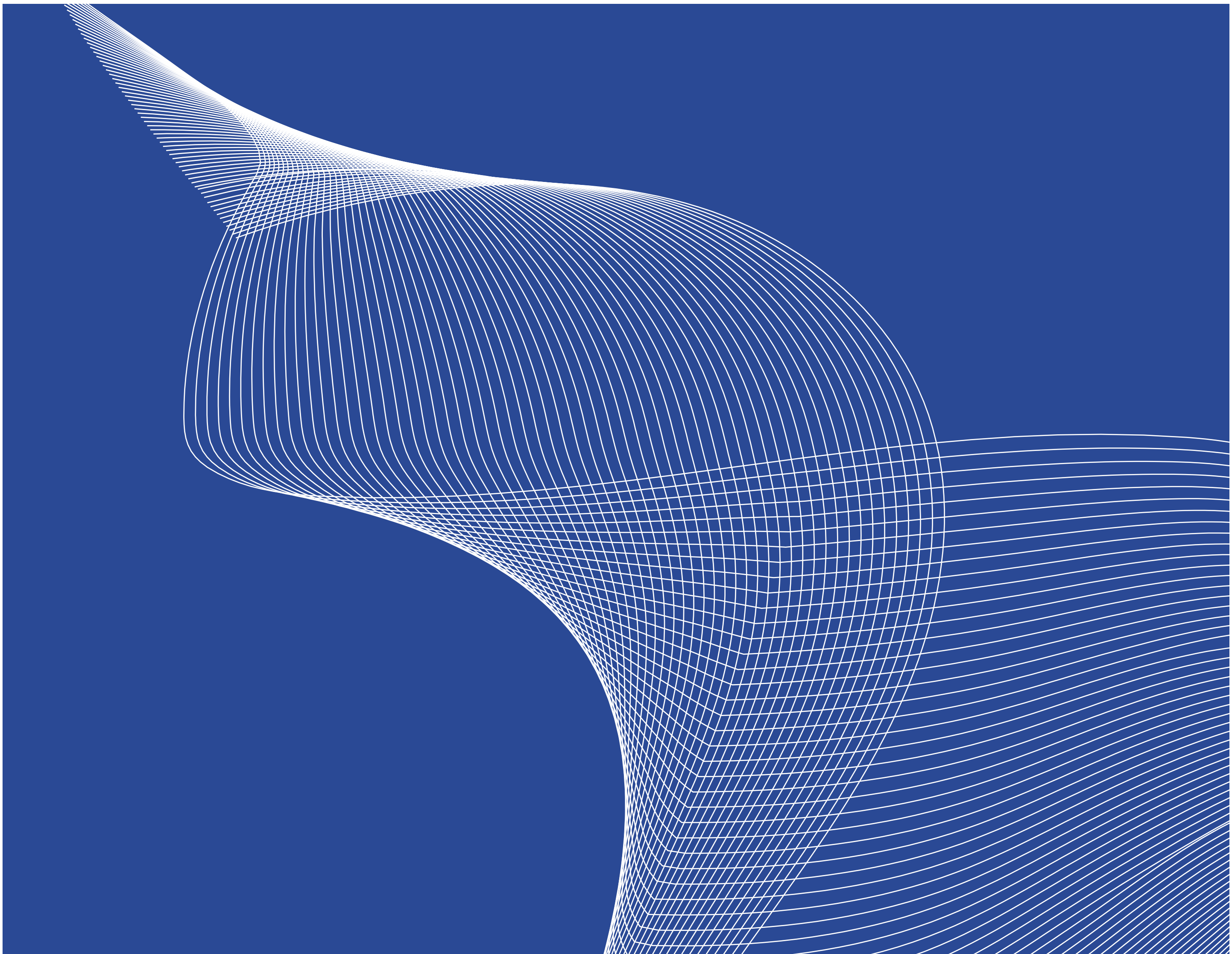
Μαθηματική Στατιστική

Έλεγχοι Υποθέσεων

Φωτεινή Κολυβά-Μαχαίρα

Σταύρος Α. Χατζόπουλος



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Φ. ΚΟΛΥΒΑ-ΜΑΧΑΙΡΑ
Αναπλ. Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ.

ΣΤ. Α. ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ
Διδάκτωρ Στατιστικής, Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ.

Μαθηματική Στατιστική

Έλεγχοι Υποθέσεων

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Μαθηματική Στατιστική

Συγγραφή

Φωτεινή Κολυβά-Μαχαίρα (Κύριος Συγγραφέας)

Σταύρος Α. Χατζόπουλος

Κριτικός αναγνώστης

Πολυχρόνης Μωυσιάδης

Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Φωτεινή Κολυβά-Μαχαίρα & Σταύρος Χατζόπουλος

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Σταύρος Χατζόπουλος

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Νικόλαος Ζήνας

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN: 978-960-603-068-0

Αφιέρωση

Στον πατέρα μου Διονύση (Φ. Κολυβά-Μαχαίρα)

Στον πατέρα μου Απόστολο (Σταύρος Χατζόπουλος)

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια

α.ε.ο.ε.δ.	αμερόληπτος εκτιμητής ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς
α.ο.ε.δ.	αμερόληπτος ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς
β.ε.	βαθμοί ελευθερίας
δ.ε.	διάστημα εμπιστοσύνης
Ε.Ε.Τ.	εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων
Ε.Τ.	μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
Ε.Μ.Π.	εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας
Ε.Ο.Κ.	εκθετική οικογένεια κατανομών
Ι.Ε.	ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση
Κ.Ο.Θ	κεντρικό οριακό θεώρημα
Μ.Λ.Π.	μονότονος λόγος πιθανοφανειών
Ο.Ι.Ε.	ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση
σ.α.κ.	συνάρτηση αθροιστικής κατανομής
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
σ.π.	συνάρτηση πιθανότητας
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.σ.	στάθμη σημαντικότητας
στ.σ.	στατιστική συνάρτηση
τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
τ.δ.	τυχαίο δείγμα
χ.σ.	χαρακτηριστική συνάρτηση
$\overset{P}{\rightarrow}$	συγκλίνει κατά πιθανότητα
$\overset{\text{σ.β.}}{\longrightarrow}$	συγκλίνει σχεδόν βέβαια
$\overset{\text{Κ.Ν.}}{\longrightarrow}$	συγκλίνει κατά νόμο
$\underset{\sim}{\mathbf{X}}$	διάνυσμα στήλη
$\underset{\sim}{\mathbf{X}'}$	διάνυσμα γραμμή
$\boldsymbol{A}'$	ανάστροφος πίνακα $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	αντίστροφος πίνακα $\boldsymbol{A}$
$\det(\boldsymbol{A})$	ορίζουσα πίνακα $\boldsymbol{A}$
$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$	ίχνος πίνακα $\boldsymbol{A}$
$\lvert c \rvert$	απόλυτη τιμή του c

Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές Μαθηματικών τμημάτων, τμημάτων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Στατιστικής, καθώς και σε όσους ασχολούνται με τη Στατιστική και έχουν καλό υπόβαθρο στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Είναι αποτέλεσμα της πολυετούς διδασκαλίας των συγγραφέων στο αντικείμενο των Ελέγχων Υποθέσεων στην Παραμετρική Στατιστική, καθώς και της ενασχόλησής τους με προβλήματα Βιολογίας, Γεωλογίας, Ιατρικής κ.ά. Αποτελεί συνέχεια του βιβλίου «Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική» της Φ. Κολυβά-Μαχαίρα και είναι δομημένο ως εξής:

Το πρώτο κεφάλαιο είναι το εισαγωγικό κεφάλαιο. Σε αυτό δίνονται ορισμοί και θεωρήματα από τη Θεωρία Πιθανοτήτων και την Εκτιμητική που είναι χρήσιμα για την κατανόηση όσων παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Από τη Θεωρία Πιθανοτήτων δίνονται επιγραμματικά οι έννοιες της πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής, της συνάρτησης πιθανότητας και πυκνότητας πιθανότητας, καθώς και οι κυριότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές. Από την Εκτιμητική δίνονται οι έννοιες του τυχαίου δείγματος, της στατιστικής συνάρτησης, των εκτιμητών και οι ιδιότητες αυτών, όπως και οι μέθοδοι εύρεσής τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι βασικές έννοιες των ελέγχων υποθέσεων. Ορίζονται η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική υπόθεση, η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης και η περιοχή αποδοχής της, τα είδη των σφαλμάτων και τα μεγέθη τους, η συνάρτηση ισχύος και τα είδη των ελεγχοσυναρτήσεων (γνήσια, μη γνήσια, ισχυρότατη, ομοιόμορφα ισχυρότατη, αμερόληπτη). Ακόμη, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεμελιώδες λήμμα των Neyman-Pearson, που αποτελεί τη βάση της θεωρίας των ελέγχων υποθέσεων. Επιπλέον, δίνονται οι ιδιότητες των ελεγχοσυναρτήσεων που προκύπτουν από το λήμμα που προαναφέρθηκε.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται η έννοια της ιδιότητας του μονότονου λόγου πιθανοφανειών, θεωρήματα που σχετίζονται με αυτήν, καθώς και θεωρήματα που αφορούν ομοιόμορφα ισχυρότατες ελεγχοσυναρτήσεις.

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται η έννοια του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και η ασυμπτωτική κατανομή του. Αξίζει να αναφερθεί ότι η μέθοδος εύρεσης ελεγχοσυναρτήσεων με τη χρήση του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί αρκετούς ερευνητές.

Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο εξολοκλήρου στην κανονική κατανομή. Οι έλεγχοι υποθέσεων, που περιγράφονται στο κεφάλαιο, αφορούν μια από τις δύο παραμέτρους, ακόμη και όταν οι δύο παράμετροι είναι άγνωστες. Να σημειωθεί ότι η άγνωστη παράμετρος για την οποία δεν γίνεται έλεγχος υποθέσεων συχνά αναφέρεται ως ενοχλητική παράμετρος. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται οι ελεγχοσυναρτήσεις που αφορούν τις υποθέσεις: $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$, όταν η δεύτερη παράμετρος είναι γνωστή ή άγνωστη, $H_0: \theta \geq \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$, ή $H_0: \theta \leq \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$, μόνο όταν η δεύτερη παράμετρος είναι άγνωστη. Για τους τελευταίους ελέγχους υποθέσεων, όταν η δεύτερη παράμετρος είναι γνωστή, οι ελεγχοσυναρτήσεις δίνονται στο τρίτο κεφάλαιο. Επίσης στο κεφάλαιο αυτό γίνεται σύγκριση των παραμέτρων δύο κατανομών ανεξαρτήτων δειγμάτων, όταν αυτά προέρχονται από κανονική κατανομή. Οι έλεγχοι υποθέσεων αφορούν τις μέσες τιμές ή τις διασπορές των δύο δειγμάτων, τόσο στην περίπτωση που οι παράμετροι για τις οποίες δε γίνεται έλεγχος υποθέσεων είναι γνωστές όσο και άγνωστες.

Στο έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται θέματα που σχετίζονται με το αντικείμενο του βιβλίου, όμως ξεφεύγουν από τα πλαίσια ενός μαθήματος που διδάσκεται σε προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών. Σε ορισμένα από τα θέματα που αναφέρονται μπορεί να υπάρχει και άλλος τρόπος απόδειξης, όμως στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται ως εφαρμογές του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Τα θέματα που αναλύονται στο έκτο κεφάλαιο του βιβλίου είναι η σχέση μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης και της περιοχής αποδοχής των δίπλευρων ελέγχων υποθέσεων της μορφής $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$, η σύγκριση των αναλογιών δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων, οι έλεγχοι υποθέσεων που αφορούν στις παραμέτρους του γενικού γραμμικού μοντέλου και ο έλεγχος υποθέσεων για τις μέσες τιμές στην ανάλυση διασποράς με έναν παράγοντα.

Σε όλα τα κεφάλαια υπάρχουν παραδείγματα και ασκήσεις με τη βοήθεια των οποίων αποσαφηνίζονται οι μέθοδοι. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν οι απαραίτητοι στατιστικοί πίνακες, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των παραδειγμάτων και των ασκήσεων.

Τέλος, οι συγγραφείς θα ήθελαν να ευχαριστήσουν όλους όσοι συνέβαλαν στην όσο το δυνατόν πιο άρτια παρουσίαση του βιβλίου και οι οποίοι είναι: Οι φοιτητές Ηλιάδου Μαρία, Ιασωνίδου Μαριάννα, Κατίδου Ευφροσύνη, Κασνακίδου Άννα, Κολώκας Νικόλαος, Κουλιοπούλου Πασχαλιά, Λύκου Ρόδη, Νικολός Σωτήρης, Τζιούφας Βασίλης και Τσικαλοπούλου Μαρία, οι οποίοι διάβασαν τα πρώτα δοκίμια και έκαναν τις παρατηρήσεις και διορθώσεις τους. Τον φιλόλογο κ. Πανυτσίδη Νικόλαο που βοήθησε τη συγγραφική ομάδα στη γλωσσική επιμέλεια. Τον Αχιλλέα Κολλάτο, φίλο αδερφικό του συν-συγγραφέα Σταύρου Χατζόπουλου για τη φιλοξενία που του προσέφερε κατά τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου.

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή: Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων και Εκτιμητικής

Σύνοψη
Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο δίνονται χρήσιμοι ορισμοί και απαραίτητα θεωρήματα για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Παρουσιάζονται στοιχεία από τη Θεωρία Πιθανοτήτων και την Εκτιμητική. Ειδικότερα, από τη Θεωρία Πιθανοτήτων δίνονται επιγραμματικά, οι έννοιες της πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής, της συνάρτησης πιθανότητας και πυκνότητας πιθανότητας, καθώς και οι κυριότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές. Από την Εκτιμητική δίνονται οι έννοιες του τυχαίου δείγματος, της στατιστικής συνάρτησης, των εκτιμητών και οι ιδιότητες αυτών, όπως και οι μέθοδοι εύρεσής τους.

Προαπαιτούμενη γνώση
Για την κατανόηση αυτού του κεφαλαίου είναι απαραίτητη η γνώση βασικών εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης και ειδικότερα βασικές έννοιες διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Χρήσιμες είναι, επίσης, βασικές έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τα βιβλία «Θεωρία Πιθανοτήτων Ι» των Σ. Κουνιά και Χ. Μωυσιάδη, (σελ.44), «Στατιστική, Θεωρία - Εφαρμογές» των Φ. Κολυβά-Μαχαίρα και Ε. Μπόρα-Σέντα (σελ. 44) και «Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική» της Φ. Κολυβά-Μαχαίρα (σελ. 44).

1.1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ορισμός 1.1
Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος αποτελούν το **δειγματοχώρο** (sample space) που συμβολίζεται με S. Κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος, δηλαδή κάθε σημείο του δειγματοχώρου, λέγεται **απλό γεγονός** ή **ενδεχόμενο** (simple event). Οι δειγματοχώροι που έχουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων ονομάζονται **διακριτοί** (discrete), ενώ αυτοί που έχουν μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων ονομάζονται **μη διακριτοί** ή **συνεχείς** (continuous).

Ορισμός 1.2
Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** (disjoint events), όταν η πραγματοποίηση του ενός ενδεχομένου αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι:

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα } \Leftrightarrow A \cap B = AB = \emptyset.$$

Για παράδειγμα το να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι δύο ενδεχόμενα ασυμβίβαστα.

Ορισμός 1.3
Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** (stochastically independent), όταν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου A, δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B και αντίστροφα.

Για παράδειγμα το φύλο του πρώτου παιδιού είναι ανεξάρτητο ενδεχόμενο από το φύλο του δεύτερου παιδιού σε μια οικογένεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι για μη τετριμμένα γεγονότα (διάφορα του κενού και του συνόλου αναφοράς S) ισχύει ότι: αν είναι ασυμβίβαστα, τότε δεν είναι ανεξάρτητα, και αντίστροφα.

Ορισμός 1.4 [Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας [Kolmogorov (σελ.44)]
Η **πιθανότητα** (probability) ορίζεται ως μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

1. $\mathrm{P}(S) = 1$.
2. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$.
3. Αν I είναι ένα σύνολο δεικτών ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}\Big(\underset{i\,\in\,I}{\cup} A_i\Big) = \sum_{i\,\in\,I} \mathrm{P}(A_i)$$

για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $\{A_i\,, i \;\in\; I\}$ με $A_i \;\in\; S$ και για τα οποία ισχύει ότι $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\;\; i \neq j$.

Στην πράξη η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(S)}\;,$$

όπου $N(A)$ είναι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων και $N(S)$ είναι το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων, με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι ισοπίθανες. Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των απλών ενδεχομένων του A, ενώ το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

Ορισμός 1.5
Η πιθανότητα του ενδεχομένου B, όταν είναι γνωστό ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** (conditional probability) του B δεδομένου του A και συμβολίζεται με:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}\;.$$

Θεώρημα 1.1 [Bayes (σελ.44)]
Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα με $\mathrm{P}(B) \neq 0$, τότε:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}\;.$$

Μια από τις πιο βασικές έννοιες, τόσο στη θεωρία των Πιθανοτήτων, όσο και στη Στατιστική, είναι αυτή της τυχαίας μεταβλητής. Έστω ο χώρος πιθανοτήτων $(S, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ενός πειράματος, όπου S είναι ο δειγματοχώρος, $\mathcal{F}$ η οικογένεια των ενδεχομένων και P ο νόμος που μας δίνει την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου. Για να μελετηθεί το αποτέλεσμα ενός πειράματος, είναι χρήσιμο να αντιστοιχηθούν τα απλά ενδεχόμενα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.6
Η απεικόνιση $X(\cdot)$ που επιτρέπει την αντιστοίχηση του δειγματικού χώρου S στην ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ($X(\cdot)\colon S \to \mathbb{R}$) ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)** (random variable), αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $X^{-1}(-\infty, x] \equiv \{\omega\colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, είναι δηλαδή ενδεχόμενο του S.

Το πεδίο ορισμού της τ.μ. είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος, ενώ το πεδίο τιμών είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Οι τ.μ. συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα X, Y, Z,… ενώ οι αντίστοιχες τιμές τους με πεζά γράμματα. Για παράδειγμα, αν η τυχαία μεταβλητή X συμβολίζει το πλήθος των ατόμων μιας οικογένειας, τότε οι τιμές $x_i = 1,2,3, \ldots$, συμβολίζουν τις τιμές της συγκεκριμένης μεταβλητής. Αν η έρευνα που πραγματοποιείται αφορά μόνο σ' ένα από τα χαρακτηριστικά του δείγματος, τότε η τ.μ. ονομάζεται μονοδιάστατη. Αν στην έρευνα ενδιαφέρουν περισσότερα του ενός από τα χαρακτηριστικά του δείγματος, τότε η τ.μ. ονομάζεται πολυδιάστατη.

Ορισμός 1.7
Μια τ.μ. ονομάζεται **διακριτή ή απαριθμητή** (discrete variable), όταν το πλήθος τιμών της είναι πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο. Αν η τ.μ. παίρνει τιμές σε διάστημα της μορφής (a, b), όπου $-\infty < a < b < +\infty$, τότε λέγεται **συνεχής** (continuous).

Παραδείγματα διακριτών τυχαίων μεταβλητών είναι το πλήθος των μελών μιας οικογένειας, η βαθμολογία των μαθητών στο σχολείο, ο αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που δέχεται κάποιος κατά τη διάρκεια μιας ημέρας, ο αριθμός των αυτοκινήτων, που διέρχονται από μια διασταύρωση κ.ά. Παραδείγματα συνεχών μεταβλητών είναι το ύψος, το βάρος η επίδοση των αθλητών στο μήκος, η ατμοσφαιρική πίεση κ.ά.

Με απλά λόγια, η τ.μ. εκφράζει μαθηματικά κάποιο γεγονός και παίρνει τις τιμές της με κάποια πιθανότητα. Ο τρόπος με τον οποίο κατανέμονται οι πιθανότητες στις διάφορες τιμές της τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τη συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 1.8

Η συνάρτηση $F_X(x)$ που ορίζεται ως: $F_X(x) = P(X \leq x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x ονομάζεται **συνάρτηση αθροιστικής κατανομής** (σ.α.κ.) (cumulative probability distribution) ή απλά **συνάρτηση κατανομής** (σ.κ.) της τ.μ. X και υπολογίζει την πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει να πάρει όλες τις τιμές μέχρι και το σημείο x. Η συνάρτηση $F_X(x)$ συμβολίζεται επίσης με $F(x)$, αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

Σε κάθε τ.μ. X αντιστοιχεί μονοσήμαντα μια σ.α.κ. $F_X(x)$ η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
2. Η F_X(x) ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x.
3. Η F_X(x) είναι συνεχής από δεξιά, δηλαδή $\lim_{h\to0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Ορισμός 1.9

Αν η τ.μ. είναι διακριτή, τότε η συνάρτηση που υπολογίζει την πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει την τιμή x ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) (probability function) της τ.μ. X, συμβολίζεται με $f_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$ και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $f_X(x) \geq 0, \forall\, x$,
2. $\sum_x f_X(x) = 1$ (το x διατρέχει όλες τις τιμές της τ.μ. X)

Για τις συναρτήσεις $f_X(x)$ και $F_X(x)$ ισχύουν οι σχέσεις

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i) \ ,$$

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = F_X(x_i) - F_X(x_i - 0) \ .$$

Ορισμός 1.10

Αν η σ.α.κ. $F_X(x)$ ή η τ.μ. X είναι συνεχής, τότε υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

και η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ή πυκνότητα (σ.π.π) (probability density function) της τ.μ. X Από τον ορισμό προκύπτει ότι:

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \ ,$$

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx \ .$$

Επιπλέον, δύο σημαντικές ιδιότητες της σ.π.π. είναι οι παρακάτω:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

Ορισμός 1.11
Μέση τιμή μια συνάρτησης $g(X)$ της τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται η:

$$Eg(X) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx, \text{αν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής} \\ \sum_{x} g(x)f(x), \text{αν η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή} \end{cases}$$

Ειδικότερα:

1. Αν $g(X) = X$, τότε η EX ονομάζεται **μέση τιμή** (mean or expected value) της τ.μ. X, ενώ η EX^{ν} ονομάζεται **ν-οστή ροπή** της τ.μ. X.
2. Αν $g(X) = (X - \alpha)^{\nu}$, τότε η $E(X - \alpha)^{\nu}$ ονομάζεται **ν-οστή ροπή** της τ.μ. X **ως προς** $\boldsymbol{\alpha}$.
3. Αν $g(X) = (X - \mu)^{\nu}$, τότε η $E(X - \mu)^{\nu}$ ονομάζεται **ν-οστή κεντρική ροπή** ή **κεντρική ροπή ν-οστής τάξης** της τ.μ. X.
4. Αν $g(X) = (X - \mu)^2$, τότε η $E(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \mathrm{Var}X$ ονομάζεται **διασπορά ή διακύμανση** (variance) της τ.μ. X, ενώ η ποσότητα $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}X}$ ονομάζεται **τυπική απόκλιση** (standard deviation).

Για τη μέση τιμή και τη διασπορά ισχύουν οι σχέσεις:

1. $E(c) = c$, όπου c είναι μια σταθερά,
2. $E(cg(X)) = cEg(X)$,
3. $E(g(X) \pm h(X)) = Eg(X) \pm Eh(X)$,
4. $\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$,
5. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}X$,
6. $\mathrm{Var}(X_1 \pm X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$, αν οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες. Η συγκεκριμένη ιδιότητα γενικεύεται για n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι συνηθέστερες κατανομές των τυχαίων μεταβλητών. Αναλυτικότερα, γίνεται αναφορά στις κατανομές των πιο συνηθισμένων διακριτών μεταβλητών, όπως είναι η κατανομή Bernoulli, η διωνυμική κατανομή, η γεωμετρική κατανομή, η αρνητική διωνυμική κατανομή, η κατανομή Poisson , η υπεργεωμετρική κατανομή και η πολυωνυμική κατανομή. Για την περίπτωση των συνεχών μεταβλητών αναφέρονται οι κατανομές: ομοιόμορφη, κανονική και τυπική κανονική, Student , Χι-τετράγωνο, εκθετική, Fisher, γάμμα και βήτα.

Κατανομή Bernoulli
Σε πολλά από τα πειράματα, που εξετάζουμε στις πιθανότητες διακρίνουμε μόνο δύο αποτελέσματα που ονομάζονται, συμβολικά, «επιτυχία» και «αποτυχία». Για παράδειγμα στην εξέταση ερωτήσεων τύπου Σωστό ή Λάθος, οι δύο πιθανές απαντήσεις είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Σ' αυτά, συνήθως, τα πειράματα αντιστοιχίζεται στην επιτυχία ο αριθμός 1 και στην αποτυχία ο αριθμός 0.

Η διακριτή τ.μ. η οποία παίρνει την τιμή μηδέν με πιθανότητα q και την τιμή ένα με πιθανότητα p, όπου $p + q = 1$, λέμε ότι ακολουθεί την **κατανομή Bernoulli** με παράμετρο p και συμβολίζεται με $B(1, p)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli δίνεται από τη σχέση:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \text{όπου } x = 0, 1 \text{ και } 0 < p < 1.$$

Η μέση τιμή της κατανομής Bernoulli ισούται με $EX = p$ και η διακύμανσή της με $\mathrm{Var}X = pq = p(1 - p)$.

Μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli παράγει τις επόμενες τρεις κατανομές.

Διωνυμική Κατανομή (Binomial Distribution)
Αν υποτεθεί ότι πραγματοποιούνται n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας p σε κάθε δοκιμή, τότε η τ.μ. X η οποία εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών στις n δοκιμές (επαναλήψεις) Bernoulli

ονομάζεται διωνυμική κατανομή και συμβολίζεται με $B(n,p)$. Η συνάρτηση πιθανότητας να έχουμε $x = 0,1,\dots,n$ επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad \text{όπου } x = 0,1,\dots,n \text{ και } 0<p<1.$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της διωνυμικής κατανομής ισούται με $EX = np$ και η διακύμανσή της με $\mathrm{Var}X = np(1-p)$. Για παράδειγμα ας υποτεθεί ότι ένα ζάρι ρίχνεται τρεις φορές και ζητείται η πιθανότητα ο αριθμός τέσσερα να έρθει ακριβώς δύο φορές. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα είναι:

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} = \frac{5}{72}\ .$$

Γεωμετρική (Pascal) Κατανομή

Η τ.μ. X που δηλώνει το πλήθος των ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli, που απαιτούνται, μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή ή κατανομή Pascal. Αν p είναι η πιθανότητα επιτυχίας, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1}, \text{όπου } x = 1,2,\dots \text{ και } 0<p<1.$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της και η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής ισούται με:

$$EX = \frac{1}{p}\ , \qquad \mathrm{Var}X = \frac{1-p}{p^2}\ .$$

Για παράδειγμα από προγενέστερες έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι οι φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών επιτυγχάνουν στο μάθημα της Στατιστικής σε ποσοστό 35%. Να βρεθεί η πιθανότητα ο 4[ος] φοιτητής που θα ερωτηθεί να έχει επιτύχει στο μάθημα, ενώ οι προηγούμενοι απέτυχαν.

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (Negative Binomial Distribution-Polya)

Η τ.μ. που ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή εκφράζει το πλήθος δοκιμών μιας διαδικασίας Bernoulli, μέχρι να συμπληρωθούν n επιτυχίες. Η συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}(X=x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \text{όπου } x = n, n+1, \dots \text{ και } 0<p<1.$$

Αν $n=1$ στην αρνητική διωνυμική κατανομή, τότε προκύπτει η γεωμετρική κατανομή. Συνεπώς η γεωμετρική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής ισούται με:

$$EX = \frac{n}{p}\ , \qquad \mathrm{Var}X = \frac{n(1-p)}{p^2}\ .$$

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson είναι η κατανομή των σπάνιων γεγονότων και χρησιμοποιείται, όταν ενδιαφέρει να μετρηθεί ο αριθμός των «συμβάντων» στη μονάδα μέτρησης, που έχει ορίσει ο ερευνητής. Π.χ., τυπογραφικά λάθη ανά σελίδα, τηλεφωνικές κλήσεις ανά λεπτό ή δευτερόλεπτο. Αν μια τ.μ. ακολουθεί την κατανομή Poisson, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $X \sim P(\lambda)$, όπου $\lambda > 0$ είναι η παράμετρος της κατανομής. Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \text{όπου } x = 0,1,\dots \text{ και } \lambda > 0.$$

Αποδεικνύεται ότι τόσο η μέση τιμή όσο και η διακύμανση της κατανομής Poisson είναι ίσες με $EX = \mathrm{Var}X = \lambda$.

Να σημειωθεί ότι, αν η τ.μ. X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $B(n,p)$, $n \to \infty$ και $p \to 0$, τότε η κατανομή της τ.μ. X είναι προσεγγιστικά η Poisson με παράμετρο λ, τέτοια ώστε $np \to \lambda$.

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κατανομής Poisson είναι ότι, όταν η μονάδα μέτρησης διαφοροποιηθεί, πολλαπλασιαζόμενη ή διαιρούμενη με έναν αριθμό, τότε η τ.μ., που αναφέρεται στα συμβάντα στη νέα μονάδα μέτρησης, ακολουθεί επίσης μια κατανομή Poisson με νέα παράμετρο το αντίστοιχο πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο της παραμέτρου λ.

Υπεργεωμετρική Κατανομή (Hypergeometric Distribution)

Χρησιμοποιείται, όταν ένας πληθυσμός N αντικειμένων χωρίζεται σε δύο κατηγορίες με πλήθος k και $N-k$, αντίστοιχα. Από τον πληθυσμό λαμβάνεται ένα δείγμα μεγέθους n (χωρίς επανατοποθέτηση) και ζητείται να βρεθεί η πιθανότητα x αντικείμενα του δείγματος να ανήκουν στην πρώτη κατηγορία και $n-x$ στη δεύτερη.

Αν η τ.μ. X παριστάνει το πλήθος των αντικειμένων που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία και τα οποία βρίσκονται στο δείγμα μεγέθους n, τότε η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \text{όπου } x = 0, 1, \ldots, n, \qquad 0 < k < N, \qquad 1 \leq n \leq N \ .$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της υπεργεωμετρικής κατανομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$EX = \frac{nk}{N} \ , \qquad \mathrm{Var}X = n\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1} \ .$$

Πολυωνυμική Κατανομή (Polynomial Distribution)

Όταν σε ένα πείραμα το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι περισσότερα από δύο, τότε χρησιμοποιείται η πολυωνυμική κατανομή, η οποία είναι επέκταση της διωνυμικής κατανομής. Τα δυνατά αποτελέσματα συμβολίζονται με $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \geq 2$ και η πολυωνυμική κατανομή εφαρμόζεται, όταν σε μια διαδικασία n ανεξάρτητων δοκιμών ζητείται η πιθανότητα να συμβούν: n_1 φορές το ενδεχόμενο A_1, n_2 φορές το ενδεχόμενο A_2, …, n_k φορές το ενδεχόμενο A_k, όπου $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$. Θεωρείται ότι η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου A_i είναι σταθερή σε κάθε δοκιμή και δίνεται από τη σχέση: $P(A_i) = p_i$, όπου $i = 1, 2, \ldots, k$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Στην πολυωνυμική κατανομή η τ.μ. είναι πολυδιάστατη και η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_{k-1} = n_{k-1}) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \ .$$

Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform Distribution)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} \ , & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \ , & \text{αλλού} \end{cases} \ ,$$

ενώ η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

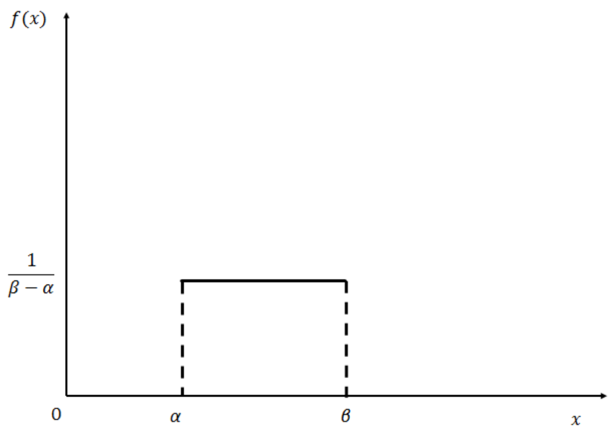
$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \ , & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 \ , & x > \beta \end{cases} \ ,$$

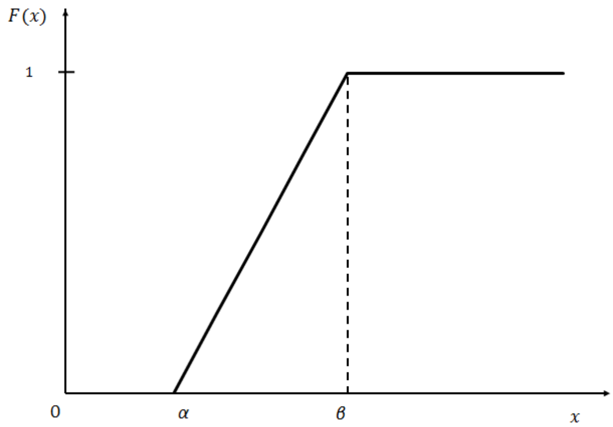
όπου α, β είναι οι παράμετροι της κατανομής με $\alpha < \beta$.

Η ομοιόμορφη κατανομή συμβολίζεται με $U(\alpha, \beta)$ και αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανσή της ισούται με:

$$EX = \frac{\alpha + \beta}{2} \ , \qquad \mathrm{Var}X = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \ .$$

Οι γραφικές παραστάσεις των σ.π.π. $f(x)$ και σ.α.κ. $F(x)$ δίνονται στα ακόλουθα σχήματα.





Σχήμα 1.1 *Γραφικές παραστάσεις των σ.π.π. και σ.α.κ. της ομοιόμορφης κατανομής.*

Η ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$ προκύπτει από την $U(\alpha,\beta)$ για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ και είναι πολύ σημαντική για τη δημιουργία γεννητριών τυχαίων αριθμών.

Κανονική Κατανομή (Normal Distribution)

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ,$$

όπου μ, σ είναι οι παράμετροι της κατανομής, με $-\infty < \mu < +\infty$ και $\sigma > 0$. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι $N(\mu, \sigma^2)$. Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής ισούται με $EX = \mu$ και η διακύμανσή της με $VarX = \sigma^2$.

Η κανονική κατανομή είναι από τις σπουδαιότερες κατανομές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πολλές τυχαίες μεταβλητές (φαινόμενα στη φύση) ακολουθούν τη συγκεκριμένη κατανομή. Επιπλέον, για μεγάλα δείγματα ισχύουν τα κεντρικά οριακά θεωρήματα, με συνέπεια πολλές κατανομές να συγκλίνουν στην κανονική κατανομή.

Η τ.μ. Z με σ.π.π. που δίνεται από την καμπύλη του Gauss:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , \qquad z \in \mathbb{R} \ ,$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$, η οποία ονομάζεται τυποποιημένη ή τυπική κανονική κατανομή.

Η μαθηματική σχέση που συνδέει την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα και ονομάζεται τυποποίηση της τ.μ. X.

Θεώρημα 1.2

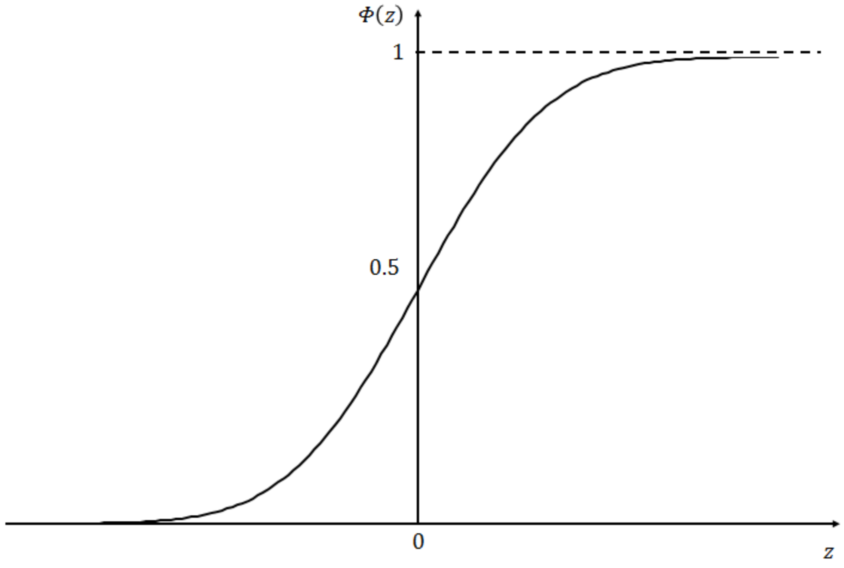
Αν η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τ.μ. $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$ κατανομή.

Το θεώρημα 1.2 είναι πολύ χρήσιμο, διότι υπάρχουν πίνακες (παράρτημα B, πίνακας B1, σελ. 214), οι οποίοι δίνουν την πιθανότητα:

$$\mathrm{P}(Z \le z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \qquad z \in \mathbb{R} \ .$$

Να σημειωθεί ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται αναλυτικά.

Η σ.α.κ. της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$ συμβολίζεται με $\Phi(z)$ και η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 1.2.

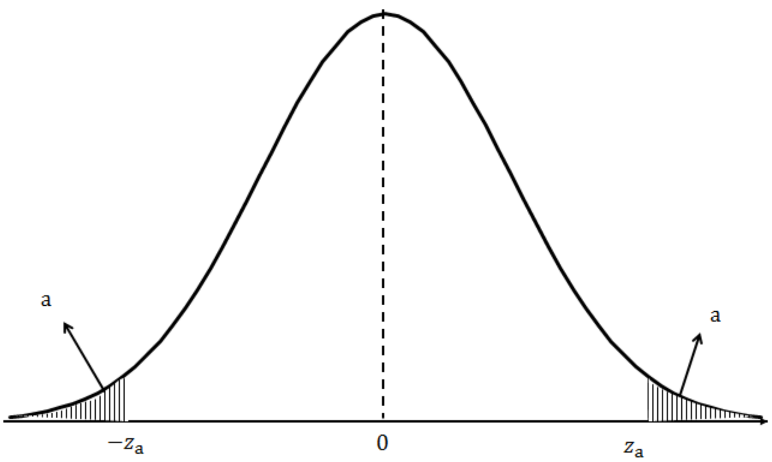


Σχήμα 1.2 *Γραφική παράσταση της σ.α.κ. της* $N(0, 1)$.

Οι πίνακες (παράρτημα Β, πίνακας Β1, σελ. 214), στους οποίους δίνονται οι τιμές των πιθανοτήτων $\Phi(z)$, περιέχουν και τις τιμές των σημείων z_{a} για τα οποία ισχύει $\mathrm{P}(Z \geq z_{\mathrm{a}}) = \mathrm{a}$ ή $\Phi(z_{\mathrm{a}}) = 1 - \mathrm{a}$, $0 \leq \mathrm{a} \leq 1$, όπως φαίνονται και στο σχήμα 1.3.

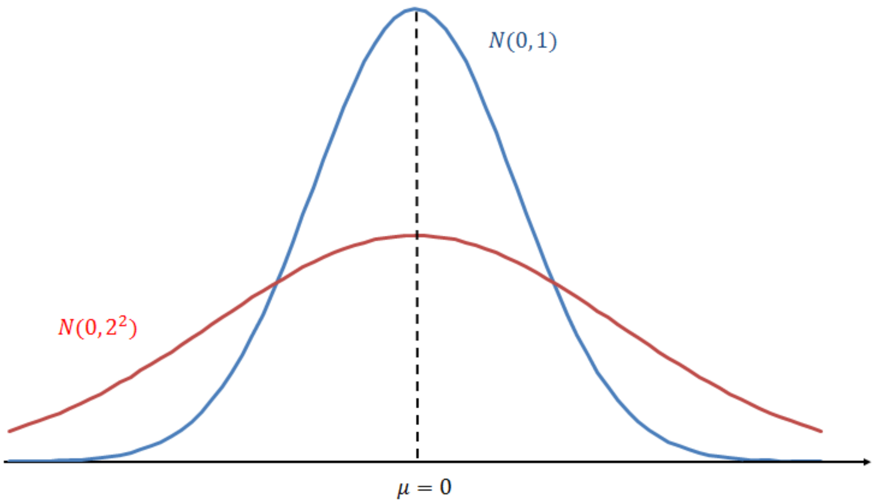
Να σημειωθεί ότι η κανονική κατανομή είναι συμμετρική ως προς τη μέση της τιμή, με συνέπεια για την κανονική κατανομή $N(0, 1)$ και για $\alpha > 0$ να ισχύει:

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a) \ .$$



Σχήμα 1.3 *Συμμετρία και σημεία της κανονικής κατανομής.*

Στο επόμενο σχήμα 1.4 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. των κανονικών κατανομών $N(0, 1)$ και $N(0, 2^2)$.



Σχήμα 1.4 *Γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. των κανονικών κατανομών* $N(0,\,1)$ *και* $N(0,\,2^2)$.

Κατανομή Γάμμα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής γάμμα, που συμβολίζεται με $G(\alpha,\beta)$, δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{a-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} ,$$

όπου α, β είναι οι παράμετροι της κατανομής, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Η συνάρτηση $\Gamma(\alpha)$ ορίζεται από τη σχέση:

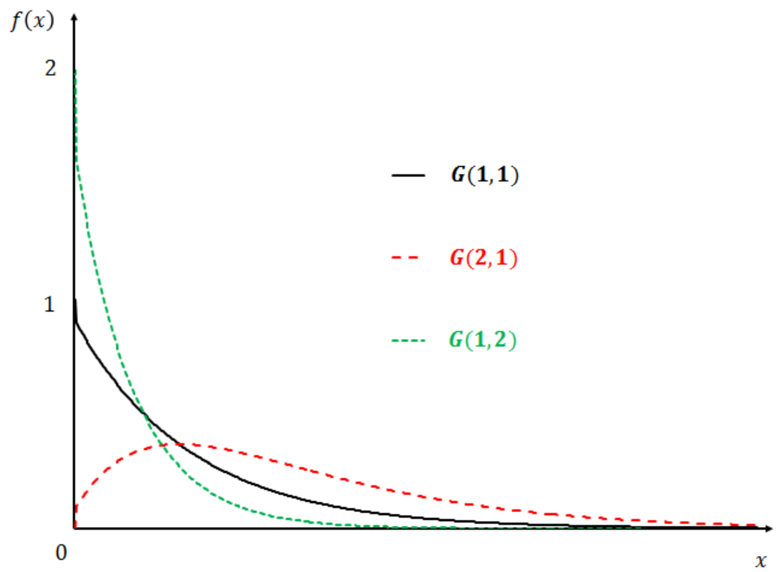
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \ .$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1),\, \alpha > 0 \ \Gamma(n) = (n-1)!,\, n \in \mathbb{Z},\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ .$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής γάμμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$EX = \frac{\alpha}{\beta}\,, \quad \mathrm{Var}X = \frac{\alpha}{\beta^2}\,.$$



Σχήμα 1.5 *Γραφική παράσταση της σ.π.π. των κατανομών* $G(1, 1)$, $G(2, 1)$ *και* $G(1, 2)$.

Η κατανομή γάμμα είναι πολύ σημαντική, διότι τόσο η εκθετική κατανομή, όσο και η κατανομή Χι-τετράγωνο είναι ειδικές περιπτώσεις της. Για $\alpha = 1$ και $\beta = \lambda$ προκύπτει η κατανομή $G(1, \lambda)$ που είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, ενώ για $\alpha = \frac{n}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$ προκύπτει η κατανομή $G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ που είναι η κατανομή Χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας.

Κατανομή Βήτα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής βήτα, που συμβολίζεται με $\beta(\gamma, \delta)$, δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}}{\beta(\gamma, \delta)} \quad , \qquad 0 < x < 1 \ ,$$

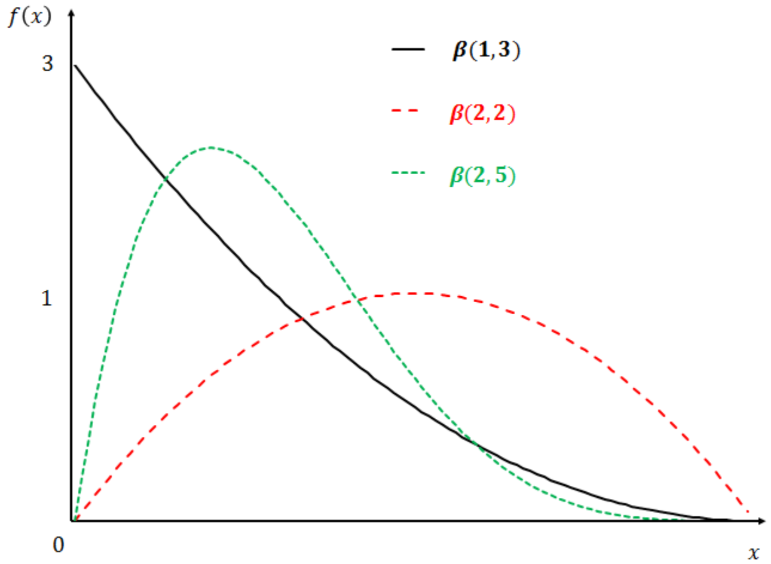
όπου γ, δ είναι οι παράμετροι της κατανομής με $\gamma > 0$ και $\delta > 0$. Η συνάρτηση $\beta(\gamma, \delta)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\beta(\gamma, \delta) = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1} dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)} \ .$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής βήτα δίνονται από τις σχέσεις:

$$EX = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} \quad , \quad \mathrm{Var}X = \frac{\gamma\delta}{(\gamma+\delta)^2(\gamma+\delta+1)} \ .$$

Να σημειωθεί ότι για $\gamma = \delta = 1$ η κατανομή $\beta(1,1)$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$.



Σχήμα 1.6 *Γραφική παράσταση της σ.π.π. των κατανομών* $\beta(1, 3)$, $\beta(2, 2)$ *και* $\beta(2, 5)$.

Κατανομή Student με v βαθμούς ελευθερίας

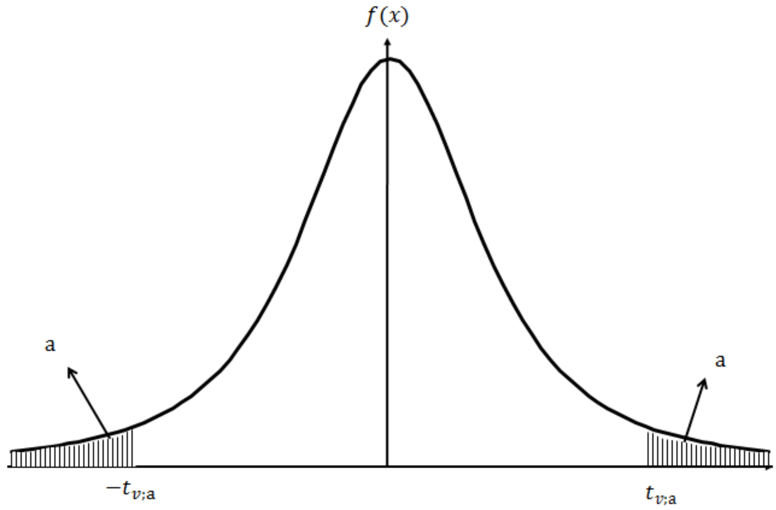
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student (σελ. 44), που συμβολίζεται με t_v, δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty \ .$$

όπου v είναι η παράμετρος της κατανομής για την οποία ισχύει $v > 0$. Τα σημεία $t_{v;\mathrm{a}}$ της κατανομής Student ορίζονται ως:

$$P(X \geq t_{v;\mathrm{a}}) = \mathrm{a} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}(X < t_{v;\mathrm{a}}) = \int_{-\infty}^{t_{v;\mathrm{a}}} f(x) dx$$

και δίνονται από πίνακες (παράρτημα Β, πίνακας Β2, σελ. 215), για διάφορες τιμές του a, δηλαδή για a = 0.005, 0.025, 0.05 και 0.10. Να σημειωθεί ότι η κατανομή Student για $v > 30$ συγκλίνει με την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επιπλέον, η κατανομή Student είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7 *Συμμετρία και κρίσιμα σημεία της κατανομής Student.*

Κατανομή Χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Χι-τετράγωνο, που συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$**,** δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} , \qquad x > 0 \ .$$

Τα σημεία $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2$ της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$ ορίζονται ως:

$$\mathrm{P}\left(X \geq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\right) = \mathrm{a} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}\left(X < \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\right) = \int_0^{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2} f(x)dx$$

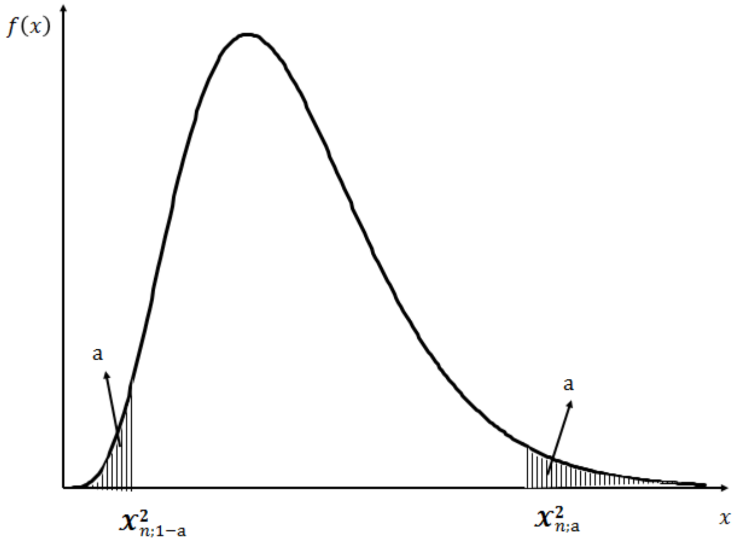
και δίνονται από πίνακες (παράρτημα Β, πίνακας Β3, σελ. 216) για τιμές $\mathrm{a} = 0.005$, $\mathrm{a} = 0.025$, $\mathrm{a} = 0.05$ και $\mathrm{a} = 0.10$. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(X \leq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\right) \ ,$$

Για μεγάλη τιμή του n η κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$ συγκλίνει σε κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = n$ και διασπορά $\sigma^2 = 2n$ και ισχύει:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2 = \frac{1}{2}\left(z_{\mathrm{a}} + \sqrt{2n-1}\right)^2 \ ,$$

όπου z_{a} η τιμή από τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0, 1)$ για το ίδιο a. Στο σχήμα 1.8 δίνεται η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$ κατανομής.



Σχήμα 1.8 *Γραφική παράσταση της σ.π.π. της Χι-τετράγωνο κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας.*

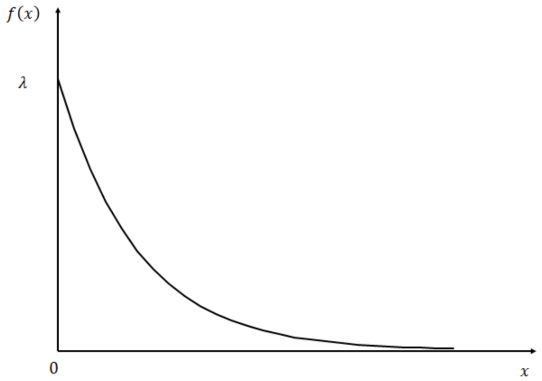
Εκθετική κατανομή
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής, που συμβολίζεται με $Exp(\lambda)$ ή $E(\lambda)$, δίνεται από τη σχέση:

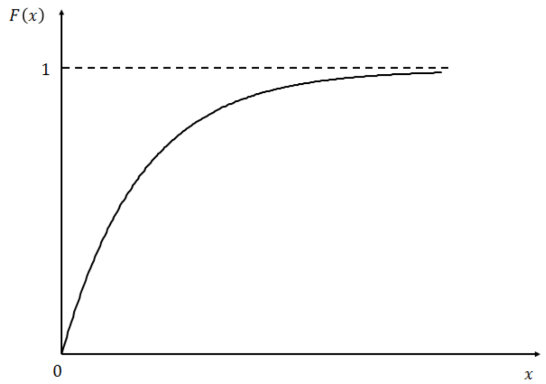
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

όπου λ είναι η παράμετρος της κατανομής. Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της εκθετικής κατανομής είναι:

$$EX = \frac{1}{\lambda}\ , \quad \mathrm{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}\ .$$

Οι γραφικές παραστάσεις των σ.π.π. $f(x)$ και σ.α.κ. $F(x)$ της εκθετικής κατανομής δίνονται στα παρακάτω σχήματα.





Σχήμα 1.9 *Γραφικές παραστάσεις των σ.π.π. και σ.α.κ. της εκθετικής κατανομής.*

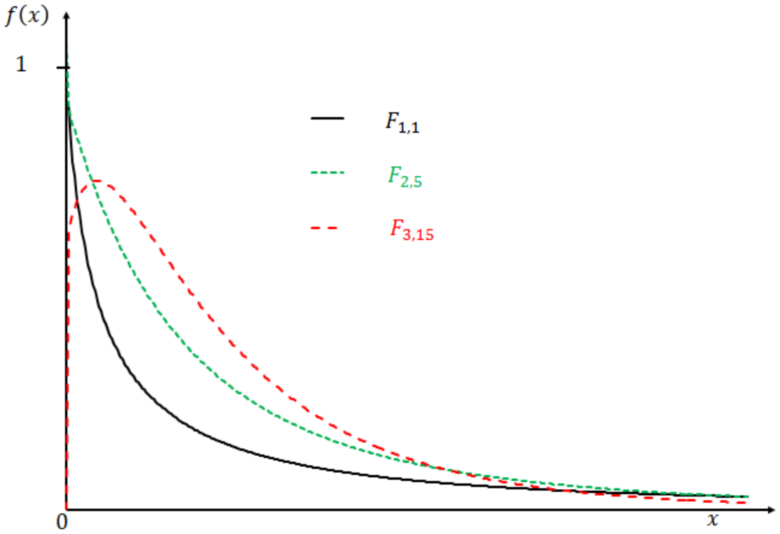
Κατανομή Fisher με v_1, v_2 βαθμούς ελευθερίας
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Fisher ή Fisher-Snedecor (σελ. 44, 44), που συμβολίζεται με F_{v_1,v_2}, δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \frac{x^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}\ , \qquad 0 < x < +\infty\ ,$$

όπου v_1, v_2 είναι οι παράμετροι της κατανομής με $v_1 > 0, v_2 > 0$. Τα σημεία $F_{v_1,v_2;\mathrm{a}}$ της κατανομής Fisher ορίζονται ως:

$$1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}\left(X < F_{v_1,v_2;\mathrm{a}}\right) = \int_0^{F_{v_1,v_2;\mathrm{a}}} f(x)dx$$

και δίνονται από πίνακες (παράρτημα Β, πίνακας Β4, σελ. 217 και παράρτημα Β, πίνακας Β5, σελ. 219) για $\mathrm{a} = 0.005$, $\mathrm{a} = 0.025$, $\mathrm{a} = 0.05$, $\mathrm{a} = 0.10$ και για διάφορες τιμές των v_1, v_2. Στο σχήμα 1.10 δίνεται η γραφική παράσταση της κατανομής για διάφορες τιμές των βαθμών ελευθερίας v_1 και v_2.



Σχήμα 1.10 *Γραφική παράσταση της σ.π.π. των κατανομών* $F_{1,\,1}$, $F_{2,\,5}$ *και* $F_{3,\,15}$.

Να σημειωθεί ότι, αν η τ.μ. X ακολουθεί την F_{v_1,v_2} κατανομή, τότε η τ.μ.:

$$Y = \frac{1}{X}$$

ακολουθεί την F_{v_2,v_1} κατανομή.

Μετασχηματισμοί τυχαίων μεταβλητών

Θεώρημα 1.3

Έστω ότι η τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x)$ και η τ.μ. $Y = g(X)$, τότε:

1. Αν η $y = g(x)$ λύνεται μονοσήμαντα (είναι μονότονη και παραγωγίσιμη ως προς x), δηλαδή $x = g^{-1}(y)$, τότε η σ.π.π. $f_Y(y)$ της τ.μ. Y, δίνεται από τη σχέση:
$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| .$$
2. Αν η $y = g(x)$ έχει περισσότερες από μια λύσεις για κάποια συγκεκριμένη τιμή του y, δηλαδή $x_i = g_i^{-1}(y)$, τότε η σ.π.π. $f_Y(y)$ της τ.μ. Y, δίνεται από τη σχέση:
$$f_Y(y) = \sum_i f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx_i}{dy}\right| .$$

Στο εξής και εφόσον δε δημιουργείται σύγχυση, θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f_X(y)$ αντί του $f_X(g^{-1}(y))$, χάριν απλότητας. Να σημειωθεί ότι ο υποδείκτης είναι απαραίτητος.

Παράδειγμα 1.1

Δίνεται ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει σ.π.π. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$ δηλαδή ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$. Να βρεθεί η σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής $Y = 2\lambda X$.

Λύση

Από τη σχέση $y = 2\lambda x$ προκύπτει ότι $x = \frac{y}{2\lambda}$, με συνέπεια η σ.π.π. της τ.μ. Y να υπολογιστεί αν στη συνάρτηση $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ αντικατασταθεί το x από το $\frac{y}{2\lambda}$ και το αποτέλεσμα πολλαπλασιαστεί με $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\lambda}$. Επομένως,

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda\left(\frac{y}{2\lambda}\right)} \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, y \geq 0.$$

Παρατηρείται ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι η σ.π.π. της κατανομής Χι-τετράγωνο με 2 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή η τ.μ. $Y = 2\lambda X$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2$ κατανομή.

Θεώρημα 1.4

Έστωσαν X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα. Η τ.μ. $Z = X_1 \pm X_2$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Θεώρημα 1.5

Έστωσαν οι ανεξάρτητες τ.μ. X_1 και X_2,όπου η τ.μ. X_1 ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$ και η τ.μ X_2 ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$, τότε η τ.μ. $Y = X_1 / \sqrt{\frac{X_2}{n}}$ ακολουθεί την κατανομή Student t_n.

Θεώρημα 1.6

Αν οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν τυπική κατανομή $N(0,1)$ η καθεμία, τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$.

Θεώρημα 1.7

Αν οι $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομές $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n_i}^2$, $i = 1,2, \dots, k$, αντίστοιχα, τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$, όπου $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Θεώρημα 1.8

Έστωσαν X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν η X_1 την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n_1}^2$ και η $X_1 + X_2$ την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$, με $n > n_1$, τότε η τ.μ. X_2 ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-n_1}^2$.

Θεώρημα 1.9

Έστωσαν X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομές $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n_1}^2$ και $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n_2}^2$, αντίστοιχα, τότε η τ.μ. $Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ ακολουθεί την κατανομή F_{n_1,n_2}.

Ορισμός 1.12

Ως **ροπογεννήτρια** (moment generating function) της τ.μ. X ορίζεται η συνάρτηση $M_X(t) = Ee^{iX}$, όπου t είναι μία πραγματική μεταβλητή.

Θεώρημα 1.10

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ροπογεννήτριες $M_{X_i}(t)$, $i = 1,2, \dots, n$, τότε η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ έχει ροπογεννήτρια που δίνεται από τη σχέση $M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} E_{X_i}(t)$.

1.2. Στοιχεία Εκτιμητικής

Οι τυχαίες μεταβλητές και οι κατανομές τους χρησιμοποιούνται, για να περιγράψουν φαινόμενα ή πληθυσμούς. Η ανάλυση όλων των στοιχείων του πληθυσμού ή ενός φαινομένου αρκούν, για να μελετηθεί μια κατανομή. Το παραπάνω γεγονός είναι πρακτικά αδύνατο και αυτό οφείλεται είτε στο κόστος είτε στην έλλειψη χρόνου. Άρα η μελέτη του πληθυσμού ή του φαινομένου πρέπει να γίνει με κάποια προσέγγιση, αναλύοντας ένα κατάλληλο μέρος αυτών. Για το σκοπό αυτό γίνεται χρήση ανεξάρτητων παρατηρήσεων, οι οποίες πρέπει να είναι, όσο είναι δυνατό, αντιπροσωπευτικές του πληθυσμού ή του φαινομένου.

Στις παραγράφους που ακολουθούν δίνονται ορισμοί και θεωρήματα, που αφορούν τη μελέτη της κατανομής, της μέσης τιμής και της διασποράς μιας τ.μ., τις ιδιότητες των εκτιμητών και τις μεθόδους εκτίμησης.

Ορισμός 1.13

Τυχαίο δείγμα (τ.δ.) (random sample) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ της ίδιας τ.μ. Ο αριθμός n ονομάζεται μέγεθος του δείγματος. Τα αποτελέσματα n δοκιμών σημειώνονται με $\underset{\sim}{\mathrm{x}}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και δεν είναι τυχαίες μεταβλητές, ενώ το τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι τ.μ. Το πεδίο ορισμού ενός τ.δ. είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος.

Το τ.δ. είναι μια πολυδιάστατη τ.μ. με συνιστώσες ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Αν X είναι η τ.μ. από την οποία προέρχεται το δείγμα, τότε ισχύει ότι:

$$E(X_i) = EX, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}X, \;\; i = 1,2, \dots, n \ .$$

Το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό ο οποίος μπορεί να είναι άπειρου πλήθους, πεπερασμένου ή το πολύ αριθμήσιμου πλήθους.

Στην περίπτωση που ο πληθυσμός είναι άπειρος, τότε οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισχύει

$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \ ,$$

όπου $f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι η από κοινού κατανομή του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $f_{X_i}(x_i)$ είναι η κατανομή της τ.μ. X_i.

Αν ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος και η δειγματοληψία γίνεται χωρίς επανάθεση, τότε οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι εξαρτημένες και ισχύει:

$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \cdots \frac{1}{N-n+1} \ ,$$

όπου N είναι το μέγεθος του πληθυσμού και n το μέγεθος του δείγματος.

Στην περίπτωση που ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος και η δειγματοληψία γίνεται με επανάθεση, τότε οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισχύει:

$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{N^n}.$$

Στις παραγράφους και στα κεφάλαια που ακολουθούν το υπό μελέτη δείγμα είναι τυχαίο, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με συνέπεια να ισχύει:

$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \ .$$

Στις προηγούμενες παραγράφους διαπιστώθηκε ότι οι κατανομές εξαρτώνται από παραμέτρους οι οποίες στην πράξη είναι άγνωστες και θα πρέπει να προσδιοριστούν, δηλαδή να εκτιμηθούν. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του τυχαίου δείγματος.

Έστω X μια τ.μ. με σ.π. ή σ.π.π. $f_X(x)$. Στη θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστή η $f_X(x)$ και συνήθως ζητείται να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός που προσδιορίζεται με τη βοήθεια της τ.μ. X. Συνήθως η $f_X(x)$ εξαρτάται από άγνωστες σταθερές που ονομάζονται παράμετροι. Για παράδειγμα:

- Στην κατανομή Poisson $P(\lambda)$, η οποία έχει σ.π.:

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ , \qquad x=0,1,\dots\ , \qquad \lambda>0\ ,$$

η παράμετρος είναι το λ.

- Στη διωνυμική κατανομή $B(n,p)$, η οποία έχει σ.π.:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\ , \qquad x=0,1,\dots,n\ , \qquad 0<p<1\ ,$$

το μέγεθος του δείγματος n είναι γνωστό και η παράμετρος είναι η πιθανότητα p.

- Στην εκθετική κατανομή $E(\lambda)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ , \qquad x>0\ , \qquad \lambda>0\ ,$$

η παράμετρος είναι το λ.

- Στην κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ , x\in\mathbb{R}\ ,$$

υπάρχουν δύο παράμετροι, οι οποίες είναι οι μ και σ^2.

- Στην κατανομή γάμμα $G(a,\beta)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x}\ , \qquad x>0\ ,$$

υπάρχουν δύο παράμετροι, οι οποίες είναι οι $\alpha>0$ και $\beta>0$.

- Στην κατανομή βήτα $B(\gamma,\delta)$, η οποία έχει σ.π.π.:

$$f_X(x)=\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}}{\beta(\gamma,\delta)}\ , \qquad 0<x<1\ ,$$

υπάρχουν δύο παράμετροι, οι οποίες είναι οι $\alpha>0$ και $\beta>0$.

Στην πράξη συνήθως η συναρτησιακή μορφή της $f_X(x)$ είναι γνωστή, σε αντίθεση με τις παραμέτρους που είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί το αντικείμενο της **Παραμετρικής Στατιστικής**. Με τη βοήθεια ενός τ.δ. γίνεται προσπάθεια να προσδιοριστούν οι άγνωστες παράμετροι της κατανομής που μελετάται. Στο εξής, η $f_X(x)$ θα συμβολίζεται με $f(x;\theta)$, για να δηλωθεί ότι η κατανομή εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο μια άγνωστη παράμετρος θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f(x;\theta)$. Αν οι άγνωστες παράμετροι είναι περισσότερες από μια, τότε $\underset{\sim}{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)'$ θα είναι το διάνυσμα των παραμέτρων και η σ.π.π. θα συμβολίζεται με $f(x;\underset{\sim}{\theta})$. Επίσης, δε θα γίνεται διάκριση μεταξύ της σ.π. και της σ.π.π. και η $f(x;\underset{\sim}{\theta})$ θα αναφέρεται απλώς ως κατανομή, δηλώνοντας τη σ.π. αν η τ.μ. είναι διακριτή ή τη σ.π.π. αν η τ.μ. είναι συνεχής.

Το πεδίο ορισμού της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ συμβολίζεται με $\Omega\subseteq\mathbb{R}^r$, $r\geq 1$ και καλείται παραμετρικός χώρος. Για παράδειγμα:

- Στην κατανομή Poisson $P(\lambda)$, υπάρχει μια παράμετρος, δηλαδή $\theta=\lambda$ και $\Omega=(0,+\infty)$.
- Στη διωνυμική κατανομή $B(n,p)$, υπάρχει μια παράμετρος, δηλαδή $\theta=p$ και $\Omega=(0,1)$.
- Στην εκθετική κατανομή $E(\lambda)$, υπάρχει μια παράμετρος, δηλαδή $\theta=\lambda$ και $\Omega=(0,+\infty)$.
- Στην κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, υπάρχουν δύο παράμετροι, δηλαδή $\underset{\sim}{\theta}'=(\mu,\sigma^2)$, με συνέπεια να πρέπει να μελετηθούν οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

1. $\mu=\theta$: άγνωστο και σ^2 γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega=\mathbb{R}$ και η σ.π.π. γράφεται ως:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right\}\ , \qquad x\in\mathbb{R}\ .$$

2. $\sigma^2=\theta$: άγνωστο και μ: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega=(0,+\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2\right\}\ , \qquad x\in\mathbb{R}\ .$$

3. $\mu = \theta_1$: άγνωστο και $\sigma^2 = \theta_2$: άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \left\{ \underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \mathbb{R},\ \theta_2 \in (0, +\infty) \right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Η η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2}(x - \theta_1)^2\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

- Στην κατανομή γάμμα $G(\alpha, \beta)$, υπάρχουν δύο παράμετροι, δηλαδή $\underset{\sim}{\theta}' = (\alpha, \beta)$. Επομένως, προκύπτουν τρεις περιπτώσεις για τη μελέτη των παραμέτρων της:

1. $\alpha = \theta$: άγνωστο και β: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x; \theta) = \frac{\beta^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta - 1} \exp\{-\beta x\}\ , \qquad x > 0\ ,$$
2. $\beta = \theta$: άγνωστο και α: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x; \theta) = \frac{\theta^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \exp\{-\theta x\}\ , \qquad x > 0\ ,$$
3. $\alpha = \theta_1$: άγνωστο και $\beta = \theta_2$: άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \left\{ \underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \mathbb{R}^+,\ \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Η η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1 - 1} \exp\{-\theta_2 x\}, \qquad x > 0\ .$$

Υπενθυμίζεται ότι:
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx\ .$$

- Στην κατανομή βήτα $\beta(\gamma, \delta)$, επίσης υπάρχουν δύο παράμετροι, δηλαδή $\underset{\sim}{\theta}' = (\gamma, \delta)$. Και στην περίπτωση αυτή προκύπτουν τρεις περιπτώσεις, οι οποίες δίνονται παρακάτω:

1. $\gamma = \theta$: άγνωστο και δ: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x; \theta) = \frac{x^{\theta - 1}(1 - x)^{\delta - 1}}{\beta(\theta, \delta)}\ , \qquad 0 < x < 1\ ,$$
2. $\delta = \theta$: άγνωστο και γ: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x; \theta) = \frac{x^{\gamma - 1}(1 - x)^{\theta - 1}}{\beta(\gamma, \theta)}\ , \qquad 0 < x < 1\ ,$$
3. $\gamma = \theta_1$:άγνωστο και $\delta = \theta_2$: άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{x^{\theta_1 - 1}(1 - x)^{\theta_2 - 1}}{\beta(\theta_1, \theta_2)}, \qquad 0 < x < 1\ .$$

Υπενθυμίζεται ότι:
$$\beta(\gamma, \delta) = \int_0^1 x^{\gamma - 1}(1 - x)^{\delta - 1} dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma + \delta)}\ .$$

- Στην κατανομή Pareto,της οποίας η σ.π.π. είναι:
$$f(x) = \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)}\ , \qquad x > \beta\ , \qquad \alpha > 0\ , \qquad \beta > 0\ ,$$
υπάρχουν δύο παράμετροι, οι οποίες είναι οι α και β. Επομένως, $\underset{\sim}{\theta}' = (\alpha, \beta)$.

Για τη μελέτη της προκύπτουν οι ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

1. $\alpha = \theta$: άγνωστο και β: γνωστό. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x;\theta) = \theta\beta^{\theta}x^{-(\theta+1)} \ , \qquad x > \beta > 0 \ ,$$
2. $\beta = \theta$: άγνωστο και α: γνωστό. Ισχύει ότι $\Omega = (0, +\infty)$ και η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f(x;\theta) = \alpha\theta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)} \ , \qquad \alpha > 0 \ , \qquad x > \theta > 0 \ ,$$
3. $\alpha = \theta_1$: άγνωστο και $\beta = \theta_2$: άγνωστο. Στην περίπτωση αυτή $\underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$ και $\Omega = \left\{ \underset{\sim}{\theta}' = (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \mathbb{R}^+, \ \theta_2 \in \ \mathbb{R}^+ \right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Η σ.π.π. γράφεται ως:
$$f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \theta_1\theta_2^{\theta_1}x^{-(\theta_1+1)} \ , \qquad \theta_1 > 0 \ , \qquad x > \theta_2 > 0 \ .$$

Το τ.δ. $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ δίνει πληροφορίες για τις άγνωστες παραμέτρους της κατανομής, αρκεί να βρεθεί κατάλληλη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ του δείγματος.

Ορισμός 1.14
Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X. Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, που δεν περιέχει άγνωστες παραμέτρους ,καλείται **στατιστική συνάρτηση** (στ.σ.) (statistical function). Το πεδίο ορισμού της στ.σ. είναι ο δειγματοχώρος, ενώ το πεδίο τιμών είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.15
Εκτιμήτρια συνάρτηση ή **εκτιμητής** (estimator) της παραμέτρου θ καλείται μια στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ που έχει πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο Ω και συμβολίζεται με $\hat{\theta}$. Η εκτιμήτρια συνάρτηση είναι τυχαία μεταβλητή. Η τιμή $T(\underset{\sim}{x})$ της εκτιμήτριας συνάρτησης για ένα συγκεκριμένο τ.δ. $\underset{\sim}{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ καλείται εκτίμηση της παραμέτρου θ.

Με την εκτίμηση παραμέτρων του πληθυσμού ασχολείται η Εκτιμητική και προτείνει δύο ειδών εκτιμητές: **εκτιμητές σε σημείο** και **εκτιμητές σε διάστημα**.
Προφανώς, οι στατιστικές συναρτήσεις περιέχουν τ.μ., με συνέπεια να είναι και οι ίδιες τ.μ. Αν οι τ.μ. $X_{i,}$ αντικατασταθούν με τις τιμές $x_{i,}$, τότε η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι μια συγκεκριμένη πραγματική τιμή. Ο πραγματικός αυτός αριθμός ονομάζεται τιμή της στατιστικής συνάρτησης. Οι στ.σ. βοηθούν να οριστούν τα στατιστικά του δείγματος από τις παραμέτρους του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται. Τα στατιστικά αυτά είναι:

1. Ο δειγματικός μέσος που ορίζεται ως:
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$
2. Η δειγματική ροπή r τάξης που ορίζεται ως:
$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \ , \ r = 2,3, \dots$$
3. Η δειγματική κεντρική ροπή r τάξης που ορίζεται ως:
$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^r \ , \ r = 2,3, \dots$$
Για $r = 2$ στον παραπάνω τύπο προκύπτει η δειγματική διασπορά που συμβολίζεται με:
$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \ .$$
Να σημειωθεί ότι ως δειγματική διασπορά τις περισσότερες φορές χρησιμοποιείται η ποσότητα:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Οι ποσότητες S και S' που είναι ίσες με τις θετικές τετραγωνικές ρίζες των S'^2 και S^2, αντίστοιχα ονομάζονται δειγματική τυπική απόκλιση.

4. Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $\underset{\sim}{Y}' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ δύο τυχαία δείγματα από τις τ.μ. X και Y, αντίστοιχα, τότε η δειγματική ή εμπειρική συνδιασπορά είναι:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}), \qquad ή \quad S'_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \ ,$$

ενώ ο δειγματικός ή ο εμπειρικός συντελεστής συσχέτισης ισούται με:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} \ .$$

Όπως κάθε τ.μ., έτσι και οι στ.σ., οι οποίες είναι τ.μ., ακολουθούν κάποια κατανομή. Παρακάτω δίνονται μερικά χρήσιμα θεωρήματα για την κατανομή της μέσης τιμής $\bar{X}$ και της διασποράς S^2, όταν το δείγμα προέρχεται από κανονική κατανομή.

Θεώρημα 1.11

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Θεώρημα 1.12

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. από κατανομή $F(x)$ και για την οποία ισχύει ότι $E(X_i) = \mu$ και $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, τότε η τ.μ. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ συγκλίνει κατά νόμο στην τυπική κανονική κατανομή, που σημαίνει ότι, για αρκούντος μεγάλο n ($n \geq 30$), ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Θεώρημα 1.13

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Οι τ.μ. $\bar{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες και ισχύει ότι η τ.μ. $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ ακολουθεί την κατανομή Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή την t_{n-1}, ενώ η τ.μ. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ακολουθεί κατανομή Χι-τετράγωνο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-1}^2$.

Θεώρημα 1.14

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. μεγέθους n και $\underset{\sim}{Y}' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ένα τ.δ. μεγέθους m. Τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα από κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα. Τότε για την τ.μ. $\bar{X} - \bar{Y}$ ισχύει ότι:

$$\bar{X} - \bar{Y} \ \sim \ N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) \ .$$

Θεώρημα 1.15

Έστωσαν $\underset{\sim}{X}' = \left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$ και $\underset{\sim}{Y}' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, δύο ανεξάρτητα τ.δ. μεγέθους n και m από κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, η δειγματική διασπορά του πρώτου δείγματος ισούται με S_1^2 και του δευτέρου με S_2^2, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n-1,m-1} \ .$$

Θεώρημα 1.16

Έστωσαν $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, δύο ανεξάρτητα τ.δ. μεγέθους n και m από κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma^2)$ και $N(\mu_2, \sigma^2)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ας είναι $\bar{X}$ η μέση τιμή και S_1^2 η διασπορά του πρώτου δείγματος, ενώ $\bar{Y}$ και S_2^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά του δευτέρου δείγματος, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim t_{n+m-2} \ .$$

Ορισμός 1.16

Αν $E(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})) = \theta$, τότε η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ονομάζεται **αμερόληπτος εκτιμητής** (unbiased estimator) της παραμέτρου θ. Αν $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, τότε η διαφορά $E(\hat{\theta}) - \theta$ ονομάζεται **μεροληψία** (bias) του εκτιμητή. Στην περίπτωση που η παράμετρος $\underset{\sim}{\theta}$ είναι πολυδιάστατη, τότε ο εκτιμητής της θα είναι επίσης πολυδιάστατος της μορφής $\underset{\sim}{\mathrm{T}}(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ και, για να είναι αμερόληπτος, θα πρέπει να ισχύει $E\left(\underset{\sim}{\mathrm{T}}(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right) = \underset{\sim}{\theta}$. Αν αναζητείται ο εκτιμητής μιας συνάρτησης της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$, έστω της $g(\underset{\sim}{\theta})$, τότε ένας εκτιμητής $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ καλείται αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\underset{\sim}{\theta})$, αν ισχύει:

$$E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right) = g\left(\underset{\sim}{\theta}\right), \qquad \underset{\sim}{\theta} \in \Omega \ .$$

Η συνάρτηση $g(\underset{\sim}{\theta})$ ονομάζεται εκτιμήσιμη ή U-εκτιμήσιμη συνάρτηση κατά Lehmann (σελ. 44). Αν όμως ισχύει ότι:

$$E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right) \neq g\left(\underset{\sim}{\theta}\right),$$

τότε η μεροληψία ή το μέσο σφάλμα της $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ ισούται με**:**

$$b\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right) = E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right) - g\left(\underset{\sim}{\theta}\right).$$

Η μεροληψία είναι συνάρτηση του $\underset{\sim}{\theta}$, αλλά συμβολίζεται με $b\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right)$**,** διότι αναφέρεται στη στ.σ. $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$**.**

Ορισμός 1.17

Ένας εκτιμητής $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_n)$ ενός τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μεγέθους n ονομάζεται **ασυμπτωτικά αμερόληπτος** (asymptotically unbiased estimator) για τη συνάρτηση $g(\underset{\sim}{\theta})$, αν ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_n)\right) = g\left(\underset{\sim}{\theta}\right), \qquad \underset{\sim}{\theta} \in \Omega \ .$$

Με άλλα λόγια, ένας εκτιμητής καλείται **ασυμπτωτικά αμερόληπτος**, όταν η μεροληψία του τείνει στο μηδέν, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει, δηλαδή:

$$\lim_{n\to\infty} b\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_n)\right) = 0 \ .$$

Ορισμός 1.18

Η ποσότητα $|T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})|$ ονομάζεται **σφάλμα** του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ της συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$, ενώ η ποσότητα $\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2$ ονομάζεται τετραγωνικό σφάλμα και είναι αυτή που χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια εκτιμήτρια συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$, η οποία θα ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error), δηλαδή να ισχύει:

$$E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2 \leq E\left(T'(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2, \qquad \underset{\sim}{\theta} \in \Omega$$

και για κάθε άλλη εκτιμήτρια $T'(\underset{\sim}{X})$. Η βέλτιστη εκτιμήτρια συνάρτηση με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι εκείνη για την οποία ισχύει:

$$E\left(T(\underset{\sim}{X})-g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2=0\ ,\qquad \underset{\sim}{\theta}\in\Omega\ .$$

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω σχέση είναι σπάνιο να επιτευχθεί. Για το λόγο αυτό η κλάση των υπό μελέτη εκτιμητών περιορίζεται στην κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών. Στην κλάση αυτή επιλέγεται εκείνος ο εκτιμητής με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Η διασπορά του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{X})$ και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$E\left(T(\underset{\sim}{X})-g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2=\mathrm{Var}T(\underset{\sim}{X})+b^2\left(T(\underset{\sim}{X})\right)\ .$$

Υπενθυμίζεται ότι $b\left(T(\underset{\sim}{X})\right)$ είναι η μεροληψία του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{X})$.

Παράδειγμα 1.2

Να δειχθεί ότι η δειγματική διασπορά που δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της θεωρητικής διασποράς οποιασδήποτε κατανομής, ενώ η δειγματική διασπορά που δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{S'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής της αντίστοιχης θεωρητικής.

Λύση

Για την πρώτη περίπτωση αρκεί να αποδειχθεί ότι : $E(S^2)=\sigma^2$.

Από τον ορισμό της διασποράς προκύπτει ότι:

$$\mathrm{Var}X=\sigma^2=EX^2-\mu^2\ ,\qquad \mu=EX\ ,$$

δηλαδή:

$$EX^2=\sigma^2+\mu^2\ .$$

Επίσης, λόγω της ανεξαρτησίας των X_i, $i=1,2,\dots,n$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Var}\bar{X}=E(\bar{X}^2)-(E\bar{X})^2\\ \mathrm{Var}\bar{X}=\mathrm{Var}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{\sigma^2}{n}\end{array}\right\}\Rightarrow E(\bar{X}^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\ .$$

Επιπλέον:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\ ,$$

με συνέπεια:

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right)=\frac{1}{n-1}n\left[(\sigma^2+\mu^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]\ ,$$

δηλαδή:

$$E(S^2)=\sigma^2\ .$$

Για τη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να αποδειχθεί ότι: $E(S'^2)\neq\sigma^2$.

Επειδή:

$$S'^2=\frac{n-1}{n}S^2\ ,$$

συνεπάγεται ότι:

$$E(S'^2)=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\ ,$$

δηλαδή:

$$E(S'^2) \neq \sigma^2 \ .$$

Στην περίπτωση αυτή η μεροληψία του εκτιμητή S'^2 είναι ίση με:

$$b(S'^2) = E(S'^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n} \ .$$

Παράδειγμα 1.3

Μετράται η απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε πέντε περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα ήταν:

1486 1489 1498 1505 1507

Αν θεωρηθεί ότι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, να βρεθεί ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς σ^2, όταν:

1. **Η μέση τιμή μ είναι άγνωστη.**
2. **Ισχύει ότι $\mu = 1500$.**

Λύση

1. Στο προηγούμενο παράδειγμα 1.2 (σελ. 32), αποδείχθηκε ότι η δειγματική διασπορά $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της θεωρητικής διασποράς σ^2, όταν ως μέση τιμή χρησιμοποιηθεί η δειγματική μέση τιμή. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι:
$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1486 + 1489 + 1498 + 1505 + 1507}{5} = 1497$$
και
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \ ,$$
ή
$$S^2 = \frac{1}{4}[(1486^2 + 1489^2 + 1498^2 + 1505^2 + 1507^2 - 5 \cdot 1497^2] \ ,$$
δηλαδή:
$$S^2 = \frac{11205395 - 11205045}{4} = 87.5 \ .$$
Επομένως, ένας αμερόληπτος εκτιμητής της θεωρητικής διασποράς σ^2, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη είναι ο αριθμός 87.5.
2. Στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι γνωστή και ίση με $\mu = 1500$, αποδεικνύεται ότι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της θεωρητικής διασποράς σ^2 είναι η ποσότητα
$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \ .$$
Αυτό, γιατί ισχύει ότι:
$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - 2\mu\sum_{i=1}^{n} E(X_i) + n\mu^2\right) \ ,$$
δηλαδή:
$$E(S^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - 2n\mu^2 + n\mu^2\right) = \frac{1}{n}(n\sigma^2 + n\mu^2 - n\mu^2) = \sigma^2 \ .$$
Επομένως, αν $\mu = 1500$, η τιμή:
$$S^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1447)^2 = \frac{(-11)^2 + (-14)^2 + (-2)^2 + 5^2 + 7^2}{5} = 79 \ ,$$

είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς.

Ορισμός 1.19
Ένας αμερόληπτος εκτιμητής $T^*(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ της συνάρτηση $g(\underset{\sim}{\theta})$ καλείται **αμερόληπτος εκτιμητής ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς** (α.ε.ο.ε.δ.) (minimum variance unbiased estimator), αν έχει τη μικρότερη διασπορά μεταξύ των αμερόληπτων εκτιμητών για κάθε $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$. Μαθηματικά αυτό μεταφράζεται ως εξής:

$$E\left(T^*(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2 = \min_{T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})}\left\{E\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) - g(\underset{\sim}{\theta})\right)^2\right\} \ , \qquad \forall\ \underset{\sim}{\theta} \in \Omega \ .$$

Δε θα αναπτυχθούν οι μέθοδοι κατασκευής α.ε.ο.ε.δ., διότι το συγκεκριμένο αντικείμενο ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος.

Ορισμός 1.20
Μια στ.σ. $\underset{\sim}{\mathrm{T}}'\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \left(T_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right), T_2\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right), \dots, T_m\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right) \in \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **επαρκής** (sufficient) για την οικογένεια κατανομών $f\left(x;\underset{\sim}{\theta}\right)$, $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$ ή απλά για την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$, αν η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$, όταν δοθεί η τιμή $\underset{\sim}{\mathrm{T}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \underset{\sim}{\mathrm{t}}$, είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ για όλες τις τιμές του $\underset{\sim}{\mathrm{t}}$, για τις οποίες μπορεί να ορισθεί η δεσμευμένη κατανομή, δηλαδή:

$$P_{\underset{\sim}{\mathrm{t}}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} = \underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)\middle|\underset{\sim}{\mathrm{T}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \underset{\sim}{\mathrm{t}}\Big) = P\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\middle|\underset{\sim}{\mathrm{t}}\right) : \text{ανεξάρτητο του } \underset{\sim}{\theta} \ .$$

Ορισμός 1.21
Η κατανομή της τ.μ. X ανήκει στην **εκθετική οικογένεια κατανομών** (Ε.Ο.Κ.) ή είναι μέλος της οικογένειας κατανομών Koopman-Darmois (σελ.44, 44), όταν μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$f(x;\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x) \ ,$$

όπου:

- Το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x;\theta) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου θ.
- Η συνάρτηση $h(x)$ είναι θετική στο σύνολο S.
- Η συνάρτηση $c(\theta)$ είναι θετική για κάθε $\theta \in \Omega$.

Ορισμός 1.22
Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια n-διάστατη τ.μ. η οποία εξαρτάται από μια r-διάστατη παράμετρο $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$, όπου $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$. Η κατανομή της τ.μ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ ανήκει στην **εκθετική οικογένεια κατανομών**, όταν μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta}) = c\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} Q_i\left(\underset{\sim}{\theta}\right)T_i\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)\right\}h\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) \ ,$$

όπου:

- Το σύνολο $S = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta}) > 0\right\}$ είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$.
- Η συνάρτηση $h(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι θετική στο σύνολο S.
- Η συνάρτηση $c(\underset{\sim}{\theta})$ είναι θετική για κάθε $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$.

Από τους ορισμούς 1.21 και 1.22 προκύπτει ότι, αν η κατανομή της τ.μ. X ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από αυτήν την τ.μ., τότε και η κατανομή της τ.μ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\mathrm{T}}(X_i)$.

Παράδειγμα 1.4

Να αποδειχθεί ότι η οικογένεια των διωνυμικών κατανομών $B(n,\theta)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Λύση

Η σ.π. για μια τ.μ. που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $B(n,\theta)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \ , \qquad \text{όπου } x = 0,1,\dots,n \ , \qquad 0 < \theta < 1 \ .$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x;\theta) = (1-\theta)^n \exp\left\{x\ln\frac{\theta}{1-\theta}\right\}\binom{n}{x} \ .$$

Το πεδίο ορισμού της κατανομής είναι ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου θ. Επίσης, αν:

$$c(\theta) = (1-\theta)^n \ ,$$
$$Q(\theta) = \ln\frac{\theta}{1-\theta},$$
$$T(x) = x \ ,$$
$$h(x) = \binom{n}{x} \ ,$$

τότε οι συναρτήσεις $c(\theta)$ και $h(x)$ είναι θετικές, διότι $x > 0$ και $\theta > 0$. Επομένως, η οικογένεια των διωνυμικών κατανομών ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Παράδειγμα 1.5

Να αποδειχθεί ότι η οικογένεια κατανομών Poisson $P(\theta)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Λύση

Η σ.π. για μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή $P(\theta)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} \ , \qquad \text{όπου } x = 0,1,\dots \ , \qquad \theta > 0 \ .$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\exp\{x\ln\theta\}\frac{1}{x!} \ .$$

Το πεδίο ορισμού της κατανομής είναι ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου θ. Επίσης, αν:

$$c(\theta) = e^{-\theta} \ ,$$
$$Q(\theta) = \ln\theta \ ,$$
$$T(x) = x \ ,$$
$$h(x) = \frac{1}{x!} \ ,$$

τότε οι συναρτήσεις $c(\theta)$ και $h(x)$ είναι θετικές, διότι $x > 0$ και $\theta > 0$. Επομένως, η οικογένεια κατανομών Poisson ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Παράδειγμα 1.6

Να αποδειχθεί ότι η κανονική κατανομή $N(\theta_1,\theta_2)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Λύση

Η σ.π.π. για μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή $N(\theta_1, \theta_2)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2}(x-\theta_1)^2\right\} , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} exp\left\{-\frac{x^2 - 2\theta_1 x + \theta_1^2}{2\theta_2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}\right\} \exp\left\{\frac{\theta_1}{\theta_2} x\right\} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta_2}\right\} .$$

Το πεδίο ορισμού της κατανομής είναι ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου θ. Επίσης, αν:

$$c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}\right\} ,$$

$$Q_1\left(\underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{\theta_1}{\theta_2} , \qquad Q_2\left(\underset{\sim}{\theta}\right) = -\frac{1}{2\theta_2} ,$$

$$T_1(x) = x , \qquad T_2(x) = x^2 ,$$

$$h(x) = 1 ,$$

τότε, προφανώς, οι συναρτήσεις $c(\theta)$ και $h(x)$ είναι θετικές. Επομένως, η κανονική κατανομή $N(\theta_1, \theta_2)$ ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Παράδειγμα 1.7

Να αποδειχθεί ότι η ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha, \theta)$ δεν ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Λύση

Η σ.π.π. για μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή $U(a, \theta)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta - \alpha}, & \alpha \le x \le \theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Διαπιστώνεται ότι το σύνολο S, όπου η $f(x;\theta)$ είναι θετική, εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Συνεπώς, η ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha, \theta)$ δεν ανήκει στην οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois.

Η κατασκευή α.ε.ο.ε.δ. γίνεται είτε με τη μέθοδο Rao-Blackwell (σελ. 44) είτε με τη βοήθεια της ανισότητας Cramer-Rao (σελ. 44). Με τη μέθοδο Cramer-Rao βρίσκεται ένα κάτω φράγμα της διασποράς του εκτιμητή.

Ορισμός 1.23

Ας είναι $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$. Η ποσότητα:

$$I(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

ονομάζεται **πληροφοριακός αριθμός του Fisher** (σελ.44).

Η από κοινού κατανομή του τ.δ. $\underset{\sim}{X}'$ θα συμβολίζεται με $L(\theta|\underset{\sim}{x}) = L(\underset{\sim}{x};\theta)$ και ισχύει:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) .$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\underset{\sim}{x};\theta) d\underset{\sim}{x} = 1 , \qquad d\underset{\sim}{x} = dx_1 dx_1 \cdots dx_n .$$

Έστω $T = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, μια μετρήσιμη συνάρτηση, που ορίζει έναν αμερόληπτο εκτιμητή της παραμέτρου θ, ισχύει δηλαδή:

$$E(T)=\theta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X_1,X_2,\dots,X_n)L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)d\,\underset{\sim}{\mathrm{x}}=\theta\,.$$

Ας υποτεθεί ότι η κατανομή $f(x;\theta)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες **συνθήκες ομαλότητας** (smoothness conditions).

1. Η $f(x;\theta)$ είναι θετική σ' ένα σύνολο S το οποίο είναι ανεξάρτητο του θ.
2. Ο παραμετρικός χώρος Ω είναι ένα ανοικτό διάστημα (πεπερασμένο ή μη-πεπερασμένο) της ευθείας των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
3. Η $f(x;\theta)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς θ, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει η $\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}$, υπάρχει η $\mathrm{Var}T$ και οι συναρτήσεις $\frac{\partial L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}$, $\left(\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}\right)^2$ και $\varphi\left(\frac{\partial L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}\right)$ είναι ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 1.17

Αν ισχύουν οι προηγούμενες συνθήκες ομαλότητας, τότε, η διασπορά της στ.σ. T δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{Var}T \ge \frac{1}{nI(\theta)}\ ,$$

όπου $I(\theta)$ είναι ο πληροφοριακός αριθμός του Fisher, όπως ορίστηκε στον ορισμό 1.22 (σελ. 36).

Θεώρημα 1.18

Δίνεται τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ που ακολουθεί κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta\in\Omega\subseteq\mathbb{R}$ και έστω ότι οι συνθήκες ομαλότητας, που περιγράφηκαν νωρίτερα, πληρούνται, τότε για κάθε εκτιμητή $U(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ της συνάρτησης $g(\theta)$, όπου η $g(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη $\forall\ \theta\in\Omega$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{Var}U\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\ge\frac{\left(g'(\theta)+b'(\theta)\right)^2}{nI(\theta)}\,.$$

Να σημειωθεί ότι η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν:

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}=k(\theta)\left(U(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\ -g(\theta)-b(\theta)\right)\,.$$

Πόρισμα 1.1

Έστω $U(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ ένας αμερόληπτος εκτιμητής της συνάρτησης $g(\theta)$ για τον οποίο ισχύει:

$$\mathrm{Var}U\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}\ .$$

τότε:

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}=k(\theta)\left(U\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)-g(\theta)\right).$$

Αντίστροφα, αν ισχύει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}{\partial\theta}=k(\theta)\left(U(\underset{\sim}{\mathrm{x}})-g(\theta)\right)\ ,$$

τότε η στ.σ. $U(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ είναι α.ε.ο.ε.δ. και αποδοτικός εκτιμητής για τη συνάρτηση $g(\theta)$ με $\mathrm{Var}U(\underset{\sim}{\mathrm{X}})=\frac{g'(\theta)}{k(\theta)}$.

Ορισμός 1.24

Έστω $W(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ένας αμερόληπτος εκτιμητής της συνάρτησης $g(\theta)$ με διασπορά $\mathrm{Var}W(\underset{\sim}{\mathrm{X}})<\infty$. Το πηλίκο:

$$a_0=\frac{\left(g'(\theta)\right)^2/nI(\theta)}{\mathrm{Var}W(\underset{\sim}{\mathrm{x}})}\ ,$$

παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1] και ονομάζεται **σχετική αποδοτικότητα ή σχετική αποτελεσματικότητα** (relative efficiency) του αμερόληπτου εκτιμητή $W(\underset{\sim}{x})$. Αν $a_0 = 1$, τότε ο αμερόληπτος εκτιμητής $W(\underset{\sim}{x})$ καλείται αποδοτικός ή αποτελεσματικός (efficient estimator).

Παράδειγμα 1.8

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή βήτα $\beta(\theta, 1)$. Να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς της συνάρτησης $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής $\beta(\theta, 1)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \;, \qquad 0 < x < 1 \;, \qquad \theta > 0 \;.$$

Η από κοινού κατανομή του τ.δ. $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ είναι:

$$L(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}.$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = n\ln\theta + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \;.$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ την προηγούμενη σχέση, προκύπτει:

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{x};\theta)}{\partial\theta} = n\frac{\partial\ln\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial(\theta-1)}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \;,$$

δηλαδή:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \;.$$

Η προηγούμενη σχέση, με απλές μαθηματικές πράξεις, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = -n\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n} - \frac{1}{\theta}\right) \;,$$

δηλαδή, γράφεται ως:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = k(\theta)\left(U(\underset{\sim}{x}) - g(\theta)\right) \;,$$

όπου:

$$k(\theta) = -n \;,$$

$$U(\underset{\sim}{x}) = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

και:

$$g(\theta) = \frac{1}{\theta} \;.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 1.1 η στ.σ. $U(\underset{\sim}{x}) = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$ είναι α.ε.ο.ε.δ. της συνάρτησης $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$ και η διασπορά του ισούται με:

$$\mathrm{Var}U\left(\underset{\sim}{x}\right) = \frac{g'(\theta)}{k(\theta)} = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)'}{-n} = \frac{1}{n\theta^2} \;.$$

Εκτός από τις ιδιότητες των εκτιμητών που έχουν ήδη αναφερθεί υπάρχουν και οι ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών. Αυτές είναι:

- Η συνέπεια ή σύγκλιση (consistency).

- Η ασυμπτωτική αποδοτικότητα ή αποτελεσματικότητα (asymptotic efficiency)
- Η ασυμπτωτική κανονικότητα (asymptotic normality).

Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ιδιότητες αφορούν μεγάλα δείγματα, δηλαδή όταν το πλήθος των παρατηρήσεων n θεωρητικά τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 1.25
Η ακολουθία εκτιμητών T_n ονομάζεται **ασθενικά συνεπής** για τη συνάρτηση $g(\theta)$ αν:

$$\underset{n\to\infty}{T_n} \xrightarrow{P} g(\theta) \ , \qquad \forall\, \theta \in \Omega \ .$$

Η ακολουθία εκτιμητών T_n ονομάζεται **ισχυρά συνεπής** για τη συνάρτηση $g(\theta)$ αν:

$$\underset{n\to\infty}{T_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} g(\theta) \ , \qquad \forall\, \theta \in \Omega \ .$$

Στο πρόβλημα εύρεσης των ικανών συνθηκών, ώστε ένας εκτιμητής να είναι συνεπής, δίνει λύση το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.19
Έστω T_n μια ακολουθία εκτιμητών της συνάρτησης $g(\theta)$. Αν οι T_n είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτοι εκτιμητές για τη συνάρτηση $g(\theta)$ και $\mathrm{Var}T_n \to 0$ όταν $n \to \infty$, τότε η ακολουθία T_n είναι συνεπής εκτιμήτρια της συνάρτησης $g(\theta)$.

Ορισμός 1.26
Η ακολουθία εκτιμητών T_n της συνάρτησης $g(\theta)$ ονομάζεται **ασυμπωτικά αποδοτική ή ασυμπωτικά αποτελεσματική** αν:

$$\frac{g'(\theta)+b'(\theta)}{nI(\theta)\mathrm{Var}T_n} \to 1 \qquad \text{όταν} \quad n \to +\infty \ .$$

Σε προηγούμενες παραγράφους έγινε αναφορά σε μεθόδους εύρεσης εκτιμητών που ικανοποιούν κάποιες βέλτιστες ιδιότητες. Στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα προτάθηκαν και αναπτύχτηκαν αναλυτικές μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων της κατανομής οι οποίες, κάτω από ορισμένες συνθήκες, οδηγούν σε εκτιμητές με κάποιες «βέλτιστες» ιδιότητες. Στη συγκεκριμένη ενότητα θα αναφερθούν δύο από τις πιο γνωστές μεθόδους, η μέθοδος των ροπών και η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας.

Η **μέθοδος των ροπών** είναι μέθοδος εκτίμησης σε σημείο. Προτάθηκε από τον Karl Pearson [1891, (σελ. 44)], εφαρμόζεται σε κατανομές που υπάρχουν ροπές k-τάξης και περιγράφεται ως εξής: Έστω τ.δ. $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta)$ και με θεωρητικές ροπές:

$$\mu_1 = EX, \mu_2 = EX^2, \dots, \mu_k = EX^k.$$

Οι θεωρητικές ροπές είναι συναρτήσεις των άγνωστων παραμέτρων.

Υπενθυμίζεται ότι οι δειγματικές ροπές δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \, , m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \, , \dots, m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \ .$$

Θεώρημα 1.20
Οι δειγματικές ροπές είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των θεωρητικών ροπών.

Η μεθοδολογία του υπολογισμού των εκτιμητών, με τη μέθοδο των ροπών, είναι η εξής: εξισώνονται οι θεωρητικές ροπές με τις δειγματικές ροπές ίσης τάξης. Με τον τρόπο αυτό συνδέονται οι εκτιμώμενες παράμετροι με στατιστικές συναρτήσεις και από τη λύση των εξισώσεων που προκύπτουν, υπολογίζονται οι εκτιμητές.

Παράδειγμα 1.9

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $0 < \theta < +\infty$. Να υπολογισθεί ένας εκτιμητής για την παράμετρο θ με τη μέθοδο των ροπών.

Λύση

Η παράμετρος που πρέπει να εκτιμηθεί είναι μια, δηλαδή η θ. Συνεπώς, χρειάζεται μόνο μια εξίσωση. Η θεωρητική ροπή 1ης τάξης ισούται με:

$$\mu_1 = EX = \int_0^1 x\left(\theta x^{\theta-1}\right)dx = \theta\int_0^1 x^{\theta}dx = \theta\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}\ .$$

Η δειγματική ροπή 1ης τάξης είναι:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}\ .$$

Εξισώνοντας τη θεωρητική με τη δειγματική ροπή 1ης τάξης, δηλαδή:

$$\mu_1 = m_1$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}\ .$$

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς θ προκύπτει ότι ροποεκτιμητής της παραμέτρου θ είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\ .$$

Παράδειγμα 1.10

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να εκτιμηθούν οι άγνωστες παράμετροι μ και σ^2 της κατανομής με τη μέθοδο ροπών.

Λύση

Αν πρέπει να εκτιμηθούν δύο παράμετροι, οι εξισώσεις με βάση τις οποίες θα υπολογιστούν οι εκτιμητές θα είναι δύο, οι:

$$m_1 = \mu_1 \Rightarrow \bar{X} = EX, m_2 = \mu_2 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX^2\ .$$

Είναι γνωστό ότι:

$$EX = \mu, \qquad EX^2 = \sigma^2 + \mu^2\ .$$

Θέτοντας $m_1 = EX$ και $m_2 = EX^2$, προκύπτει το σύστημα:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu$$

και

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς μ και σ^2, προκύπτουν οι εκτιμητές των παραμέτρων της κανονικής κατανομής, με τη μέθοδο των ροπών, δηλαδή:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

και

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 \ .$$

Η μέθοδος **μεγίστης πιθανοφάνειας** προτάθηκε πρώτη φορά από τον Gauss, πιστώνεται όμως στο Fisher (σελ. 44), γιατί αυτός πρώτος στο 1922 ερεύνησε τις ιδιότητες της μεθόδου. Ας είναι $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'= (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $f(x;\theta)$

Ορισμός 1.27
Πιθανοφάνεια (likelihood) ονόμασε το 1912 ο R.A. Fisher (σελ. 44) την από κοινού κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$, όταν η κατανομή θεωρείται συνάρτηση της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ για δοσμένη τιμή του δείγματος και συμβολίζεται με:

$$L\left(\underset{\sim}{\theta}\,\middle|\,\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\ \underset{\sim}{\theta}\right) = L(\underset{\sim}{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\underset{\sim}{\theta}\right).$$

Ορισμός 1.28
Έστω $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας του τυχαίου δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ο εκτιμητής $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ λέγεται **εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας** (Ε.Μ.Π.) (maximum likelihood estimator) της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ αν:

$$L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\hat{\theta}}) = \max_{\underset{\sim}{\theta}\in\boldsymbol{\Omega}} L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\ \underset{\sim}{\theta})$$

ή ισοδύναμα, αν ο εκτιμητής $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $\ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta})$.

Παρατηρήσεις.

1. Στην περίπτωση που η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta)$ είναι διαφορίσιμη, ο Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ είναι η λύση της εξίσωσης πιθανοφάνειας:
$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \ ,$$
που ικανοποιεί τη σχέση:
$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\partial^2} < 0 \ .$$
2. Για την εύρεση του μεγίστου της πιθανοφάνειας $L(\underset{\sim}{\theta})$ υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- να μην υπάρχει πεπερασμένο μέγιστο,
- να υπάρχει ακριβώς ένα μέγιστο,
- να υπάρχουν περισσότερα από ένα μέγιστα.

Θεώρημα 1.21
Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με κατανομή $f(x;\underset{\sim}{\theta})$ και $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$. Αν $g(\underset{\sim}{\theta})$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$, τότε ο Ε.Μ.Π. της συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$ είναι ο $g(\underset{\sim}{\hat{\theta}})$.

Παράδειγμα 1.11

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli $B(1,\theta)$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της άγνωστης παραμέτρου θ.

Λύση

Η σ.π. της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}\ , \quad x=0,1\ , \qquad 0\le\theta\le 1\ .$$

Η πιθανοφάνεια δίνεται από τη σχέση:

$$L(\theta)=L\left(\theta\middle|\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\ .$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι:

$$L(\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\ .$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\ln L(\theta)=\ln\theta\sum_{i=1}^{n}x_i+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-\theta)\ .$$

Η συνάρτηση $\ln L(\theta)$ μεγιστοποιείται στα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της ως προς την παράμετρο θ. Άρα:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\theta}=0\ ,$$

δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta+\theta\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{X}\ .$$

Επιπλέον:

$$\left.\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{n\theta=\sum_{i=1}^{n}x_i}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}-\frac{(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)}{(1-\theta)^2}=-\frac{n\theta}{\theta^2}-\frac{(n-n\theta)}{(1-\theta)^2}=-\frac{n}{\theta}-\frac{n}{1-\theta}<0\ ,$$

διότι $0\le\theta\le 1$. Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\hat{\theta}=\bar{X}$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ.

Παράδειγμα 1.12

Έστω τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ από εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$\boldsymbol{f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},\quad 0<x<+\infty,\qquad \theta\in\Omega=\{\theta\mid 0<\theta<+\infty\}}\ .$$

Να υπολογισθεί ένας Ε.Μ.Π. για την παράμετρο θ. Επιπλέον, να βρεθεί η τιμή του εκτιμητή, αν από ένα δείγμα μεγέθους 5 δίνονται οι παρατηρήσεις: 8, 11, 15 , 18 και 23.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος είναι:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}\ .$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\ln L(\theta)=-n\ln(\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i\ .$$

Η παραπάνω συνάρτηση μεγιστοποιείται στα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγός της ως προς την παράμετρο θ. Άρα:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} \ .$$

Επιπλέον, παραγωγίζοντας την $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}$ ως προς θ και θέτοντας, όπου $\sum x_i = n\theta$, προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{n\theta=\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\theta}{\theta^3} < 0 \ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. για την παράμετρο θ είναι η δειγματική μέση τιμή. Για τις συγκεκριμένες τιμές του δείγματος η μέση τιμή είναι ίση με:

$$\bar{X} = \frac{8+11+15+18+23}{5} = \frac{75}{5} = 15 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. για την παράμετρο θ της κατανομής είναι $\hat{\theta} = 15$.

Παράδειγμα 1.13

Έστω τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με κανονική κατανομή του οποίου η μέση τιμή είναι $\boldsymbol{\theta}$ και η διασπορά 1. Με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας να υπολογισθεί ένας εκτιμητής της άγνωστης παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.

Λύση

Έστω το τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από κανονική κατανομή $N(\theta, 1)$. Η σ.π.π. είναι:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\} \ .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος είναι:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2\right\} \ ,$$

δηλαδή:

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2\right\} \ .$$

Λογαριθμίζοντας, προκύπτει:

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 \ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{X} \ .$$

Επιπλέον:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{n\theta=\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta\right) = -n < 0 \ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ της κατανομής $N(\theta, 1)$ είναι $\hat{\theta} = \bar{X}$.

Παράδειγμα 1.14

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $\boldsymbol{f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}}$, όπου $\boldsymbol{x = 1, 2, \dots, 0 \le \theta \le 1}$. Να βρεθεί ένας εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την άγνωστη παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ισούται με:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i-1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - n} \ .$$

Λογαριθμίζοντας, προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)\ln(1-\theta)\ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\overline{X}}\ .$$

Επιπλέον,

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{(1-\theta)^2} = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{n}{\theta(1-\theta)} < 0\ ,$$

διότι $0 \leq \theta \leq 1$. Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ της γεωμετρικής κατανομής είναι ο $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Darmois, G. (1935). "Sur les lois de probabilités a estimation exhaustive". *C.R. Acad. Sci. Paris (in French)* 200: 1265–1266.

Fisher, R. A. (1922). "On the mathematical foundations of theoretical statistics". *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A,* 222, 309--368.

Fisher, R. A. (1925). *Statistical Methods for Research Workers*. Edinburgh.

Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsey Publishing Company, New York.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. & Μπόρα-Σέντα, Ε. (2013). *Στατιστική: Θεωρία και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κουνιάς, Σ. & Μωυσιάδης, Χ. (1995). *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κούτρας, Μ. (2004). *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, 2η Έκδοση, Μέρος Ι*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation*. John Wiley and sons, Inc., New York.

Pearson, K. (1936). "Methods of moments and method of maximum likelihood". *Biometrika*, 28, 34-59.

Rao, C. R. (2008). *Linear Statistical Inference and its Applications, 2nd edition*. Wiley Series on Probability and Statistics.

Snedecor, G. W. & Cochran, W. G. (1989). *Statistical Methods, 8th edition*. Ames, Iowa: Blackwell Publishing Professional.

"Student" [William Sealy Gosset] (1908). "The probable error of a mean". *Biometrika*, 6 (1), 1–25.

Λυμένες Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

Άσκηση 1.1

Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n από κατανομή $f_X(x)$. Να βρεθεί η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, όταν η κατανομή είναι:

1. **Γάμμα $G(a, \beta)$,**
2. **Γεωμετρική,**
3. **Bernoulli $B(1, p)$,**
4. **Poisson $P(\lambda)$.**

Λύση

Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ως στοιχεία του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$. Συνεπώς, η ροπογεννήτρια του αθροίσματος $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ισούται με το γινόμενο των ροπογεννητριών των τ.μ. X_i, δηλαδή:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \ .$$

1. Αν το τ.δ. ακολουθεί την κατανομή γάμμα $G(a, \beta)$, τότε σύμφωνα με τον πίνακα A2 (σελ. 213) η ροπογεννήτρια είναι:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} \ .$$

Επομένως:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-n\alpha} \ .$$

Άρα η στ.σ. $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $G(na, \beta)$.

2. Αν το τ.δ. προέρχεται από γεωμετρική κατανομή, τότε σύμφωνα με τον πίνακα A1 (σελ. 212) η ροπογεννήτρια είναι:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t} \ .$$

Επομένως:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t} = \left(\frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}\right)^n \ .$$

Σύμφωνα με τον πίνακα A1 (σελ. 212), η στ.σ. $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή.

3. Αν το τ.δ. προέρχεται από κατανομή Bernoulli $B(1, p)$, τότε σύμφωνα με τον πίνακα AI (σελ. 212) η ροπογεννήτρια είναι:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t) \ .$$

Επομένως:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p + pe^t) = (1 - p + pe^t)^n \ .$$

Από τον πίνακα AI (σελ. 212) προκύπτει ότι η παραπάνω ροπογεννήτρια είναι η ροπογεννήτρια της διωνυμικής κατανομής $B(n, p)$.

4. Αν το τ.δ. προέρχεται από κατανομή Poisson $P(\lambda)$, τότε σύμφωνα με τον πίνακα AI (σελ. 212) η ροπογεννήτρια είναι:

$$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \ .$$

Επομένως:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\{\lambda(e^t - 1)\} = \exp\{n\lambda(e^t - 1)\} \ ,$$

με συνέπεια η στ.σ. $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ να ακολουθεί την κατανομή Poisson $P(n\lambda)$.

Άσκηση 1.2

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή $G(\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$. Να αποδειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Z = 2\beta \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2_{2\alpha n}$

Λύση

Σύμφωνα με την άσκηση 1.1 (σελ. 45), η τ.μ. $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $G(n\alpha, \beta)$. Έστω ο μετασχηματισμός $Z = 2\beta W$. Η ροπογεννήτρια της τ.μ. Z είναι:

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E\left(e^{2\beta t W}\right) \xRightarrow{t' = 2\beta t} M_Z(t') = E\left(e^{t' W}\right) = \left(1 - \frac{t'}{\beta}\right)^{-n\alpha} \ ,$$

δηλαδή:

$$M_Z(t) = \left(1 - \frac{2\beta t}{\beta}\right)^{-n\alpha} = (1 - 2t)^{-\frac{2n\alpha}{2}} \ .$$

Από τον πίνακα A2 (σελ. 213), προκύπτει ότι η παραπάνω ροπογεννήτρια είναι η ροπογεννήτρια της $\mathcal{X}^2_{2\alpha n}$ κατανομής.

Άσκηση 1.3

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή βήτα $\beta(1, \theta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$. Να αποδειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $W = -2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2_{2n}$

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής $\beta(1, \theta)$ είναι η $f(x; \theta) = \theta(1 - x)^{\theta - 1}$ $x \in (0,1)$, $\theta > 0$. Έστω ο μετασχηματισμός $Z_i = -\ln(1 - X_i)$, δηλαδή $e^{-z_i} = 1 - x_i$, τότε:

$$f_{Z_i}(z_i) = f_{X_i}(x_i, \theta) \left|\frac{dx_i}{dz_i}\right| = \theta e^{-\theta z_i} \ ,$$

δηλαδή οι τ.μ. Z_i ακολουθούν κατανομή $G(1, \theta)$ και η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)$ ακολουθεί την κατανομή γάμμα $G(n, \theta)$. Επειδή $W = 2\theta Y$, από την άσκηση 1.2 (σελ. 46), συνεπάγεται ότι η τ.μ. W ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2_{2n}$.

Παρατήρηση.

Αν μια τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή βήτα $\beta(\theta, 1)$, τότε, με όμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι η τ.μ. $W = -2\theta \ln X$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2_2$.

Άσκηση 1.4

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Weibull με παράμετρο $\alpha = \theta$. Να αποδειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $W = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i^c$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2_{2n}$.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής Weibull είναι η $f(x;\theta)=\frac{c}{\theta}x^{c-1}\exp\left\{-\frac{x^c}{\theta}\right\},\ \ x>0,\ \ \theta>0$. Έστω ο μετασχηματισμός $\frac{z_i}{2}=\frac{X_i^c}{\theta}$, δηλαδή $X_i=\left(\frac{\theta Z_i}{2}\right)^{\frac{1}{c}}$ με συνέπεια $\left|\frac{dx_i}{dz_i}\right|=\frac{1}{c}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{c}}z_i^{\frac{1}{c}-1}$, τότε:

$$f_{Z_i}(z_i)=f_{X_i}(x_i,\theta)\left|\frac{dx_i}{dz_i}\right|=\frac{c}{\theta}\left(\frac{\theta z_i}{2}\right)^{1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\frac{z_i}{2}\right\}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{c}}z_i^{\frac{1}{c}-1}=\frac{1}{2}e^{-\frac{z_i}{2}}\ ,$$

δηλαδή οι τ.μ. Z_i ακολουθούν κατανομή $\mathcal{X}_2^2$ και η τ.μ. $\sum_{i=1}^n Z_i=\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i^c$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}_{2n}^2}$.

Άλυτες Ασκήσεις 1^{ου} Κεφαλαίου

Άσκηση 1.5

Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, όπου η διασπορά είναι γνωστός αριθμός. Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου $\theta=\mu$ είναι η δειγματική μέση τιμή.

Άσκηση 1.6

Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Poisson με μέση τιμή λ. Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ είναι η δειγματική μέση τιμή.

Άσκηση 1.7

Έστω X ο αριθμός των στιγμάτων ανά 100 μέτρα ενός ελάσματος. Είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Αν 40 παρατηρήσεις της X, έδωσαν 5 φορές μηδέν στίγματα, 7 φορές ένα στίγμα, 12 φορές δύο στίγματα, 9 φορές τρία στίγματα, 5 φορές τέσσερα στίγματα και 1 φορά έξι στίγματα, να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ.

Άσκηση 1.8

Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n από κατανομές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\boldsymbol{f(x;\theta)=\frac{1}{\theta^2}xe^{-x\theta}\ ,\qquad 0<x<+\infty\ ,\qquad 0<\theta<+\infty\ .}$$

$$\boldsymbol{f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta^3}x^2e^{-x\theta}\ ,\qquad 0<x<+\infty\ ,\qquad 0<\theta<+\infty\ .}$$

$$\boldsymbol{f(x;\theta)=\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}\ ,\qquad -\infty<x<+\infty\ ,\qquad -\infty<\theta<+\infty\ .}$$

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, να βρεθεί ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας και ο εκτιμητής με τη μέθοδο των ροπών για την άγνωστη παράμετρο θ.

Άσκηση 1.9

Έστω $\underset{\sim}{X}'$ τ.δ. μεγέθους n, το οποίο ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας:

$$\boldsymbol{f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\ ,\qquad 0<x<1\ ,\qquad 0<\theta<+\infty\ .}$$

Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ είναι ο:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \ln \boldsymbol{x_i} \ .$$

Επίσης, να αποδειχθεί ότι ο συγκεκριμένος εκτιμητής είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$.

Άσκηση 1.10

Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'$ τ.δ. μεγέθους $\boldsymbol{n}$ από κατανομές με συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας:

$$\boldsymbol{f(x;\theta)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\theta}}} \ , \qquad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \ , \qquad \mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} < +\infty \ .$$

Να δειχθεί ότι η δειγματική μέση τιμή είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$.
Να δειχθεί ότι η διασπορά της δειγματικής μέσης τιμής ισούται με $\boldsymbol{\theta^2/n}$.
Ένας ερευνητής από ένα τ.δ. μεγέθους 5 έλαβε τις παρατηρήσεις $\mathbf{3.5}$, 8.1, $\mathbf{0.9}$, $\mathbf{4.4}$ και $\mathbf{0.5}$. Στην περίπτωση αυτή να βρεθεί ένας εκτιμητής για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$.

Άσκηση 1.11

Ένας παίκτης τυχερών παιχνιδιών παίζει, κάθε μέρα, το ίδιο παιχνίδι και σταματά, όταν κερδίζει. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το πλήθος των παιχνιδιών, μέχρι να κερδίσει.

Δευτέρα	**Τρίτη**	**Τετάρτη**	**Πέμπτη**	**Παρασκευή**	**Σάββατο**	**Κυριακή**
15	13	10	7	19	22	17

Να βρεθεί ο ροποεκτιμητής και ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της πιθανότητας να κερδίσει.

Κεφάλαιο 2 Έλεγχος Απλών Υποθέσεων

Σύνοψη
Στο 2ο κεφάλαιο δίνονται οι βασικές έννοιες των ελέγχων υποθέσεων. Ορίζονται η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική υπόθεση. Επιπλέον, ορίζεται η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης και η περιοχή αποδοχής της, τα είδη των σφαλμάτων και τα μεγέθη τους, η συνάρτηση ισχύος και τα είδη των ελεγχοσυναρτήσεων (γνήσια, μη γνήσια, ισχυρότατη, ομοιόμορφα ισχυρότατη, αμερόληπτη). Διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεμελιώδες λήμμα των Neyman-Pearson (σελ.68), που αποτελεί τη βάση της θεωρίας των ελέγχων υποθέσεων. Δίνονται οι ιδιότητες των ελεγχοσυναρτήσεων που προκύπτουν από το λήμμα που προαναφέρθηκε. Επίσης, γίνεται εφαρμογή του λήμματος με ενδεικτικά παραδείγματα και ασκήσεις.

Προαπαιτούμενη γνώση
Για την κατανόηση όσων παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, είναι απαραίτητη η γνώση των εννοιών: της πιθανότητας, της δεσμευμένης πιθανότητας, των μετασχηματισμών των τ.μ., του τ.δ., της στατιστικής συνάρτησης και της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί για τα παραπάνω αντικείμενα τα βιβλία: «Θεωρία Πιθανοτήτων Ι» των Σ. Κουνιά και Χ. Μωυσιάδη, (σελ. 68), «Στατιστική, Θεωρία - Εφαρμογές» των Φ. Κολυβά-Μαχαίρα και Ε. Μπόρα-Σέντα, (σελ. 68), «Εισαγωγή στη Στατιστική Ι» και «Εισαγωγή στη Στατιστική ΙΙ» των Χ. Δαμιανού και Μ. Κούτρα, (σελ. 68), «Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική» της Φ. Κολυβά-Μαχαίρα, (σελ. 68) και «Μαθηματική Στατιστική, 2η έκδοση» των Τ. Παπαϊωάννου και Κ. Φερεντίνου, (σελ. 68). Επιπλέον, ο αναγνώστης μπορεί να εξασκηθεί στα αντικείμενα αυτού του κεφαλαίου διαβάζοντας τα παραδείγματα και τις ασκήσεις που υπάρχουν στα βιβλία «Statistical Concepts and Methods» των C. Bhattacharryya και R. Johnson (σελ. 68), «Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics» των P. J. Bickel και K. A. Doksum (σελ.68), «Introduction to mathematical statistics» των R. V. Hogg, J. W. McKean και A. T. Craig (σελ. 68), «Probability and Statistical Inference» των R. V. Hogg και E.A. Tanise (σελ. 68), «The Advanced theory of Statistics, volume II, 3rd edition» των M. G. Kendall και A. Stuart (σελ. 68) και «Introduction to Probability Theory and Statistical Inference» του J. Larson (σελ. 68).

2.1. Εισαγωγή-Βασικοί Ορισμοί

Τα προβλήματα ελέγχου υποθέσεων απορρέουν από παρατηρήσεις φαινομένων, όπως:

- Η κατανάλωση γλυκών και παγωτών οδηγεί στην αύξηση του βάρους ενός ανθρώπου.
- Το κάπνισμα είναι από τις βασικότερες αιτίες καρκίνου του πνεύμονα.
- Η ζώνη ασφαλείας μειώνει το ποσοστό των σοβαρών τραυματισμών στα τροχαία ατυχήματα.
- Ο αθλητισμός συμβάλλει στη μακροζωία και στην αποφυγή σοβαρών ασθενειών.
- Η οικονομική κρίση στην Ελλάδα έχει οδηγήσει σε αύξηση του ποσοστού των αυτοκτονιών.
- Το διοξείδιο του άνθρακα στην ατμόσφαιρα αυξάνεται.
- Η χρήση ενός λιπάσματος αυξάνει την παραγωγή ενός γεωργικού προϊόντος.

Για να μελετηθούν τα παραπάνω φαινόμενα, θα πρέπει να εξετασθούν αντίστοιχα:

- Το βάρος των ανθρώπων που καταναλώνουν παγωτά και γλυκά σε σχέση με όσους δεν καταναλώνουν.
- Το ποσοστό των καπνιστών που προσβάλλονται από καρκίνο.
- Στο σύνολο των ατόμων που τραυματίζονται σοβαρά από τροχαία ατυχήματα, πόσοι από αυτούς φορούσαν ζώνη ασφαλείας και πόσοι όχι.
- Στα άτομα «μεγάλης» ηλικίας με κάποια σοβαρή ασθένεια, πόσοι αθλούνταν και πόσοι όχι.
- Το ποσοστό των αυτοκτονιών, πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την κρίση.
- Το ποσοστό του διοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα σε κάποια χρονική περίοδο.

- Στο σύνολο των εκτάσεων που χρησιμοποιήθηκε το συγκεκριμένο λίπασμα, αν η παραγωγή αυξήθηκε ή όχι.

Ο πιο ασφαλής τρόπος ελέγχου είναι να εξετασθεί ολόκληρος ο πληθυσμός αναφοράς των προηγούμενων παραδειγμάτων. Αυτό, όμως, είναι πρακτικά αδύνατο και οικονομικά ασύμφορο. Για το λόγο αυτό λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό, δηλαδή ένα μέρος του, φροντίζοντας να είναι όσο το δυνατό πιο αντιπροσωπευτικό (βλέπε ορισμό 1.12, σελ. 25). Το δείγμα αυτό ονομάζεται τυχαίο δείγμα. Η διαδικασία βάσει της οποίας θα αποφασιστεί τι συμβαίνει σε όλο τον πληθυσμό μελετώντας ένα μέρος αυτού (δείγματος) είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

Ας είναι X μια τ.μ. με σ.κ. F και $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τ.δ. από αυτήν την τ.μ., όπου η σ.κ. F δεν είναι γνωστή. Η σ.κ. F ανήκει σε μια κλάση κατανομών $\mathcal{F}$, η οποία διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα C_0 και C_1 τέτοια ώστε: $C_0 \subset \mathcal{F}$, $C_1 = \bar{C}_0 \subset \mathcal{F}$, $C_0 \cup C_1 = \mathcal{F}$. Με τη βοήθεια της τιμής $\underset{\sim}{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, θα εξεταστεί αν $\mathcal{F} \in C_0$ ή αν $\mathcal{F} \in C_1$.

Το γεγονός ότι $\mathcal{F} \in C_0$ είναι μια υπόθεση, η οποία συμβολίζεται με H_0 και συνήθως ονομάζεται **αρχική** ή **μηδενική υπόθεση (null hypothesis)**. Το γεγονός ότι $\mathcal{F} \in C_1$ είναι μια άλλη υπόθεση, που ονομάζεται **εναλλακτική υπόθεση** και συμβολίζεται με $\mathrm{H}_1 = \overline{\mathrm{H}}_0$. Οι υποθέσεις H_0 και H_1 αντιστοιχούν στη διαμέριση της κλάσης F, έτσι ώστε:

$$\mathrm{H}_0 = \{F\colon\ F \in C_0\}\ ,$$
$$\mathrm{H}_1 = \{F\colon\ F \in C_1\}\ .$$

Το πρόβλημα του ερευνητή είναι να αποφασίσει ποια από τις υποθέσεις H_0 ή H_1 είναι σωστή, δηλαδή σε ποιο από τα σύνολα C_0, C_1 ανήκει η F.

Ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο ο ερευνητής επιλέγει ένα από τα δύο σύνολα C_0 ή C_1 ονομάζεται **έλεγχος** (test) ή **κριτήριο ελέγχου**.

Ορισμός 2.1

Ένας έλεγχος ονομάζεται **παραμετρικός** (parametric), αν είναι γνωστή η συναρτησιακή μορφή της σ.κ. F, αλλά είναι άγνωστη η τιμή της παραμέτρου θ από την οποία εξαρτάται η F και οι υποθέσεις αφορούν σ' αυτήν την παράμετρο. Αν οι υποθέσεις αφορούν στη μορφή της σ.κ. F, τότε ο έλεγχος λέγεται **μη παραμετρικός** (non parametric). Στους παραμετρικούς ελέγχους η κλάση F περιορίζεται στον παραμετρικό χώρο Ω και οι υποθέσεις H_0 και H_1 ορίζουν μια διαμέριση του χώρου Ω σε δύο σύνολα Ω_0 και Ω_1 τέτοια ώστε:

$$\Omega_0 \subset \Omega\ ,\ \ \Omega_1 = \overline{\Omega}_0 \subset \Omega\ ,\ \ \Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega\ ,$$
$$\mathrm{H}_0\colon\quad \theta \in \Omega_0\ ,$$
$$\mathrm{H}_1\colon\quad \theta \in \Omega_1\ .$$

Ορισμός 2.2

Μια υπόθεση H_i καλείται **απλή** (simple hypothesis), αν κάθε ένα από τα σύνολα Ω_i, $i = 0{,}1$ αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετη** (composite hypothesis) σε άλλη περίπτωση.

Παράδειγμα 2.1

Είναι γνωστό ότι το βάρος των γυναικών ηλικίας [15-20] ετών στην Ευρωπαϊκή Ένωση έχει μέση τιμή 62kg. Ένας ερευνητής επιθυμεί να ελέγξει, αν το μέσο βάρος των γυναικών της ίδιας ηλικιακής κατηγορίας στην Ελλάδα είναι μικρότερο. Να διατυπωθούν οι έλεγχοι υποθέσεων.

Λύση

Αν υποτεθεί ότι το βάρος των γυναικών ηλικίας [15-20] ετών είναι τ.μ. που ακολουθεί μια κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε πρέπει να ελεγχθούν οι παρακάτω υποθέσεις:

$$\mathrm{H}_0\colon\quad \mu = 62\mathrm{kg},$$

$$\mathrm{H}_1: \quad \mu < 62\mathrm{kg}.$$

Στην περίπτωση αυτή η μηδενική υπόθεση H_0 είναι απλή, ενώ η εναλλακτική υπόθεση H_1 είναι σύνθετη, με συνέπεια ο έλεγχος να είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης προς σύνθετη.

Παράδειγμα 2.2

Δύο φίλοι συζητούν για το αν οι Έλληνες επιθυμούν την παραμονή της Ελλάδας στο ευρώ. Ο ένας ισχυρίζεται ότι ποσοστό τουλάχιστον 50% των Ελλήνων πολιτών συμφωνεί με την παραμονή της χώρας στο ευρώ, ενώ ο άλλος ότι ποσοστό λιγότερο από 50% επιθυμεί την παραμονή της χώρας στο ευρώ. Να διατυπωθούν οι έλεγχοι υποθέσεων.

Λύση

Σε αυτό τον έλεγχο απαιτείται να ελεγχθούν δύο υποθέσεις που αφορούν ποσοστά. Οι υποθέσεις μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad p \geq \frac{1}{2} \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad p < \frac{1}{2} \ ,$$

ή

$$\mathrm{H}_0: \quad p < \frac{1}{2} \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad p \geq \frac{1}{2} \ .$$

Ο παραμετρικός χώρος είναι $\Omega = [0,1]$, διότι η παράμετρος είναι το ποσοστό των Ελλήνων πολιτών που επιθυμούν η Ελλάδα να συνεχίσει να έχει ως νόμισμα το ευρώ. Ο παραμετρικός χώρος διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα $\Omega_0 = [\frac{1}{2}, 1]$ και $\Omega_1 = [0, \frac{1}{2})$ για την πρώτη περίπτωση, ενώ για τη δεύτερη περίπτωση η διαμέριση του Ω είναι $\Omega_0 = [0, \frac{1}{2})$ και $\Omega_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Επομένως, το ερώτημα είναι πως θα διατυπωθούν οι υποθέσεις, δηλαδή σύμφωνα με την πρώτη ή σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση.

Συνήθως η μηδενική υπόθεση H_0 είναι εκείνη για την οποία η λανθασμένη απόρριψή της προκαλεί μεγαλύτερους κινδύνους σε σχέση με τους κινδύνους που προκαλεί η λανθασμένη αποδοχή της.

Ο έλεγχος θα γίνει με τη βοήθεια μιας συνάρτησης $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$, η οποία έχει πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση αυτή καλείται **ελεγχοσυνάρτηση** (test statistic) και συμβολίζει την πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0 για δοθέν δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$.

Ορισμός 2.3

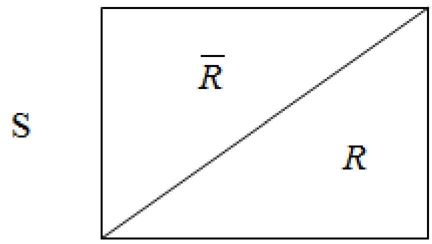
Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^n \supset S \to [0,1]$. Αν η συνάρτηση φ αντιστοιχεί στο σημείο $\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in \mathbb{R}^n$ μόνο τις τιμές 0 ή 1, τότε η $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ λέγεται **γνήσια** ή **μη τυχαιοποιημένη ελεγχοσυνάρτηση** (nonrandomized test statistic), ενώ αν, αντιστοιχεί κάποιο μέτρο πιθανότητας, λέγεται **τυχαιοποιημένη ή μεικτή ελεγχοσυνάρτηση** (randomized or mixed test statistic).

Η γνήσια ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ χωρίζει το δειγματοχώρο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ σε δύο σύνολα R και $\bar{R}$, τέτοια ώστε $R \cup \bar{R} = S$. Το σύνολο $\bar{R}$ είναι η **περιοχή αποδοχής** (accepted area) της αρχικής υπόθεσης H_0, ενώ το σύνολο R είναι η περιοχή απόρριψης της H_0 και λέγεται **κρίσιμη περιοχή** (critical area).

Οι γνήσιες ελεγχοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in R \quad (\text{απορρίπτεται η } \mathrm{H}_0) \\ 0, & \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in \bar{R} \quad (\text{γίνεται δεκτή η } \mathrm{H}_0) \end{cases}. \tag{2.1}$$

Διαπιστώνεται ότι γνήσιοι έλεγχοι ορίζουν στο δειγματοχώρο μια διαμέριση της μορφής:

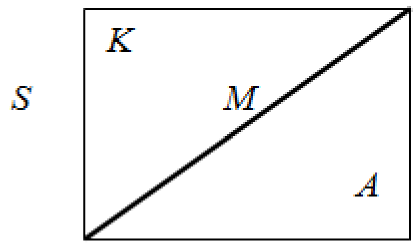


Σχήμα 2.1 *Διαμέριση δειγματικού χώρου στις γνήσιες ελεγχοσυναρτήσεις.*

Οι μεικτές ελεγχοσυναρτήσεις μπορεί να είναι της μορφής:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in K \quad (\text{απορρίπτεται η } \mathrm{H}_0), \\ \delta, & \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in M \quad (\text{απορρίπτεται η } \mathrm{H}_0 \text{ με πιθανότητα } \delta) \\ 0, & \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in A \quad \big(\text{γίνεται δεκτή η } \mathrm{H}_{0)}\big) \end{cases}, \tag{2.2}$$

όπου $\delta \geq 0$ και M είναι το σύνορο των συνόλων K και A για τα οποία ισχύει ότι $K \cup M \cup A = S$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 *Διαμέριση δειγματικού χώρου στις τυχαιοποιημένες ελεγχοσυναρτήσεις.*

Οι μεικτοί έλεγχοι χρησιμοποιούνται, συνήθως, στις διακριτές κατανομές, διότι τότε η πιθανότητα σε σημείο είναι θετική, ενώ στις συνεχείς κατανομές η πιθανότητα σε σημείο είναι ίση με μηδέν. Αν $\delta = 0$, τότε $M = \emptyset$, $A = \overline{R}$ και $K = R$. Προφανώς, στην περίπτωση αυτή , οι έλεγχοι είναι μη τυχαιοποιημένοι.

Παράδειγμα 2.3

Ένα κατάστημα που προμηθεύεται ένα προϊόν από ένα εργοστάσιο, απαιτεί το προϊόν αυτό να ικανοποιεί ορισμένες προδιαγραφές. Αν ένα αντικείμενο δεν είναι κατασκευασμένο σύμφωνα με τις προδιαγραφές, τότε επιστρέφεται ως «ελαττωματικό». Ο καταστηματάρχης αποφασίζει να επιστρέφει κάποια παραγγελία, αν το ποσοστό των «ελαττωματικών» αντικειμένων ξεπερνά ένα όριο. Να διατυπωθούν οι έλεγχοι υποθέσεων.

Λύση

Έστω p το ποσοστό των «ελαττωματικών» προϊόντων και p_0 το όριο που θέτει ο καταστηματάρχης, όταν επιθυμεί να επιστρέφει την παραγγελία. Οι υποθέσεις διατυπώνονται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad p \leq p_0, \quad \text{αποδοχή της παραγγελίας} \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad p > p_0, \quad \text{επιστροφή της παραγγελίας.}$$

Έχει ήδη αναφερθεί ότι η απόφαση θα ληφθεί από τις τιμές ενός τυχαίου δείγματος. Για παράδειγμα, ο καταστηματάρχης αποφασίζει την αποδοχή της παραγγελίας, όταν σ' ένα τ.δ. 100 αντικειμένων διαπιστωθεί ότι το πλήθος των «ελαττωματικών» είναι το πολύ έξι, δηλαδή $p_0 = 0.06$. Επομένως, η απόφαση που θα ληφθεί έχει ένα χαρακτήρα στοχαστικής τυχαιότητας. Αυτό γιατί, ενώ στο δείγμα μπορεί να υπάρχουν λιγότερα από έξι «ελαττωματικά» αντικείμενα, με συνέπεια η παραγγελία να γίνεται αποδεκτή, διαπιστώνεται ότι στο σύνολο το πλήθος των «ελαττωματικών» είναι σημαντικό, ή αντίστροφα, ενώ μπορεί στο δείγμα να υπάρχουν περισσότερα από έξι «ελαττωματικά» αντικείμενα, τελικά διαπιστώνεται ότι στο σύνολο της παραγγελίας το πλήθος των «ελαττωματικών» αντικειμένων είναι μικρότερο από 6%.

Η επιλογή μιας από τις δύο υποθέσεις διατρέχει δύο ειδών κινδύνους:

1. R_1: **κίνδυνος** ή **σφάλμα πρώτου είδους** (type I error), που ορίζεται ως η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0, ενώ αυτή είναι σωστή. Στην περίπτωση του παραδείγματος 2.3 (σελ. 52), το σφάλμα πρώτου είδους είναι ο κίνδυνος του πωλητή, που κινδυνεύει να του επιστραφεί μια παραγγελία, η οποία σε μεγάλο ποσοστό ανταποκρίνεται στις προδιαγραφές.
2. R_2: **κίνδυνος** ή **σφάλμα δευτέρου είδους** (type II error), που ορίζεται ως η απόρριψη της εναλλακτικής υπόθεσης H_1, ενώ αυτή είναι σωστή. Στην περίπτωση του παραδείγματος 2.3 (σελ. 52) το σφάλμα δευτέρου είδους είναι ο κίνδυνος του καταστηματάρχη να δεχθεί «ελαττωματική» παραγγελία.

Τα σφάλματα πρώτου και δευτέρου είδους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

		Απόφαση	
		H_0	H_1
Υπόθεση σωστή	H_0	απόφαση σωστή	σφάλμα τύπου I
	H_1	σφάλμα τύπου II	απόφαση σωστή

Πίνακας 2.1 *Σφάλματα τύπου I και II.*

Στις επιχειρήσεις, σε κάθε τύπο σφάλματος, αντιστοιχεί ένα κόστος, με συνέπεια ο παραπάνω πίνακας να διαμορφώνεται, όπως παρακάτω.

		Απόφαση	
		H_0	H_1
Υπόθεση σωστή	H_0	0	C_1
	H_1	C_2	0

Πίνακας 2.2 *Πίνακας κόστους σύμφωνα με τα σφάλματα τύπου I και II.*

Ορισμός 2.4

Η πιθανότητα του σφάλματος πρώτου είδους ονομάζεται **μέγεθος σφάλματος τύπου I** ή **στάθμη σημαντικότητας** (σ.σ.) (significance level) του ελέγχου και συμβολίζεται με a. Ορίζεται ως η πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, ενώ είναι αληθής, δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(\text{απόρριψη της } \mathrm{H}_0 |\ \mathrm{H}_0\text{: αληθής}).$$

Αναλυτικότερα:

$$\mathrm{a} = \begin{cases} \mathrm{P}(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in R|\mathrm{H}_0), & \text{αν ο έλεγχος είναι μη τυχαιοποιημένος} \\ \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in K\middle|\mathrm{H}_0\right) + \delta\mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in M\middle|\mathrm{H}_0\right), & \text{αν ο έλεγχος είναι τυχαιοποιημένος} \end{cases}.$$

Η πιθανότητα του σφάλματος δευτέρου είδους ονομάζεται **μέγεθος σφάλματος τύπου II** και συμβολίζεται με β. Ορίζεται ως η πιθανότητα απόρριψης της εναλλακτικής υπόθεσης, ενώ είναι αληθής, δηλαδή:

$$\beta = P(\text{απόρριψη της } \mathrm{H}_1 |\ \mathrm{H}_1\text{: αληθής}) \ ,$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\beta = \begin{cases} \mathrm{P}(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in \bar{R} | \mathrm{H}_1), & \text{αν ο έλεγχος είναι μη τυχαιοποιημένος} \\ \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in A \middle| \mathrm{H}_1\right) + (1-\delta)\mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in M \middle| \mathrm{H}_1\right), & \text{αν ο έλεγχος είναι τυχαιοποιημένος} \end{cases}.$$

Η ποσότητα $\gamma = 1 - \beta$ ονομάζεται **ισχύς του ελέγχου** (power) και ισχύει:

$$\gamma = \begin{cases} \mathrm{P}(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in R | \mathrm{H}_1), & \text{αν ο έλεγχος είναι μη τυχαιοποιημένος} \\ \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in K \middle| \mathrm{H}_1\right) + \delta\mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in M \middle| \mathrm{H}_1\right), & \text{αν ο έλεγχος είναι τυχαιοποιημένος} \end{cases}.$$

Τα μεγέθη των σφαλμάτων τύπου I και II δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

		Απόφαση	
		H_0	H_1
Υπόθεση σωστή	H_0	1–a	a
	H_1	β	1–β

Πίνακας 2.3 *Μεγέθη σφαλμάτων τύπου I και II.*

Έστω η συνάρτηση $\pi(\theta) = \mathrm{P}_\theta(\text{απόρριψη της υπόθεσης } \mathrm{H}_0)$, $\theta \in \Omega$. Ο περιορισμός της συνάρτησης αυτής στο σύνολο Ω_0 δίνει τη στάθμη σημαντικότητας a του ελέγχου, ενώ ο περιορισμός της συνάρτησης στο σύνολο Ω_1 δίνει την ισχύ του ελέγχου, δηλαδή:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \mathrm{a}, & \theta \in \Omega_0 \\ \gamma = 1 - \beta, & \theta \in \Omega_1 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση $\pi(\theta)$ ονομάζεται **συνάρτηση ισχύος του ελέγχου** και ισχύει ότι:

$$\pi(\theta) = E_\theta \varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right). \tag{2.4}$$

Πράγματι, αν $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι μια ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση (2.1), τότε:

$$\pi(\theta) = \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in R\right) = 1 \cdot \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in R\right) + 0 \cdot \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in \bar{R}\right) = E_\theta \varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).$$

Αν $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι μια ελεγχοσυνάρτηση της μορφής (2.2), τότε:

$$\pi(\theta) = 1 \cdot \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in K\right) + \delta \cdot \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in M\right) + 0 \cdot \mathrm{P}_\theta\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \in A\right) = E_\theta \varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).$$

Άρα η σχέση (2.4) ισχύει τόσο στους γνήσιους όσο και στους τυχαιοποιημένους ελέγχους.

Παράδειγμα 2.4

Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$, με παράμετρο $\theta \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = 4$. Να ελεγχθούν οι υποθέσεις:

$$\mathbf{H_0}: \quad \boldsymbol{\theta = 1.2}\ ,$$
$$\mathbf{H_1}: \quad \boldsymbol{\theta \neq 1.2}$$

και να συγκριθούν οι έλεγχοι ως προς την ισχύ τους.

Λύση

Για να αποφασιστεί ποια από τις δύο υποθέσεις H_0 ή H_1 ισχύει, θα χρησιμοποιηθεί η στ.σ. $\bar{X}$ για την οποία είναι γνωστό ότι είναι α.ε.ο.ε.δ. της παραμέτρου θ. Ας υποτεθεί ότι υπάρχουν δύο υποψήφιοι έλεγχοι. Ο πρώτος είναι:

$$\varphi_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & |\bar{X} - 1.2| > k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

και ο δεύτερος είναι:

$$\varphi_2\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \bar{X}>1.2+m\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}.$$

Οι τιμές των k και m θα επιλεγούν έτσι, ώστε να δίνουν $\mathrm{a}=0.05$.
Για την ελεγχοσυνάρτηση $\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ισχύει ότι:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\in R\middle|\theta=\theta_0=1.2\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(|\bar{X}-1.2|>k)=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(|\bar{X}-1.2|\le k)\ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a}=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(-k\le\bar{X}-1.2\le k)=1-\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{(\bar{X}-1.2)\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2-2\Phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Για $\mathrm{a}=0.05$ προκύπτει, από τον πίνακα Β1 (σελ. 214), ότι:

$$\Phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\right)=1-\frac{\mathrm{a}}{2}=0.975\Rightarrow\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}=\Phi^{-1}(0.975)=1.96\,.$$

Επομένως:

$$\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}=1.96\Rightarrow k=\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1.96\cdot 2}{\sqrt{n}}=\frac{3.92}{\sqrt{n}}\ .$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης $\varphi_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)$, για $\theta\neq\theta_0=1.2$ δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_1(\theta)=\mathrm{P}_\theta(|\bar{X}-1.2|>k)=1-\mathrm{P}_\theta(|\bar{X}-1.2|\le k)\ ,$$

δηλαδή:

$$\gamma_1(\theta)=1-\mathrm{P}\left(\frac{(-k+1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{(\bar{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{(k+1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

ή:

$$\gamma_1(\theta)=1+\Phi\left(-1.96+\frac{(1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right)-\Phi\left(1.96+\frac{(1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Η συνάρτηση $\gamma_1(\theta)$ έχει τις εξής ιδιότητες:
$\gamma_1(\theta_0)=\mathrm{a}=0.05$,
$\gamma_1(\theta_0-x)=\gamma_1(\theta_0+x),\ \forall\, x$,
$\gamma_1(\theta_2)>\gamma_1(\theta_1), \forall\,\theta_1,\theta_2,\theta_2>\theta_1\ge\theta_0$,
$\gamma_1(\theta_2)<\gamma_1(\theta_1), \forall\,\theta_1,\theta_2,\theta_0>\theta_2>\theta_1$,
$\gamma_1(\theta)\to 1$, όταν $n\to+\infty$.

Ομοίως, για την ελεγχοσυνάρτηση $\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ισχύει ότι:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\in R\middle|\theta=1.2\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X}>1.2+m)=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X}\le 1.2+m)\ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a}=1-\mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X}-1.2)\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Για $\mathrm{a}=0.05$ προκύπτει, από τον πίνακα Β1 (σελ. 214), ότι:

$$\Phi\left(\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.95\Rightarrow\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}=\Phi^{-1}(0.95)=1.64\ .$$

Επομένως:

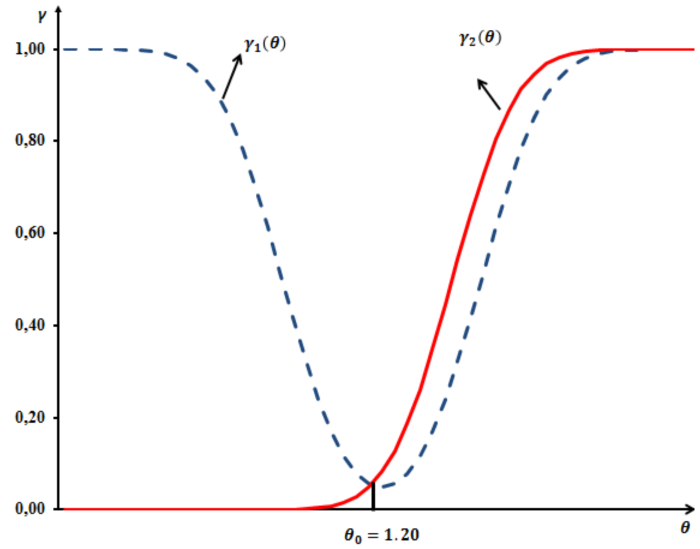
$$\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}=1.64\Rightarrow m=\frac{1.64\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1.64\cdot 2}{\sqrt{n}}=\frac{3.28}{\sqrt{n}}\ .$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης $\varphi_2\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)$ είναι:

$$\gamma_2(\theta)=\mathrm{P}_\theta(\bar{X}>1.2+m)=\mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}>\frac{(1.2-\theta+m)\sqrt{n}}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(1.64+\frac{(1.2-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Η συνάρτηση $\gamma_2(\theta)$ έχει τις εξής ιδιότητες:
$\gamma_2(\theta_0)=\mathrm{a}=0.05$,
$\gamma_2(\theta_2)>\gamma_2(\theta_1),\ \forall\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_2>\theta_1$,
$\gamma_2(\theta)\to 1$, όταν $n\to+\infty$.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $\gamma_1(\theta)$ και $\gamma_2(\theta)$ για $n = 100$.



Σχήμα 2.3 *Γραφική παράσταση συναρτήσεων ισχύος του παραδείγματος 2.4.*

Από το σχήμα 2.3 προκύπτει ότι τα δύο κριτήρια, συγκρινόμενα ως προς την ισχύ, δίνουν $\gamma_1(\theta) < \gamma_2(\theta)$ για $\theta > 1.2$, ενώ $\gamma_1(\theta) > \gamma_2(\theta)$ για $\theta < 1.2$. Προφανώς για $\theta = 1.2$ ισχύει ότι $\gamma_1(\theta) = \gamma_2(\theta)$. Διαπιστώνεται ότι αν δεν υπάρχει καμιά πληροφόρηση για το διάστημα που κυμαίνεται η πραγματική τιμή του θ, δε μπορεί να επιλεγεί κανένας από τους δύο ελέγχους. Αν όμως είναι γνωστό a priori ότι $\theta < 1.2$, τότε προφανώς θα επιλεγεί η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi_1(\underset{\sim}{x})$, ενώ, αν $\theta > 1.2$, τότε θα επιλεγεί η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi_2(\underset{\sim}{x})$.

Από το παράδειγμα 2.4 (σελ. 54) γίνεται φανερό πόσο δύσκολο είναι να συγκριθούν οι δύο έλεγχοι, ακόμη και όταν χρησιμοποιείται η ίδια στάθμη σημαντικότητας. Το πρόβλημα εύρεσης «βέλτιστων» ελεγχοσυναρτήσεων είναι ένα από τα δυσκολότερα θέματα της Στατιστικής.

Είναι προφανές ότι το «βέλτιστο» κριτήριο είναι εκείνο που ελαχιστοποιεί στο μηδέν τα μεγέθη σφαλμάτων τύπου I και II. Αν σε κάποιον έλεγχο το μέγεθος του σφάλματος τύπου I είναι ίσο με μηδέν, τότε έχει μέγεθος σφάλματος τύπου II ίσο με τη μονάδα. Η αδυναμία χρησιμοποίησης των μεγεθών των σφαλμάτων τύπου I και II, ως μέτρο σύγκρισης δύο ελεγχοσυναρτήσεων, έγκειται στη φύση των σφαλμάτων. Αυτό γίνεται, γιατί το σφάλμα τύπου I ορίζεται στο χώρο Ω_0, ενώ το σφάλμα τύπου II, ορίζεται στο χώρο Ω_1. Αν μια ελεγχοσυνάρτηση παρασταθεί στο επίπεδο ως ένα σημείο με συντεταγμένες τα μεγέθη σφαλμάτων τύπου I και II, τότε για το σύνολο Φ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1
Το σύνολο Φ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Είναι κυρτό σύνολο.
2. Είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Περιέχει τα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$.

Απόδειξη.

1. Για να αποδειχθεί ότι το σύνολο Φ είναι κυρτό σύνολο αρκεί να αποδειχθεί ότι αν $\varphi_1(\underset{\sim}{x}), \varphi_2(\underset{\sim}{x}) \in \Phi$, τότε για κάθε $p \geq 0$ και $q \geq 0$ με $p + q = 1$ η συνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{x}) = p\varphi_1(\underset{\sim}{x}) + q\varphi_2(\underset{\sim}{x}) \in \Phi$. Προφανώς, ισχύει ότι $0 \leq p\varphi_1(\underset{\sim}{x}) \leq p$ και $0 \leq q\varphi_2(\underset{\sim}{x}) \leq q$. Επομένως, $0 \leq p\varphi_1(\underset{\sim}{x}) + q\varphi_2(\underset{\sim}{x}) \leq p + q = 1$. Επίσης, ας είναι οι ελεγχοσυναρτήσεις

$\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ και $\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ με αντίστοιχα μεγέθη σφαλμάτων a_1, β_1 και a_2, β_2, όπου $\mathrm{a}_i = E_\theta \varphi_i(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$, $\theta \in \Omega_0$ και όπου $\beta_i = 1 - E_{\theta'}\varphi_i(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$, $\theta' \in \Omega_1$, $i = 1,2$. Από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) προκύπτει:

$$p\mathrm{a}_1 + q\mathrm{a}_2 = p\pi_{\varphi_1}(\theta) + q\pi_{\varphi_2}(\theta) = pE_\theta\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) + qE_\theta\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = E_\theta\left(p\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) + q\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right)$$

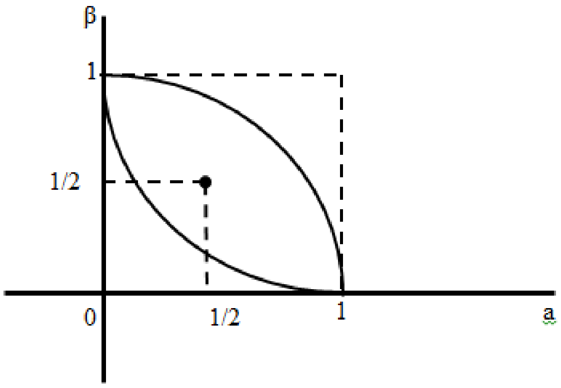
και

$$p\beta_1 + q\beta_2 = p(1 - \pi_{\varphi_1}(\theta')) + q\left(1 - \pi_{\varphi_2}(\theta')\right) = 1 - E_{\theta'}\left(p\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) + q\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{X}})\right).$$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = p\varphi_1(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) + q\varphi_2(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, με συνέπεια να είναι ελεγχοσυνάρτηση με μεγέθη σφαλμάτων $\mathrm{a} = p\mathrm{a}_1 + q\mathrm{a}_2$ και $\beta = p\beta_1 + q\beta_2$, δηλαδή τα a και β είναι κυρτά αθροίσματα των a_i και β_i, $i = 1,2$ και το σύνολο Φ είναι ένα κυρτό σύνολο.

2. Η συμμετρία ως προς το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ προκύπτει από το γεγονός ότι αν $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι μια ελεγχοσυνάρτηση, τότε και η συνάρτηση $1 - \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι επίσης ελεγχοσυνάρτηση.
3. Έστω $\mathrm{a} = E_\theta(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})) = 0$. Υποθέτοντας ότι η σ.κ. του δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'$ είναι συνεχής προκύπτει ότι $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = 0$. Άρα $\beta = 1 - E_{\theta'}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = 1$.

Στο σχήμα που ακολουθεί περιγράφονται γραφικά οι παραπάνω ιδιότητες του συνόλου Φ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων.



Σχήμα 2.4 *Γραφική παράσταση του συνόλου ελεγχοσυναρτήσεων.*

Από τις παραπάνω ιδιότητες και από το σχήμα 2.4 φαίνεται καθαρά ότι, όταν το μέγεθος του σφάλματος τύπου Ι ελαττώνεται, τότε δε μπορεί να ληφθεί κάποια απόφαση για το πως μεταβάλλεται το μέγεθος του σφάλματος τύπου ΙΙ, δηλαδή αν μεγαλώνει ή μικραίνει. Το μόνο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι για συγκεκριμένη τιμή του a, μπορεί να υπολογισθεί μια ελεγχοσυνάρτηση η οποία θα έχει ελάχιστο β. Επομένως, οι ελεγχοσυναρτήσεις βρίσκονται με τον παρακάτω κανόνα: για δοσμένη στάθμη σημαντικότητας (συνήθως $\mathrm{a} = 0.005, 0.01, 0.05, 0.1$), υπολογίζεται εκείνη η ελεγχοσυνάρτηση που μεγιστοποιεί την ισχύ. Επειδή τα κριτήρια στηρίζονται σε αυτήν την αρχή, ως αρχική υπόθεση θα πρέπει να ορίζεται εκείνη η υπόθεση της οποίας η λανθασμένη απόρριψη προκαλεί μεγαλύτερους κινδύνους σε σχέση με τη λανθασμένη αποδοχή της, διότι η πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης είναι η στάθμη σημαντικότητας και καθορίζεται από τον ερευνητή. Στην πράξη, όμως, έχει τελικά επικρατήσει να ορίζεται ως αρχική υπόθεση, η υπόθεση της μη μεταβολής της ιδιότητας ή του φαινομένου που μελετάται. Για το λόγο αυτό ονομάζεται και μηδενική υπόθεση.

Παράδειγμα 2.5

Ας υποτεθεί ότι ένα φάρμακο Α θεραπεύει μια ασθένεια με πιθανότητα p_0. Ένα νέο φάρμακο Β πρόκειται να κυκλοφορήσει στην αγορά και πρέπει να ελεγχθεί αν είναι αποτελεσματικότερο του Α. Αν p είναι η πιθανότητα θεραπείας με το φάρμακο Β, τότε αν $p \leq p_0$ το νέο φάρμακο δεν είναι καλύτερο του προηγούμενου, ενώ, αν $p > p_0$, τότε είναι αποτελεσματικότερο. Ζητείται να ορισθεί ποια είναι η μηδενική υπόθεση.

Λύση

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τον ορισμό των υποθέσεων.
$1^η$ Περίπτωση.

$$\mathrm{H}_0: \quad p \leq p_0 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad p > p_0 \ .$$

Το μέγεθος σφάλματος τύπου Ι είναι:

$$\mathrm{a} = E_p\left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right), \qquad p \leq p_0 \ .$$

$2^η$ Περίπτωση.

$$\mathrm{H}_0: \quad p > p_0 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad p \leq p_0 \ .$$

Το μέγεθος σφάλματος τύπου Ι είναι:

$$\mathrm{a} = E_p\left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right), \qquad p > p_0 \ .$$

Στην $1^η$ περίπτωση, αν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί, ενώ ισχύει, είναι το ίδιο με το να δεχτεί ο ερευνητής ότι το φάρμακο Β είναι αποτελεσματικότερο, ενώ συμβαίνει το αντίθετο.

Στην $2^η$ περίπτωση, αν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί, ενώ ισχύει, είναι το ίδιο με το να δεχτεί ο ερευνητής ότι το φάρμακο Β δεν είναι αποτελεσματικότερο, ενώ στην πραγματικότητα είναι.

Επειδή το πιο επικίνδυνο είναι να αποφανθεί ο ερευνητής ότι ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικότερο, ενώ δεν είναι, απ' ό,τι να οδηγηθεί στην απόρριψη ενός καλύτερου φαρμάκου, ως μηδενική υπόθεση, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, θα πρέπει να ληφθεί η H_0: $p \leq p_0$.

Έστωσαν οι υποθέσεις:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta \in \Omega_0 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \theta \in \Omega_1$$

και τα μεγέθη των σφαλμάτων τύπου Ι και ΙΙ τέτοια ώστε:

$$\mathrm{a} = \sup\{\pi_\varphi(\theta), \theta \in \Omega_0\} \ , \qquad \beta = 1 - \pi_\varphi(\theta) \ , \tag{2.5}$$

όπου:

$$\pi_\varphi(\theta) \geq \pi_{\varphi^*}(\theta) \ , \qquad \theta \in \Omega_1 \ , \tag{2.6}$$

για κάθε ελεγχοσυνάρτηση $\varphi^*(\mathrm{x})$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\sup\{\pi_{\varphi^*}(\theta), \theta \in \Omega_0\} \leq \mathrm{a} \ . \tag{2.7}$$

Ορισμός 2.5

Αν η υπόθεση H_1 είναι σύνθετη, η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις (2.5) και (2.6), λέγεται **ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση** (Ο.Ι.Ε.) (uniformly most powerful test statistic) με στάθμη σημαντικότητας a, μεταξύ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων $\varphi^*(\mathrm{x})$ που ικανοποιούν τη σχέση (2.7). Αν η υπόθεση H_1 είναι απλή, η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ λέγεται **ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση** (Ι.Ε.) με στάθμη σημαντικότητας a.

Ορισμός 2.6

Μια ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ονομάζεται **αμερόληπτη**, αν υπάρχει στάθμη σημαντικότητας a τέτοια, ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

$$\begin{cases} \pi_\varphi(\theta) \leq \mathrm{a}, & \forall\ \theta \in \Omega_0 \\ \pi_\varphi(\theta) \geq \mathrm{a}, & \forall\ \theta \in \Omega_1 \end{cases} ,$$

όπου η συνάρτηση $\pi(\theta)$ ορίστηκε στη σχέση (2.3).

Ορισμός 2.7
Έστω η ακολουθία των ελεγχοσυναρτήσεων $\varphi_n = \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_n)$, όπου n είναι το μέγεθος του τ.δ. και a_n και $\upbeta_n$ τα μεγέθη σφαλμάτων τύπου Ι και ΙΙ, αντίστοιχα. Η ακολουθία των ελεγχοσυναρτήσεων φ_n ονομάζεται συγκλίνουσα για την υπόθεση H_0, αν ισχύουν, ταυτόχρονα, τα παρακάτω:

$$\begin{matrix} \mathrm{a}_{n+1} \leq \mathrm{a}_n, & \forall\ \theta\ \in\ \Omega_0 \\ \upbeta_n \to 0\ (n \to +\infty), & \forall\ \theta\ \in\ \Omega_1 \end{matrix} .$$

2.2. Έλεγχος Απλών Υποθέσεων

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. με κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$. Αναζητείται ένας ισχυρότατος έλεγχος μεγέθους a $(0 < \mathrm{a} < 1)$ για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της υπόθεσης H_1: $\theta = \theta_1$. Κάτω από την υπόθεση H_0 η κατανομή είναι $f_0 = f(x;\theta_0)$ και η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta_0\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)\ .$$

Κάτω από την υπόθεση H_1 η κατανομή είναι $f_1 = f(x;\theta_1)$ και η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta_1\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1)\ .$$

Στο εξής, για λόγους απλότητας, θα χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί, $L_0 = L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta_0)$ και $L_1 = L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta_1)$.

Θεώρημα 2.2 [Λήμμα Neyman-Pearson, σελ.68]
Για τον έλεγχο της απλής μηδενικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\theta = \theta_1$, η ελεγχοσυνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0} > c \\ \delta, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0} = c \\ 0, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0} < c \end{cases},$$

όπου οι σταθερές c $(c > 0)$ και δ $(0 \leq \delta < 1)$ ορίζονται από τη σχέση:

$$E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{a},$$

είναι η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση από όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις που έχουν μικρότερη ή ίση τη σ.σ. a. Η σταθερά c λέγεται **κρίσιμο σημείο** ή **σημείο αποκοπής (critical value)**.
Απόδειξη.
Ας είναι τα σύνολα $K = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}\ \in\ S\colon\ L_1 > cL_0\right\}$, $M = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}\ \in\ S\colon\ L_1 = cL_0\right\}$ και $A = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in S\colon\ L_1 < cL_0\right\}$, $A \cup M \cup K = S$. Η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ορίζεται ως εξής:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in K \\ \delta, & \text{αν } \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in M \\ 0, & \text{αν } \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in A \end{cases},$$

Για την ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ισχύει ότι:

$$E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{a}\ . \tag{2.8}$$

Αν $\varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι μια άλλη ελεγχοσυνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$E_{\theta_0}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{a}\,, \tag{2.9}$$

τότε θα πρέπει να αποδειχθεί ότι:

$$E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \geq E_{\theta_1}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\ .$$

Πράγματι, αν $D = E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - E_{\theta_1}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)$, τότε ισχύει:

$$D = E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - E_{\theta_1}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = E_{\theta_1}\left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - \varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right) = \int_S \left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) - \varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}}\ ,$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned}
D &= \int_K \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_A \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = \\
&= \int_K \left(1 - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \left(\delta - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_A \left(0 - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} \geq \\
&\geq \int_K \left(1 - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)cL_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \left(\delta - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)cL_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_A \left(0 - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)cL_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = \\
&= c\left[\int_K \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_A \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right] = \\
&= c\int_S \left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) - \varphi^*(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right)L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = cE_{\theta_0}\left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - \varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.8) και (2.9) προκύπτει ότι:

$$E_{\theta_0}\left(\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - \varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\right) = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) - E_{\theta_0}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{a} - \mathrm{a} = 0.$$

Επομένως, ισχύει ότι $E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \geq E_{\theta_1}\varphi^*\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)$.

Παρατήρηση 2.1

1. Στη βιβλιογραφία η Ι.Ε. του λήμματος Neyman-Pearson δίνεται και με την εξής μορφή:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{L_0}{L_1} < c \\ \delta, & \text{αν } \dfrac{L_0}{L_1} = c\ . \\ 0, & \text{αν } \dfrac{L_0}{L_1} > c \end{cases}$$
2. Το θεμελιώδες λήμμα των Neyman-Pearson εφαρμόζεται επίσης στις περιπτώσεις που η τ.μ. X ή η παράμετρος θ ή και οι δύο είναι διανυσματικά μεγέθη.
3. Στα λογισμικά στατιστικής επεξεργασίας, ως κρίσιμο σημείο λαμβάνεται η τιμή του στατιστικού του δείγματος. Δηλαδή, αν $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ είναι το στατιστικό με το οποίο γίνεται ο έλεγχος, τότε το κρίσιμο σημείο είναι η τιμή του $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ για το δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{x}}$. Στη συνέχεια υπολογίζεται η πιθανότητα $\mathrm{P}\left(T\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) > T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)\ \mid\ \theta = \theta_0\right) = \mathrm{a}^*$ ή $\mathrm{P}\left(T\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) < T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)\ \mid\ \theta = \theta_0\right) = \mathrm{a}^*$, η οποία ονομάζεται **σημαντικότητα** του ελέγχου. Αν $\mathrm{a}^* > \mathrm{a}$, όπου a είναι η στάθμη σημαντικότητας, τότε γίνεται δεκτή η μηδενική υπόθεση, η οποία συνήθως έχει τη μορφή $\mathrm{H}_0\colon\ \theta = \theta_0$, ενώ, αν $\mathrm{a}^* < \mathrm{a}$, τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Θεώρημα 2.3

Η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$, όπως ορίστηκε στο θεώρημα 2.2 (σελ. 59), είναι αμερόληπτη για την υπόθεση $\mathrm{H}_0\colon\ \theta = \theta_0$ έναντι της υπόθεσης $\mathrm{H}_1\colon\ \theta = \theta_1$, σε σ.σ. a.

Απόδειξη.
Σύμφωνα με τον ορισμό 2.6 (σελ. 58), μια ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι αμερόληπτη, αν ισχύουν, συγχρόνως, οι παρακάτω προϋποθέσεις:

$$\begin{cases} \pi_\varphi(\theta) \leq \mathrm{a}, & \forall\, \theta \in \Omega_0 \\ \pi_\varphi(\theta) \geq \mathrm{a}, & \forall\, \theta \in \Omega_1 \end{cases} .$$

ή ισοδύναμα, αν ισχύουν, συγχρόνως, οι:

$$\begin{cases} E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \leq \mathrm{a} \\ E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \geq \mathrm{a} \Leftrightarrow 1-\upbeta \geq \mathrm{a} \end{cases} .$$

Επειδή ισχύει $E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{a}$ αρκεί να αποδειχτεί ότι: $E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \geq \mathrm{a}$. Έστω η συνάρτηση $L_1 - cL_0$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\begin{cases} L_1 - cL_0 > 0, & \forall\ \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in K \\ L_1 - cL_0 \leq 0, & \forall\ \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in \overline{K} = A \cup M \end{cases} .$$

Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $L_1 - cL_0$ στο σύνολο $\overline{K}$ προκύπτει ότι:

$$\int_{\overline{K}} (L_1 - cL_0) d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = \int_{\overline{K}} L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} - c\int_{\overline{K}} L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = \upbeta - c(1-\mathrm{a}) \leq 0 .$$

Επομένως:

$$c \geq \frac{\upbeta}{1-\mathrm{a}} . \tag{2.10}$$

Επιπλέον:

$$\pi_\varphi(\theta_1) = E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \int_K \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = \int_K L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + \int_M \delta L_1 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} ,$$

δηλαδή:

$$\pi_\varphi(\theta_1) \geq c\int_K L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} + c\int_M \delta L_0 d\underset{\sim}{\mathrm{x}} = cE_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = c\mathrm{a} .$$

Επομένως:

$$c \leq \frac{1-\upbeta}{\mathrm{a}} . \tag{2.11}$$

Από τις σχέσεις (2.10) και (2.11) συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\upbeta}{1-\mathrm{a}} \leq c \leq \frac{1-\upbeta}{\mathrm{a}} \Leftrightarrow \frac{\upbeta}{1-\mathrm{a}} \leq \frac{1-\upbeta}{\mathrm{a}} \Leftrightarrow 1-\upbeta \geq \mathrm{a} .$$

Θεώρημα 2.4
Η ακολουθία των ελεγχοσυναρτήσεων $\varphi_n = \varphi(\mathrm{x}_n)$, όπως ορίστηκαν στον ορισμό 2.7 (σελ. 59), είναι συγκλίνουσα με την έννοια ότι, όταν το μέγεθος του δείγματος n αυξάνει ($n \to +\infty$), τότε η ισχύς του ελέγχου τείνει στη μονάδα, με την προϋπόθεση ότι ισχύει:

$$E\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) < +\infty .$$

Απόδειξη.
Έστω η τ.μ.:

$$Z = \ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}$$

με μέση τιμή:

$$E_\theta Z = E_\theta\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right)$$

και ένα τ.δ. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ από την τ.μ. Z. Σύμφωνα με το Νόμο των μεγάλων αριθμών του Kolmogorov (σελ. 68) ισχύει ότι για $n \to +\infty$:

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\frac{f(X_i;\theta_1)}{f(X_i;\theta_0)} \xrightarrow{\text{σ.β.}} E_\theta\left(ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right),$$

Επομένως:

$$Z_n = E_\theta\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) + \varepsilon_n(\theta), \quad \varepsilon_n(\theta) \xrightarrow{\text{σ.β.}} 0 \;.$$

Επίσης, από το γεγονός ότι η συνάρτηση $-\ln x$ είναι κυρτή, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen (σελ. 68), προκύπτει ότι:

$$E_\theta\left(-\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) \geq -\ln E_\theta\left(\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) \Leftrightarrow E_\theta\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) \leq \ln E_\theta\left(\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right).$$

Για $\theta = \theta_0$

$$A_0 = E_{\theta_0}\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) \leq \ln E_{\theta_0}\left(\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) = \ln\int_{\mathbb{R}}\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}f(X;\theta_0)dX = \ln 1 = 0 \;.$$

Για $\theta = \theta_1$

$$A_1 = E_{\theta_1}\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) = E_{\theta_1}\left(-\ln\frac{f(X;\theta_0)}{f(X;\theta_1)}\right) \geq -\ln E_{\theta_1}\left(\frac{f(X;\theta_0)}{f(X;\theta_1)}\right) = -\ln 1 = 0 \;.$$

Άρα:

$$E_\theta\left(\ln\frac{f(X;\theta_1)}{f(X;\theta_0)}\right) = \begin{cases}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \ln\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}f(x;\theta_0)dx = A_0 \leq 0, & \theta = \theta_0 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \ln\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}f(x;\theta_1)dx = A_1 \geq 0, & \theta = \theta_1\end{cases},$$

με συνέπεια:

$$Z_n = \begin{cases}A_0 + \varepsilon_n(\theta_0), & \theta = \theta_0 \\ A_1 + \varepsilon_n(\theta_1), & \theta = \theta_1\end{cases}. \tag{2.12}$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0, όπως ορίστηκε στο θεώρημα 2.2 (σελ. 59), είναι:

$$\bar{A} = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in S: \frac{L_1}{L_0} = \prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \geq c\right\}, \qquad c > 0 \;\;\forall\;\; n \geq 1 \;.$$

Συνεπώς:

$$\mathrm{P}_\theta(\bar{A}) = P_\theta\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x;\theta_0)} \geq c\right) = P_\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \geq \ln c\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\ln c}{n}\right).$$

Από τη σχέση (2.12) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{P}_\theta(\bar{A}) = \begin{cases}\mathrm{a}_n = P_{\theta_0}\left(\varepsilon_n(\theta_0) \geq \dfrac{\ln c}{n} - A_0\right), & \theta = \theta_0 \\ 1 - \beta_n = P_{\theta_1}\left(\varepsilon_n(\theta_1) \geq \dfrac{\ln c}{n} - A_1\right), & \theta = \theta_1\end{cases}.$$

Αλλά, $\varepsilon_n(\theta) \xrightarrow{\text{σ.β.}} 0$ και επειδή $A_0 < 0$ συμπεραίνεται ότι $P_{\theta_0}(\varepsilon_n(\theta_0) \geq 0) = 0$ με συνέπεια $\mathrm{a}_n \to 0$, όταν $n \to +\infty$. Επίσης, επειδή $A_1 > 0$ συμπεραίνεται ότι η πιθανότητα η ποσότητα $\varepsilon_n(\theta_0)$ να είναι μεγαλύτερη από κάποιο αρνητικό αριθμό είναι μεγάλη, δηλαδή $\gamma_n = 1 - \beta_n \to 1$, όταν $n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.6

Με τη βοήθεια τυχαίου δείγματος $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ από κατανομή Poisson $P(\theta)$, να βρεθεί ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής $\theta = \theta_1$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Η πιθανοφάνεια για την κατανομή Poisson είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right)=e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}.$$
Για $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$ και $q=\prod_{i=1}^{n}x_i!$ η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:
$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right)=e^{-n\theta}\frac{\theta^{t}}{q}\ .$$
Επομένως:
$$L_0=e^{-n\theta_0}\frac{\theta_0^t}{q},\qquad L_1=e^{-n\theta_1}\frac{\theta_1^t}{q}\ .$$
Σύμφωνα με το λήμμα των Neyman-Pearson η Ι.Ε., δίνεται από τη σχέση:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}>c\\ \delta, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}=c\\ 0, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}<c\end{cases}\Leftrightarrow\ \varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}>\ln c\\ \delta, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}=\ln c\\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}<\ln c\end{cases},$$
όπου οι σταθερές c και δ υπολογίζονται από τη σχέση: $E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right)=\mathrm{a}$.

Ισχύει ότι:
$$\frac{L_1}{L_0}=\frac{e^{-n\theta_1}\theta_1^t}{e^{-n\theta_0}\theta_0^t}=e^{-n(\theta_1-\theta_0)}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t\ .$$
Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:
$$\ln\frac{L_1}{L_0}=-n(\theta_1-\theta_0)+t\ \ln\frac{\theta_1}{\theta_0}\ .$$
Έστω
$$c_0=\frac{\ln c+n(\theta_1-\theta_0)}{\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_0}}\ .$$
Για $\theta_0<\theta_1$ η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } t>c_0\\ \delta, & \text{αν } t=c_0\\ 0, & \text{αν } t<c_0\end{cases},\qquad (2.13)$$
όπου οι σταθερές c_0 και δ υπολογίζονται από τη σχέση $E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(T>c_0)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)=\mathrm{a}$. Από την άσκηση 1.1 (σελ. 45), είναι γνωστό ότι, αν οι ανεξάρτητες τ.μ. X_i ακολουθούν κατανομή $P(\theta)$, τότε η τ.μ. $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $P(n\theta)$. Υπάρχουν πίνακες οι οποίοι δίνουν την πιθανότητα $\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0)$ (παράρτημα Β, πίνακας Β7, σελ. 227). Επομένως:
$$\mathrm{a}=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)\Rightarrow\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0)=1-\mathrm{a}+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0).$$
Επειδή $\delta\ge 0$ και $P_{\theta_0}(T=c_0)>0$ συμπεραίνεται ότι $P_{\theta_0}(T\le c_0)\ge 1-\mathrm{a}$ και η τιμή c_0 είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός για τον οποίο ισχύει ότι $\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0)\ge 1-\mathrm{a}$. Η τιμή του δ υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\delta=\frac{\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0)-1+\mathrm{a}}{\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)}.$$
Για $\theta_0>\theta_1$ η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } t<c_0\\ \delta, & \text{αν } t=c_0\\ 0, & \text{αν } t>c_0\end{cases},\qquad (2.14)$$
όπου οι σταθερές c_0 και δ υπολογίζονται από τη σχέση $E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(T<c_0)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)=\mathrm{a}$, όπου $\mathrm{P}_{\theta_0}(T<c_0)=\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0-1)$. Επειδή $\delta\ge 0$ και $\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)>0$ συμπεραίνεται ότι $\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0-1)\le\mathrm{a}$ και η τιμή c_0 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός για τον οποίο ισχύει ότι $\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0-1)\le\mathrm{a}$. Η τιμή του δ υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\delta=\frac{\mathrm{a}-\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c_0-1)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c_0)}\ .$$

Παράδειγμα 2.7

Δίνεται τυχαίο δείγμα από κατανομή Poisson $P(\theta)$. Για $n = 15$, $\theta_0 = 0.2$, $\theta_1 = 0.5$ και $a = 0.05$ να υπολογιστούν οι σταθερές c_0 και δ, καθώς και η ισχύς του ελέγχου.

Λύση

Προφανώς, πρόκειται για την περίπτωση $\theta_0 < \theta_1$ του παραδείγματος 2.6 (σελ. 62). Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση θα είναι της μορφής (2.13). Η τ.μ. T ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $P(n\theta_1)$, δηλαδή $P(7.5)$ κάτω από την υπόθεση H_1 και την κατανομή $P(n\theta_0)$, δηλαδή $P(3)$ κάτω από την υπόθεση H_0. Επίσης ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}_{0.2}(T > c_0) + \delta \mathrm{P}_{0.2}(T = c_0) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}_{0.2}(T \le c_0) - \delta \mathrm{P}_{0.2}(T = c_0) = 0.95 \ .$$

Από τους πίνακες της κατανομής Poisson (παράρτημα Β, πίνακας Β7, σελ. 227), εύκολα διαπιστώνεται ότι η μικρότερη ακέραια τιμή c_0 για την οποία ισχύει ότι: $\mathrm{P}_{0.2}(T \le c_0) \ge 0.95$ είναι η τιμή $c_0 = 6$, διότι $\mathrm{P}_{0.2}(T \le 6) \ge 0.966$ (Εικόνα 2.1).

	λ									
c	**2.10**	**2.20**	**2.30**	**2.40**	**2.50**	**2.60**	**2.70**	**2.80**	**2.90**	**3.00**
0	0.122	0.111	0.100	0.091	0.082	0.074	0.067	0.061	0.055	0.050
1	0.380	0.355	0.331	0.308	0.287	0.267	0.249	0.231	0.215	0.199
2	0.650	0.623	0.596	0.570	0.544	0.518	0.494	0.469	0.446	0.423
3	0.839	0.819	0.799	0.779	0.758	0.736	0.714	0.692	0.670	0.647
4	0.938	0.928	0.916	0.904	0.891	0.877	0.863	0.848	0.832	0.815
5	0.980	0.975	0.970	0.964	0.958	0.951	0.943	0.935	0.926	0.916
6	0.994	0.993	0.991	0.988	0.986	0.983	0.979	0.976	0.971	0.966
7	0.999	0.998	0.997	0.997	0.996	0.995	0.993	0.992	0.990	0.988
8	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Εικόνα 2.1. *Απόσπασμα πίνακα κατανομής Poisson για τον υπολογισμό της σταθεράς c_0 του παραδείγματος 2.7.*

Επομένως:

$$\delta P_{0.2}(T = c_0) = 0.966 - 0.95 = 0.016 \Rightarrow \delta = \frac{0.016}{e^{-3}\frac{3^6}{6!}} = 0.317 \ .$$

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma = E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{P}_{0.5}(T > 6) + 0.317 \cdot \mathrm{P}_{0.5}(T = 6) = 1 - \mathrm{P}_{0.5}(T \le 6) + 0.317 \cdot \mathrm{P}_{0.5}(T = 6) \ .$$

Από τους πίνακες της κατανομής Poisson (σελ. 227)(Εικόνα 2.2)

	λ							
c	**4.50**	**5.00**	**5.50**	**6.00**	**6.50**	**7.00**	**7.50**	**8.00**
0	0.011	0.007	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000
1	0.061	0.040	0.027	0.017	0.011	0.007	0.005	0.003
2	0.174	0.125	0.088	0.062	0.043	0.030	0.020	0.014
3	0.342	0.265	0.202	0.151	0.112	0.082	0.059	0.042
4	0.532	0.440	0.358	0.285	0.224	0.173	0.132	0.100
5	0.703	0.616	0.529	0.446	0.369	0.301	0.241	0.191
6	0.831	0.762	0.686	0.606	0.527	0.450	0.378	0.313
7	0.913	0.867	0.809	0.744	0.673	0.599	0.525	0.453
8	0.960	0.932	0.894	0.847	0.792	0.729	0.662	0.593

Εικόνα 2.2 *Απόσπασμα πίνακα κατανομής Poisson για τον υπολογισμό της ισχύος του παραδείγματος 2.7.*

προκύπτει ότι:

$$\gamma = 1 - 0.378 + 0.317 \cdot (0.378 - 0.241) = 0.665 \ .$$

Παράδειγμα 2.8

Δίνεται τυχαίο δείγμα μεγέθους 20 από κατανομή Poisson $P(\theta)$. Να γίνει ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0 = 0.3$, με εναλλακτική H_1: $\theta = \theta_1 = 0.1$ σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0.05$ και να βρεθεί η ισχύς του ελέγχου.

Λύση

Προφανώς, πρόκειται για την περίπτωση που $\theta_0 > \theta_1$ του παραδείγματος 2.6 (σελ. 62). Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση θα είναι της μορφής (2.14). Η τ.μ. T ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $P(n\theta_0)$, δηλαδή $P(6)$ κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0 και την κατανομή $P(n\theta_1)$, δηλαδή $P(2)$ κάτω από την εναλλακτική υπόθεση H_1. Οι σταθερές c_0 και δ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}_{0.3}(T < c_0) + \delta \mathrm{P}_{0.3}(T = c_0) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}_{0.3}(T \leq c_0 - 1) + \delta \mathrm{P}_{0.3}(T = c_0) = 0.05.$$

Ακολουθώντας όμοιο τρόπο με αυτόν του παραδείγματος 2.7 (σελ. 64), προκύπτει $c_0 = 2$ και $\delta = 0.733$.

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma = E_{\theta_1} \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{P}_{0.1}(T < 2) + 0.733 \cdot \mathrm{P}_{0.1}(T = 2) = 0.406 + 0.733 \cdot 0.271 = 0.605.$$

Παρατήρηση 2.2

Έστω ότι, στο παράδειγμα 2.8 (σελ. 65), το μέγεθος του δείγματος δεν είναι 20, αλλά $n = 12$ και ένας ερευνητής επιθυμεί να ελέγξει τις ίδιες υποθέσεις, δηλαδή:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta = 0.3 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \theta = 0.1 \ .$$

Στην περίπτωση αυτή η ισχύς του ελέγχου θα ήταν $\gamma = 0.0554$. Συμπεραίνεται, επομένως, πως το μέγεθος του δείγματος επηρεάζει την ισχύ του ελέγχου.

Παράδειγμα 2.9

Με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου σ^2: γνωστό, να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\mu = \mu_0$ με εναλλακτική H_1: $\mu = \mu_1$ σε στάθμη σημαντικότητας a και να βρεθεί η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad \mu = \mu_0 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \mu = \mu_1 \ .$$

Η πιθανοφάνεια για την κανονική κατανομή είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \mu\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} .$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{L_1}{L_0} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \mu_0)^2 - (x_i - \mu_1)^2] = \frac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} - \frac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2) \ .$$

Για $\mu_1 > \mu_0$ η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} > \ln c \Leftrightarrow \bar{x} > c_0 \\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} \leq \ln c \Leftrightarrow \bar{x} \leq c_0 \end{cases} , \tag{2.15}$$

όπου:

$$c_0 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\ln c}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{n(\mu_1 + \mu_0)}{2\sigma^2}\right) .$$

Η σταθερά c_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}(\bar{X} > c_0) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) .$$

Άρα:

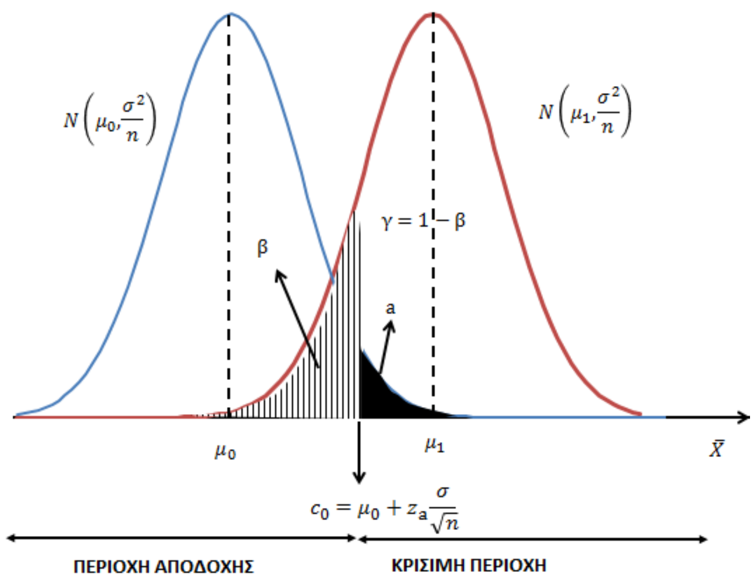
$$\Phi\left(\frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathrm{a} \Rightarrow \frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c_0 = \mu_0 + z_{\mathrm{a}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Η ισχύς του ελέγχου είναι:

$$\gamma = E_{\mu_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\mu_1}(\bar{X} > c_0) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(c_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(c_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) ,$$

δηλαδή:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{(\mu_1 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} - z_{\mathrm{a}}\right) . \tag{2.16}$$



Σχήμα 2.5 *Γραφική παράσταση για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0: $\mu = \mu_0$ *έναντι της* H_1: $\mu = \mu_1$ *με* $\mu_0 < \mu_1$.

Για $\mu_1 < \mu_0$ η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{X} > c_0 \\ 0, & \text{αν } \bar{X} \le c_0 \end{cases} , \tag{2.17}$$

όπου:

$$c_0 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\ln c}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{n(\mu_1 + \mu_0)}{2\sigma^2}\right) .$$

Η σταθερά c_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}(\bar{X} < c_0) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) .$$

Άρα:

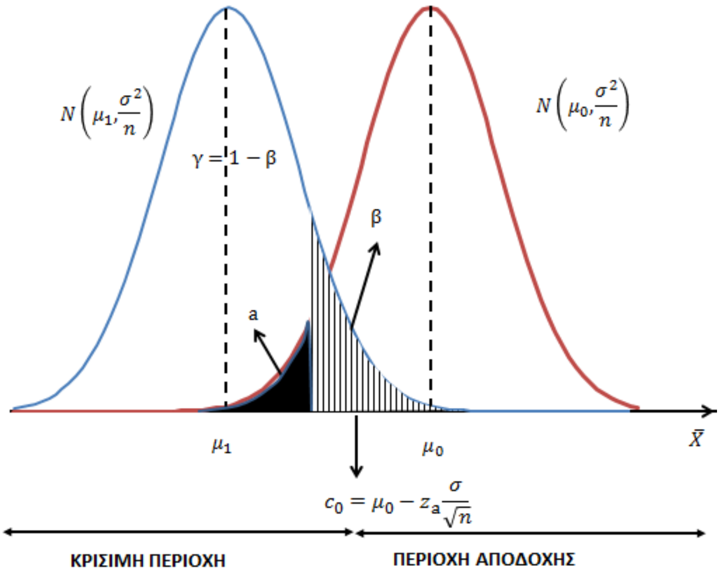
$$\Phi\left(\frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathrm{a} \Rightarrow \frac{(c_0-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = -z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c_0 = \mu_0 - z_{\mathrm{a}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Η ισχύς του ελέγχου είναι:

$$\gamma = E_{\mu_1}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = P_{\mu_1}(\bar{X} < c_0) = P_{\mu_1}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(c_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(c_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma = \Phi\left(\frac{(\mu_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} - z_a\right). \tag{2.18}$$



Σχήμα 2.6 *Γραφική παράσταση για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\mu = \mu_0$ έναντι της H_1: $\mu = \mu_1$ με $\mu_0 > \mu_1$.*

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (2.16) και (2.18), αλλά και από τα σχήματα 2.5 και 2.6, η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης αυξάνεται όσο αυξάνει και η σ.σ. a. Επίσης, όπως ήταν αναμενόμενο, από το θεώρημα 2.4 (σελ. 61), η ισχύς είναι αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος n.

Παρατήρηση 2.3

Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\mu = \mu_0$ στην περίπτωση που $\mu_1 > \mu_0$ είναι:

$$R = \left\{\underset{\sim}{X}: \ \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} > z_a\right\},$$

δηλαδή η απορριπτική περιοχή της H_0 είναι ανεξάρτητη της τιμής μ_1. Επομένως, η συγκεκριμένη περιοχή μπορεί να ληφθεί ως η περιοχή απόρριψης της H_0: $\mu = \mu_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\mu > \mu_0$, με συνέπεια η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{x})$ που ορίστηκε σύμφωνα με το λήμμα των Neyman-Pearson να είναι Ο.Ι.Ε.

Ομοίως, στην περίπτωση που $\mu_1 < \mu_0$ η απορριπτική περιοχής της υπόθεσης H_0: $\mu = \mu_0$ είναι:

$$R = \left\{\underset{\sim}{X}: \ \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < -z_a\right\},$$

και είναι η περιοχή απόρριψης της H_0: $\mu = \mu_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\mu < \mu_0$. Συνεπώς, η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{x})$ που ορίστηκε σύμφωνα με το λήμμα των Neyman-Pearson να είναι Ο.Ι.Ε.

Η θεωρία των Neyman-Pearson είναι αυτή που χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές στους ελέγχους υποθέσεων. Να σημειωθεί, όμως, ότι δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν και άλλα κριτήρια ελέγχου απλών υποθέσεων όπως είναι: η θεωρία αποφάσεων, η μέθοδος Bayes και το κριτήριο της minimax ελεγχοσυνάρτησης.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Bhattacharryya, C. & Johnson, R. (1977). *Statistical Concepts and Methods*. Wiley.

Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (1977). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day Inc.

Δαμιανού, Χ. & Κούτρας Μ. (2003). *Εισαγωγή στη Στατιστική Ι*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Δαμιανού, Χ. & Κούτρας Μ. (1998). *Εισαγωγή στη Στατιστική ΙΙ*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Hogg, R. V., McKean, J. W. & Craig, A. T. (2005). *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Prentice Hall.

Hogg, R. V. & Tanise, E. A. (1977). *Probability and Statistical Inference*. Collier-MacMillan International Editions.

Jensen, J. L. W. V.(1906). "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes". *Acta Mathematica*, 30, 175–193.

Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsey Publishing Company, New York.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. & Μπόρα-Σέντα, Ε. (2013). *Στατιστική: Θεωρία και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Κουνιάς, Σ. & Μωυσιάδης, Χ. (1995). *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Kendall, M. G. & Stuart A. (1973). *The Advanced theory of Statistics, volume II, 3rd edition*. Griffin and Co Ltd., London.

Larson, J. (1974). *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*. John Wiley and Sons Inc., New York.

Neyman, J. & Pearson, E. S. (1933). "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 231, 694–706.

Παπαϊωάννου ,Τ. & Φερεντίνος, Κ. (2002). *Μαθηματική Στατιστική, 2η Έκδοση*. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

Walker, H. M (1985). "De Moivre on the law of normal probability". *In Smith, David Eugene, a source book in mathematics*. Dover.

Λυμένες Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

Άσκηση 2.1

Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H_0}$: $\boldsymbol{\theta = 0.5}$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H_1}$: $\boldsymbol{\theta = 0.25}$ στη διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{B(10, \theta)}$ η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\boldsymbol{x \leq 3}$, όπου η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{B(10, \theta)}$. Να βρεθεί η στάθμη σημαντικότητας και η ισχύς του ελέγχου.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\le 3\\ 0, & \text{αν } x>3\end{cases}.$$

Για τη διωνυμική κατανομή η σ.π. είναι

$$f(x;\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\qquad x=0,1,\dots,n,\qquad 0<\theta<1\ .$$

Η στάθμη σημαντικότητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=\pi(\theta_0)=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3}\binom{10}{x}\cdot 0.5^{10}=0.1719\ .$$

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma=\pi(\theta_1)=E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_1}(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3}\binom{10}{x}\cdot 0.25^x\cdot 0.75^{10-x}=0.7759\ .$$

Να σημειωθεί ότι οι τιμές $\mathrm{P}_{0.5}(X\le 3)$ και $\mathrm{P}_{0.25}(X\le 3)$ μπορούν να υπολογισθούν είτε απευθείας είτε από τους πίνακες (παράρτημα Β, πίνακας Β6, σελ. 221) της διωνυμικής κατανομής.

Άσκηση 2.2

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ μεγέθους $n=9$ από κανονική κατανομή $N(\theta,1)$. Η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta=3$ απορρίπτεται έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta=2$, όταν $\bar{X}<2.45$. Να υπολογιστεί η στάθμη σημαντικότητας και η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \bar{X}<2.45\\ 0, & \text{αν } \bar{X}\ge 2.45\end{cases}.$$

Είναι γνωστό ότι αν οι τ.μ. $X_1,X_2,\dots,X_n$ ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, τότε η τ.μ. $\bar{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, δηλαδή την κανονική κατανομή $N\left(\theta,\frac{1}{n}\right)$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα.

Η στάθμη σημαντικότητας είναι:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}(\bar{X}<2.45|\theta=3)=\mathrm{P}((\bar{X}-3)\cdot 3<(2.45-3)\cdot 3)=\mathrm{P}(Z<-1.65)=0.05\ .$$

Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma=E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}(\bar{X}<2.45|\theta=2)=\mathrm{P}((\bar{X}-2)\cdot 3<(2.45-2)\cdot 3)=\mathrm{P}(Z<1.35)=0.9115\ .$$

Άσκηση 2.3

Το τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ προέρχεται από κατανομή Bernoulli $B(1,\theta)$. Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\theta=0.5$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta=0.25$ η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση έχει στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a}=0.10$ και ισχύ $\gamma=0.80$. Με τη βοήθεια του Κ.Ο.Θ. να υπολογιστεί το μέγεθος του δείγματος n.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0:\quad \theta_0=0.5\ ,$$
$$\mathrm{H}_1:\quad \theta_1=0.25\ .$$

Η σ.π. της κατανομής Bernoulli $B(1,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x},\qquad x=0,1,\qquad 0<\theta<1\ .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}[\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}]=\theta^t(1-\theta)^{n-t}\ ,$$

όπου $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$ Επομένως:

$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^t\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-t}=\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^t\left(\frac{1-0.25}{1-0.5}\right)^{n-t}=\left(\frac{1}{2}\right)^t\left(\frac{3}{2}\right)^{n-t}\ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει:

$$\ln\frac{L_1}{L_0}=n\ln\frac{3}{2}-t\ln 3.$$

Η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν}\ \ln\dfrac{L_1}{L_0}\geq c\quad\Leftrightarrow\quad t\leq c_0\\ 0, & \text{αν}\ \ln\dfrac{L_1}{L_0}<c\quad\Leftrightarrow\quad t>c_0\end{cases},$$

όπου για τη σταθερά c_0 ισχύει ότι:

$$c_0=\frac{n\ln\frac{3}{2}-c}{\ln 3}$$

Από την υπόθεση ισχύει ότι:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})=\mathrm{P}_{\theta_0}(T\leq c_0)=0.10\ .$$

και:

$$\gamma=E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})=\mathrm{P}_{\theta_1}(T\leq c_0)=0.80\ .$$

Σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ. η τ.μ. $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(n\theta,n\theta(1-\theta))$. Επομένως:

$$\mathrm{a}=0.10=\mathrm{P}_{\theta_0}(T\leq c_0)=\mathrm{P}\left(\frac{T-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\leq\frac{c_0-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right)=\Phi\left(\frac{c_0-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right)\ ,$$

δηλαδή:

$$\frac{c_0-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}=-z_{0.10}=-1.28\ .$$

Ομοίως:

$$\gamma=0.80=\mathrm{P}_{\theta_1}(T\leq c_0)=\mathrm{P}\left(\frac{T-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\leq\frac{c_0-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\right),$$

δηλαδή:

$$\frac{c_0-n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}=z_{0.20}=0.84\ .$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $\theta_0=0.5$ και $\theta_1=0.25$ οι δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{cases}\dfrac{c_0-0.5n}{0.5\sqrt{n}}=-1.28\\ \dfrac{c_0-0.25n}{\sqrt{0.1875n}}=0.84\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}n\geq 16\\ c_0=5.44\end{array}.$$

Επομένως, η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν}\ \sum_{i=1}^{n}x_i\leq 5.44\\ 0, & \text{αν}\ \sum_{i=1}^{n}x_i>5.44\end{cases}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αναγνώστης μπορεί να εκπλαγεί με το αποτέλεσμα, αφού, ενώ έγινε χρήση του Κ.Ο.Θ., το οποίο απαιτεί μέγεθος δείγματος τουλάχιστον 30, βρέθηκε $n\geq 16$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει αναφορά στο θεώρημα των De Moivre-Laplace (σελ. 68), το οποίο αφορά στη σύγκλιση της διωνυμικής κατανομής στην κανονική κατανομή. Σύμφωνα με το θεώρημα των De Moivre-Laplace η σύγκλιση της διωνυμικής σε μια κανονική κατανομή είναι ικανοποιητική, όταν $n\theta \geq 5$ και $n(1-\theta) \geq 5$, γεγονός το οποίο ισχύει κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0.

Άσκηση 2.4

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από κανονική κατανομή $N(\mu,\theta)$, όπου $\theta > 0$ και μ: γνωστό. Να βρεθεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση και η ισχύς για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta = \theta_1$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta = \theta_0 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \theta = \theta_1 \ .$$

Η σ.π.π. της κανονικής κατανομής $N(\mu,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2\right\} \ .$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2\right\}\right] = \left(\frac{1}{2\pi\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \ .$$

Επομένως:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\ln\frac{L_1}{L_0} = \frac{n}{2}\ln\frac{\theta_0}{\theta_1} + \frac{\theta_1-\theta_0}{2\theta_0\theta_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \ .$$

Η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση, σύμφωνα με το λήμμα Neyman-Pearson, δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} > c \iff \dfrac{\theta_1-\theta_0}{2\theta_0\theta_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 > c_0 \\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} \leq c \iff \dfrac{\theta_1-\theta_0}{2\theta_0\theta_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \leq c_0 \end{cases} ,$$

όπου η σταθερά:

$$c_0 = c - \frac{n}{2}\ln\frac{\theta_0}{\theta_1} \ ,$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).$$

Έστω $\theta_1 > \theta_0$, τότε:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 > \frac{2\theta_0\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 > \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0\right) \ .$$

Η τ.μ. W που δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \ ,$$

ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$, σύμφωνα με το θεώρημα 1.6 (σελ. 25). Επομένως, ισχύει ότι.

$$\frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0 = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2 \ .$$

και η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2>\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\le\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\end{cases}.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης είναι:

$$\gamma=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2>\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2>\frac{\theta_0}{\theta_1}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma=\int_{\frac{\theta_0}{\theta_1}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2}^{+\infty}g_n(x)dx\ ,$$

όπου $g_n(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$.

Για $\theta_1<\theta_0$ ισχύει ότι:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\frac{2\theta_0\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0\right),$$

δηλαδή:

$$\frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_0}c_0=\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\ .$$

Η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2<\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\ge\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\end{cases}.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης, για $\theta_1<\theta_0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\theta_0\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\right)=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\frac{\theta_0}{\theta_1}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma=\int_{0}^{\frac{\theta_0}{\theta_1}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-\mathrm{a}}^2}g_n(x)dx\ ,$$

όπου $g_n(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$.

Άσκηση 2.5

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2},\dots,\boldsymbol{X_n})$ που ακολουθεί την κατανομή γάμμα $\boldsymbol{G(a,\theta)}$, όπου $\boldsymbol{a}\in\mathbb{N}$. Να βρεθεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση και η ισχύς για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta_0}$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta_1}$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής $G(a,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta)=\frac{\theta^a}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp\{-\theta x\},\qquad x>0\ .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^a}{\Gamma(\alpha)}x_i^{a-1}\exp\{-\theta x_i\}=\frac{\theta^{na}}{(\Gamma(\alpha))^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a-1}\exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}.$$

Επομένως:

$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{na}\exp\left\{-(\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}.$$

Η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}>c\Leftrightarrow(\theta_0-\theta_1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i>c-na\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}\leq c\Leftrightarrow(\theta_0-\theta_1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\leq c-na\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\end{cases}.$$

Έστω $c_0=c-na\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}$, τότε η σταθερά c_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left((\theta_0-\theta_1)\sum_{i=1}^{n}X_i>c_0\right).$$

Να σημειωθεί ότι οι τ.μ. $X_1,X_2,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή $G(a,\theta)$. Στην άσκηση 1.2 (σελ. 46), έχει αποδειχθεί ότι η τ.μ. W που δίνεται από τη σχέση:

$$W=2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,$$

ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n}$.

Για $\theta_0>\theta_1$:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{c_0}{\theta_0-\theta_1}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(2\theta_0\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{2\theta_0c_0}{\theta_0-\theta_1}\right),$$

όπου:

$$\frac{2\theta_0c_0}{\theta_0-\theta_1}=\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}$$

και η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i>\dfrac{\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}}{2\theta_0}\\ 0, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\leq\dfrac{\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}}{2\theta_0}\end{cases}.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης είναι:

$$\gamma=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}}{2\theta_0}\right)=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(2\theta_1\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{\theta_1}{\theta_0}\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma=\int_{\frac{\theta_1}{\theta_0}\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n;\mathrm{a}}}^{+\infty}g_{2an}(x)dx\ ,$$

όπου $g_{2an}(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\chi}^2_{2\alpha n}$.

Για $\theta_0<\theta_1$:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{c_0}{\theta_0-\theta_1}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(2\theta_0\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{2\theta_0c_0}{\theta_0-\theta_1}\right),$$

όπου:

$$\frac{2\theta_0 c_0}{\theta_0-\theta_1}=\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}$$

και η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}x_i<\dfrac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}}{2\theta_0}\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}x_i\geq\dfrac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}}{2\theta_0}\end{cases}.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης είναι:

$$\gamma=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}}{2\theta_0}\right)=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(2\theta_1\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{\theta_1}{\theta_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma=\int_0^{\frac{\theta_1}{\theta_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n;1-\mathrm{a}}}\boldsymbol{g}_{2an}(x)dx\ ,$$

όπου $g_{2an}(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2\alpha n}$.

Άσκηση 2.6

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2},\dots,\boldsymbol{X_n})$ από κατανομή βήτα $\boldsymbol{\beta(\theta,1)}$, $\boldsymbol{\theta>0}$. Να βρεθεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta=\theta_0}$ έναντι της εναλλακτικής $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta=\theta_1}$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής $\beta(\theta,1)$ είναι:

$$f(x;\theta)=\frac{x^{\theta-1}(1-x)^0}{\beta(\theta,1)}=\frac{x^{\theta-1}}{\beta(\theta,1)},\qquad 0<x<1\ ,$$

όπου:

$$\beta(\theta,1)=\int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^0dx=\frac{\Gamma(\theta)\Gamma(1)}{\Gamma(1+\theta)}\ ,$$
$$\Gamma(1+\theta)=\theta\Gamma(\theta),\qquad \Gamma(1)=0!=1\ .$$

Έτσι:

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1}.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta {x_i}^{\theta-1}=\theta^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}\ .$$

Έτσι:

$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\prod_{i=1}^{n}{x_i}^{\theta_1-\theta_0}\Rightarrow \ln\frac{L_1}{L_0}=n\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)+(\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ .$$

Από την παρατήρηση της άσκησης 1.3 (σελ. 46) προκύπτει ότι, αν η τ.μ. X ακολουθεί μια κατανομή $\beta(\theta,1)$, τότε η τ.μ. $W=-2\theta lnX$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_2$. Άρα η τ.μ.:

$$\sum_{i=1}^{n}W_i=-\,2\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n}$.

Έστω $\theta_1>\theta_0$. Σύμφωνα με το λήμμα των Neyman-Pearson η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}>c \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\ln x_i>c_0\\ 0, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}\le c \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\ln x_i\le c_0\end{cases},$$

όπου η σταθερά:

$$c_0=\frac{c-\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n}{\theta_1-\theta_0}\ ,$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i>c_0\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\ln X_i<-2\theta_0c_0\right),$$

δηλαδή:

$$-2\theta_0c_0=\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;1-\mathrm{a}}.$$

Άρα η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } -\sum_{i=1}^{n}\ln x_i<\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;1-\mathrm{a}}}{2\theta_0}\\ 0, & \text{αν } -\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ge\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;1-\mathrm{a}}}{2\theta_0}\end{cases}.$$

Έστω $\theta_1<\theta_0$, τότε η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}>c \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\ln x_i<c_0\\ 0, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}\le c \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ge c_0\end{cases},$$

όπου η σταθερά c_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i<c_0\right)=\mathrm{P}\left(-2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\ln X_i>-2\theta_0c_0\right)\Rightarrow-2\theta_0c_0=\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;\mathrm{a}}\ .$$

Άρα η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } -\sum_{i=1}^{n}\ln x_i>\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;\mathrm{a}}}{2\theta_0}\\ 0, & \text{αν } -\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\le\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n;\mathrm{a}}}{2\theta_0}\end{cases}.$$

Άσκηση 2.7

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2},\dots,\boldsymbol{X_n})$ από γεωμετρική κατανομή με σ.π. $\boldsymbol{f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1}}$, $\boldsymbol{x=1,2,\dots,\ \theta\in(0,1)}$. Σε στάθμη σημαντικότητας a να ελεγχθούν οι υποθέσεις $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta=\theta_0}$ έναντι της εναλλακτικής $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta=\theta_1}$.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)^{x_i-1}=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}=\theta^n(1-\theta)^{t-n}\ ,$$

όπου $t=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Επομένως:
$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^n\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^t \ .$$
Η Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}>c \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^t>c_0\\ \delta, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}=c \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^t=c_0\\ 0, & \text{αν } \dfrac{L_1}{L_0}<c \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^t<c_0\end{cases} ,$$
όπου η σταθερά:
$$c_0=c\left(\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right)^n \ ,$$
για $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^T>c_0\right)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^T=c_0\right),$$
δηλαδή:
$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(T\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)>\ln c_0\right)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}\left(T\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)=\ln c_0\right) \ .$$
Έστω $\theta_1>\theta_0$, τότε: $\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)<0$ με συνέπεια:
$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}(T<c^*)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c^*) \ ,$$
όπου η σταθερά c^* δίνεται από τον τύπο:
$$c^*=\frac{\ln c_0}{\ln\left(\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)} \ .$$
Σύμφωνα με την άσκηση 1.1. (σελ. 45), αν οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν γεωμετρική κατανομή, τότε η τ.μ $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με n επιτυχίες. Άρα η σταθερά c^* υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c^*-1)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c^*) ,$$
δηλαδή:
$$\mathrm{a}=\sum_{t=n}^{c^*-1}\binom{t-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{t-n}+\delta\binom{c^*-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{c^*-n}, \qquad c^*>n \ .$$
Επομένως, για $\theta_1>\theta_0$ η Ι.Ε. είναι:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } t<c^*\\ \delta, & \text{αν } t=c^*\\ 0, & \text{αν } t>c^*\end{cases} .$$
Το κρίσιμο σημείο c^* είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι:
$$\sum_{t=n}^{c^*-1}\binom{t-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{t-n}\le \mathrm{a} \ .$$
Έστω $\theta_1<\theta_0$, τότε: $\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)>0$ με συνέπεια:
$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}(T>c^*)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c^*)=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c^*)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c^*) \ ,$$
δηλαδή:
$$1-\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}(T\le c^*)-\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(T=c^*)=\sum_{t=n}^{c^*}\binom{t-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{t-n}-\delta\binom{c^*-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{c^*-n} \ .$$
Άρα για $\theta_1<\theta_0$ η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } t>c^* \\ \delta, & \text{αν } t=c^* \\ 0, & \text{αν } t<c^*\end{cases}.$$

Το κρίσιμο σημείο c^* είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\sum_{t=n}^{c^*}\binom{t-1}{n-1}\theta_0^n(1-\theta_0)^{t-n}\geq 1-\mathrm{a}\ .$$

Άσκηση 2.8

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ από κατανομή Weibull με σ.π.π. $f(x;\theta)=\frac{c}{\theta}x^{c-1}\exp\left\{-\frac{x^c}{\theta}\right\}$, $x>0$, $\theta>0$. Σε στάθμη σημαντικότητας a να βρεθεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta=\theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta=\theta_1$, όπου $\theta_1>\theta_0$. Να βρεθεί η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{c}{\theta}x_i^{c-1}\exp\left\{-\frac{x_i^c}{\theta}\right\}=\left(\frac{c}{\theta}\right)^n\prod_{i=1}^n x_i^{c-1}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^c\right\}.$$

Άρα:

$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\exp\left\{-\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^n x_i^c\right\}.$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{L_1}{L_0}=n\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}+\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^n x_i^c\ .$$

Η Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}>c\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_i^c>c^* \\ 0, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}\leq c\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_i^c\leq c^*\end{cases},$$

όπου η σταθερά:

$$c^*=\frac{\theta_1\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\left(c-\ \ln\frac{\theta_0}{\theta_1}\right),$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i^c>c^*\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n X_i^c>\frac{2c^*}{\theta_0}\right),$$

Στην άσκηση 1.4 (σελ. 46) έχει αποδειχθεί ότι η τ.μ. $\frac{2}{\theta}X_i^c$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}_2^2$ και ότι η τ.μ $\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i$, όπου οι τ.μ. $X_1,X_2,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες, ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$. Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\theta=\theta_0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{2c^*}{\theta_0}=\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\mathrm{a}}^2\Leftrightarrow c^*=\frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\mathrm{a}}^2\ .$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης είναι:

$$\gamma=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^c>c^*\right)=\mathrm{P}_{\theta_1}\left(\frac{2}{\theta_1}\sum_{i=1}^n X_i^c>\frac{\theta_0}{\theta_1}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\mathrm{a}}^2\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma = \int_{\frac{\theta_0}{\theta_1}\chi^2_{2n;\mathrm{a}}}^{+\infty} g_{2n}(x)dx \ ,$$

όπου $g_{2n}(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\chi}^2_{2n}$.

Άσκηση 2.9

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από ομοιόμορφη κατανομή $U(a,\theta)$. Να βρεθεί ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τις υποθέσεις $\mathrm{H_0}$: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H_1}$: $\theta = \theta_1$ και να αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητη από τη στάθμης σημαντικότητας a.

Λύση

Η σ.π.π. δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta - a} I_{(a,\theta)}(x), \qquad x \ \in (a,\theta), \qquad a < \theta < +\infty \, .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta - a} I_{(a,\theta)}(x_i) = \frac{1}{(\theta - a)^n} I_{(a,+\infty)}(x_{(1)}) \cdot I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)}) \ ,$$

όπου για $i = 1,2,\dots,n$ η συνάρτηση $I_{(a,\theta)}(x_i)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση, δηλαδή

$$I_{(a,\theta)}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_i \ \in \ (a,\theta) \\ 0, & \text{αν } x_i \ \notin \ (a,\theta) \end{cases} .$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$I_{(a,\theta)}(x_1) \cdot I_{(a,\theta)}(x_2) \cdot \cdots \cdot I_{(a,\theta)}(x_n) = I_{(a,+\infty)}(x_{(1)}) \cdot I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)}) \ .$$

Ας υποτεθεί ότι $\theta_1 < \theta_0$, τότε ο λόγος πιθανοφανειών γράφεται ως:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0 - \alpha}{\theta_1 - \alpha}\right)^n \frac{I_{(-\infty,\theta_1)}(x_{(n)})}{I_{(-\infty,\theta_0)}(x_{(n)})} \ .$$

Διαπιστώνεται ότι, αν $x_{(n)} \geq \theta_1$, τότε $\frac{L_1}{L_0} = 0$ και γίνεται δεκτή η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta = \theta_0$, ενώ, αν $x_{(n)} < \theta_1$, τότε $\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0-\alpha}{\theta_1-\alpha}\right)^n$ και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται. Επομένως, η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_{(n)} < \theta_1 \\ 0, & \text{αν } x_{(n)} \geq \theta_1 \end{cases} .$$

Η ισχύς του ελέγχου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}} \ \in \ \mathrm{R} \mid \theta = \theta_1\right) = \mathrm{P}\left(X_{(n)} \leq \theta_1 \mid \ \theta = \theta_1\right) = \int_{\alpha}^{\theta_1} f_n(w)dw = 1 \ ,$$

όπου:

$$f_n(w) = n\frac{(w-a)^{n-1}}{(\theta_1 - a)^n} \ ,$$

είναι η σ.π.π. της τ.μ. $W = X_{(n)}$.

Ας υποτεθεί ότι $\theta_1 > \theta_0$, τότε ο λόγος πιθανοφανειών γράφεται ως:

$$\frac{L_0}{L_1} = \left(\frac{\theta_1 - \alpha}{\theta_0 - \alpha}\right)^n \frac{I_{(-\infty,\theta_0)}(x_{(n)})}{I_{(-\infty,\theta_1)}(x_{(n)})} \ .$$

Διαπιστώνεται ότι, αν $x_{(n)} > \theta_0$, τότε $\frac{L_0}{L_1} = 0$ και η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta = \theta_0$ απορρίπτεται, ενώ, αν $x_{(n)} < \theta_0$, τότε $\frac{L_0}{L_1} = \left(\frac{\theta_1-\alpha}{\theta_0-\alpha}\right)^n$ και η μηδενική υπόθεση δε μπορεί να απορριφθεί. Επομένως, η Ι.Ε. είναι:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \theta_0 \leq x_{(n)} < \theta_1 \\ 0, & \text{αν } x_{(n)} < \theta_0 \end{cases} .$$

Η ισχύς του ελέγχου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = \int_{\theta_0}^{\theta_1} n \frac{(w-a)^{n-1}}{(\theta_1 - a)^n} dw = 1 - \left(\frac{\theta_0 - a}{\theta_1 - a}\right)^n \ .$$

Διαπιστώνεται, από τις σχέσεις που δίνουν τις Ι.Ε. για $\theta_1 > \theta_0$, αλλά και για $\theta_1 < \theta_0$ είναι προφανές ότι η Ι.Ε. είναι ανεξάρτητη από τη στάθμη σημαντικότητας a.

Άσκηση 2.10

Η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος μιας μηχανής έχει οριστεί από το εργοστάσιο παραγωγής ότι είναι $\boldsymbol{t_0}$ ώρες. Ζητείται να ελεγχθεί αν η αξιοπιστία του εξαρτήματος είναι $\boldsymbol{R(t_0) = 0.99}$ ή $\boldsymbol{R(t_0) = 0.90}$. Να διερευνηθούν οι διάφοροι τρόποι του σχεδιασμού ενός πειράματος για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων. Είναι γνωστό ότι η διάρκεια ζωής $\boldsymbol{T}$ ενός εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με σ.π.π. $\boldsymbol{f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0}$.

Λύση

Για να είναι εφικτός ο έλεγχος των υποθέσεων πρέπει να υπάρχει ένα δείγμα από εξαρτήματα, δηλαδή απαιτείται να γίνει κάποιο πείραμα. Προφανώς, υπάρχουν και διαφορετικοί τρόποι, που θα μπορούσε να σκεφτεί κάποιος για το πώς θα πραγματοποιήσει το συγκεκριμένο πείραμα. Για την άσκηση θα αναφερθούν τρεις διαφορετικοί σχεδιασμοί του πειράματος.

1ος Σχεδιασμός.

Ένας ερευνητής λαμβάνει ένα δείγμα n εξαρτημάτων και τα χρησιμοποιεί t_0 ώρες. Έστω ότι k από αυτά θα λειτουργήσουν χρόνο μικρότερο από t_0 ώρες, με συνέπεια τα υπόλοιπα $n-k$ να λειτουργήσουν χρόνο μεγαλύτερο από t_0 ώρες. Στο πείραμα αυτό δε γίνεται μέτρηση του χρόνου λειτουργίας των εξαρτημάτων, αλλά ελέγχεται, αν σε κάθε δοκιμή το εξάρτημα λειτούργησε για χρόνο t μικρότερο του t_0 (αποτυχία) ή χρόνο μεγλύτερο του t_0 (επιτυχία), το οποίο αποτελεί μια διαδικασία Bernoulli με:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } \ t < t_0 \\ 1, & \text{αν } \ t \geq t_0 \end{cases}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \ .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της αξιοπιστίας $R(t_0) = P(T \geq t_0)$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = \mathrm{P}(\,T \geq t_0) = R(t_0) \ ,$$

$$\mathrm{P}(X_i = 0) = \mathrm{P}(\,T < t_0) = 1 - R(t_0) \ .$$

Ο έλεγχος των υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0\!: \quad \theta = R(t_0) = 0.9 \ ,$$

$$\mathrm{H}_1\!: \quad \theta = R(t_0) = 0.99 \ .$$

Η σ.π. της κατανομής Bernoulli $B(1,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \qquad x = 0,1, \qquad 0 < \theta < 1 \ .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} [\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}] \overset{\sum_{i=1}^{n} x_i = w}{\cong} \theta^w (1-\theta)^{n-w} \ .$$

Επομένως:

$$L_1 = \theta_1^w (1-\theta_1)^{n-w}, \qquad L_0 = \theta_0^w (1-\theta_0)^{n-w}$$

και:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^w \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{L_1}{L_0} = n\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} + w\ln\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \ .$$

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}>c \quad\Leftrightarrow\quad w>c_0\\ \delta, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}=c \quad\Leftrightarrow\quad w=c_0\\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}<c \quad\Leftrightarrow\quad w<c_0\end{cases}.$$

όπου

$$c_0=\frac{c-n\ln\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}{\ln\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}}\ .$$

Κατά τα γνωστά, η σταθερά c_0 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(W>c_0)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(W=c_0)=1-\mathrm{P}_{\theta_0}(W\leq c_0)+\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(W=c_0).$$

με συνέπεια:

$$1-\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}(W\leq c_0)-\delta\mathrm{P}_{\theta_0}(W=c_0).$$

Οι τ.μ. $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομή Bernoulli $\boldsymbol{B(1,\theta)}$. Επομένως, σύμφωνα με την άσκηση 1.1 (σελ. 45), η τ.μ. $\boldsymbol{W=\sum_{i=1}^{n}X_i}$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{B(n,\theta)}$. Η τ.μ. $\boldsymbol{W}$ εκφράζει το πλήθος των εξαρτημάτων που θα λειτουργήσουν περισσότερο από $\boldsymbol{t_0}$ ώρες. Η σταθερά $\boldsymbol{c_0}$ είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός για τον οποίο ισχύει ότι: $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta_0}}(\boldsymbol{W\leq c_0})\geq \mathbf{1-a}$ και υπολογίζεται από τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής (παράρτημα Β, πίνακας Β6, σελ. 221). Για παράδειγμα, αν $\mathbf{a=0.05}$ και $\boldsymbol{n=10}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{c_0=10}$, για $\mathbf{a=0.10}$ και $\boldsymbol{n=20}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{c_0=20}$, ενώ για $\mathbf{a=0.05}$ και $\boldsymbol{n=25}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{c_0=25}$. Επομένως, αν ένα εξάρτημα είναι ελαττωματικό, τότε $\boldsymbol{T\leq c_0}$ και η μηδενική υπόθεση $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{R(t_0)=0.9}$ δε μπορεί να απορριφθεί

2ος Σχεδιασμός.

Ο 2ος σχεδιασμός μπορεί να είναι το μοντέλο μιας αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι προκαθορισμένο το μέγεθος του δείγματος, αλλά το πλήθος των εξαρτημάτων που θα λειτουργήσουν χρόνο περισσότερο (ή λιγότερο) από t_0 ώρες. Η τ.μ. X εκφράζει το πλήθος των δοκιμών μιας διαδικασίας Bernoulli, μέχρι να βρεθούν k εξαρτήματα με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη (ή μικρότερη) από t_0 ώρες. Ο έλεγχος των υποθέσεων δίνεται στον 1ο σχεδιασμό και παραμένει ο ίδιος. Αν υποτεθεί ότι η διαδικασία σταματά, όταν υπάρξει η πρώτη αποτυχία, δηλαδή μόλις εμφανιστεί εξάρτημα με διάρκεια ζωής μικρότερη από t_0 ώρες, τότε η τ.μ. X ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με $k=1$, δηλαδή γεωμετρική κατανομή. Η σ.π. της γεωμετρικής κατανομής είναι:

$$f(x;\theta)=(1-\theta)\theta^{x-1}=\big(1-R(t_0)\big)R(t_0)^{x-1},\qquad x=1,2,\ldots$$

Προφανώς:

$$L_1=(1-\theta_1)\theta_1^{x-1},\qquad L_0=(1-\theta_0)\theta_0^{x-1}$$

και:

$$\frac{L_1}{L_0}=\frac{(1-\theta_1)\theta_1^{x-1}}{(1-\theta_0)\theta_0^{x-1}}\ .$$

Λογαριθμίζοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{L_1}{L_0}=\ln\frac{(1-\theta_1)\theta_0}{(1-\theta_0)\theta_1}+x\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}\ .$$

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}>c \quad\Leftrightarrow\quad x>c_0\\ \delta, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}=c \quad\Leftrightarrow\quad x=c_0\\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0}<c \quad\Leftrightarrow\quad x<c_0\end{cases},$$

όπου η σταθερά:

$$c_0 = \frac{c - \ln\frac{(1-\theta_1)\theta_0}{(1-\theta_0)\theta_1}}{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}}$$

υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}(X > c_0) + \delta\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_0) = 1 - \mathrm{P}_{\theta_0}(X \leq c_0) + \delta\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_0) \ .$$

με συνέπεια:

$$1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}_{\theta_0}(X \leq c_0) - \delta\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_0) \ ,$$

όπου:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta_0}}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{c_0}) = \sum_{x=1}^{c_0}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}^{x-1} = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta}^{c_0}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{1}-\boldsymbol{\theta}^{c_0} \ .$$

Η σταθερά $\boldsymbol{c_0}$ είναι η μικρότερη ακέραια τιμή για την οποία ισχύει ότι: $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta_0}}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{c_0}) \geq \mathbf{1} - \mathbf{a}$. Επομένως:

$$\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta}^{c_0} \geq \mathbf{1}-\mathbf{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{c_0}\,\mathbf{ln}(\boldsymbol{\theta_0}) \leq \mathbf{ln\,a} \Leftrightarrow \boldsymbol{c_0} \geq \frac{\mathbf{ln\,a}}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{\theta_0})}.$$

Για $\mathbf{a} = \mathbf{0.05}$ και $\boldsymbol{\theta_0} = \mathbf{0.90}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{c_0} = \mathbf{28.43}$, δηλαδή $\boldsymbol{c_0} = \mathbf{29}$. Αυτό σημαίνει ότι, αν η πρώτη αποτυχία συμβεί σε λιγότερες από $\mathbf{29}$ δοκιμές, τότε η μηδενική υπόθεση $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t_0}) = \mathbf{0.9}$ δε μπορεί να απορριφθεί, ενώ, αν η πρώτη αποτυχία συμβεί σε περισσότερες από $\mathbf{29}$ δοκιμές, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και γίνεται δεκτή η εναλλακτική $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t_0}) = \mathbf{0.99}$.

<u>3ος Σχεδιασμός</u>.

Στον 3ο σχεδιασμό λαμβάνεται υπόψη η διάρκεια ζωής του κάθε εξαρτήματος, δηλαδή το τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{T}}' = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με σ.π.π.:

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, \qquad t > 0 \ .$$

Η αξιοπιστία είναι $R(t_0) = P(T \geq t_0) = 1 - P(T < t_0) = e^{-\lambda t_0}$, δηλαδή: $\lambda = -\frac{\ln R(t_0)}{t_0}$.

Ο έλεγχος των υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta = R(t_0) = 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 = -\frac{\ln 0.90}{t_0} \ ,$$

$$\mathrm{H}_1: \quad \theta = R(t_0) = 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{\ln 0.99}{t_0} \ ,$$

όπου $\lambda_0 > \lambda_1$. Η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{t}};\lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left[\lambda e^{-\lambda t_i}\right] = \lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i\right\} \ ,$$

με συνέπεια:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \exp\left\{(\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^{n} t_i\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{L_1}{L_0} = n\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)\sum_{i=1}^{n} t_i \ .$$

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{t}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0} > c \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} t_i > c_0 \\ 0, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0} = c \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} t_i \leq c_0 \end{cases} \ ,$$

όπου η σταθερά:

$$c_0 = \frac{c - n\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{(\lambda_0 - \lambda_1)}$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\lambda_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{P}_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i > c_0\right) = \mathrm{P}\left(2\lambda_0\sum_{i=1}^{n} T_i > 2\lambda_0 c_0\right) \Rightarrow 2\lambda_0 c_0 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\mathrm{a}} \Rightarrow c_0 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\mathrm{a}}}{2\lambda_0} \ ,$$

διότι, σύμφωνα με την άσκηση 1.2 (σελ. 46), η τ.μ. T_i ακολουθεί την κατανομή Γάμμα $G(1, \lambda)$, άρα η τ.μ. $Z_i = 2\lambda_0 T_i$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2$ και η τ.μ. $Z = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} T_i$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$.

Άσκηση 2.11

Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N(\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}}, A)$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^k$ και A είναι ένας $k \times k$ συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας. Σε στάθμη σημαντικότητας a να ελεγχθούν οι υποθέσεις $\mathrm{H_0}$: $\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H_1}$: $\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$.

Λύση

Η σ.π.π για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N(\underset{\sim}{\theta}, \boldsymbol{A})$ είναι:

$$f\left(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{(\det\boldsymbol{A})^{-1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})'\boldsymbol{A}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})\right\} .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για ένα δείγμα μεγέθους n είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{(\det\boldsymbol{A})^{-n/2}}{(2\pi)^{nk/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i - \underset{\sim}{\theta})'\boldsymbol{A}^{-1}(\underset{\sim}{x}_i - \underset{\sim}{\theta})\right\} .$$

Άρα:

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i - \underset{\sim}{\mu})'\boldsymbol{A}^{-1}(\underset{\sim}{x}_i - \underset{\sim}{\mu}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{x}_i{}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{x}_i\right\} \Rightarrow \ln\frac{L_1}{L_0} = \sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{x}_i) - \frac{n}{2}\underset{\sim}{\mu}'A^{-1}\underset{\sim}{\mu} .$$

Η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} > c \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{x}_i\right) > c^* \\ 0, & \text{αν } \ln\dfrac{L_1}{L_0} \leq c \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{x}_i\right) \leq c^* \end{cases} ,$$

όπου η σταθερά:

$$c^* = c + \frac{n}{2}\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu} ,$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{X}_i) > c^* \;\middle|\; \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{0}\right) .$$

Η τ.μ. $\underset{\sim}{X}_i$ ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{\theta}, \boldsymbol{A})$, με συνέπεια η τ.μ. $\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{X}_i$ να ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu})$ και για $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{0}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu})$. Άρα η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{X}_i)$ ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{0}, n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu})$ [Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος I, Εκτιμητική*, θεώρημα Α.3.2 (σελ. 68)]. Επομένως:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{X}_i)}{\sqrt{n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu}}} > \frac{c^*}{\sqrt{n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c^*}{\sqrt{n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu}}}\right) \Rightarrow \frac{c^*}{\sqrt{n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu}}} = z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c^* = z_{\mathrm{a}}\sqrt{n\underset{\sim}{\mu}'\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim}{\mu}} .$$

Άσκηση 2.12

Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N(\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}, A)$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^k$: γνωστό και A είναι ένας $k \times k$ συμμετρικός θετικά ορισμένος άγνωστος πίνακας. Σε στάθμη σημαντικότητας a

να ελεγχθούν οι υποθέσεις H_0: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$ και να βρεθεί η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

Λύση

Η σ.π.π για την πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N(\underset{\sim}{\mu},\boldsymbol{A})$ είναι:

$$f\left(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta}\right)=\frac{(\det\boldsymbol{A})^{-1/2}}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\boldsymbol{A}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right\}.$$

Ο λόγος πιθανοφανειών για το δείγμα είναι:

$$\frac{L_1}{L_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{nk/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})'\frac{\boldsymbol{I}}{2}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})'\boldsymbol{I}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})\right\}.$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln\frac{L_1}{L_0}=-\frac{nk}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu}).$$

Η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}>c \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu}\right)'\left(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu}\right)>c^*\\ 0, & \text{αν } \ln\frac{L_1}{L_0}\le c \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{x}_i-\underset{\sim}{\mu})\le c^*\end{cases},$$

όπου η σταθερά:

$$c^*=4\left(c+\frac{nk}{2}\ln 2\right),$$

υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a=E\left(\varphi(\underset{\sim}{X})\;\middle|\;H_0\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu}\right)'\left(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu}\right)>c^*\;\middle|\;H_0\right).$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0 η τ.μ. $\underset{\sim}{X}_i$ ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{\mu},\boldsymbol{I})$, με συνέπεια η τ.μ. $(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ να ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{0},\boldsymbol{I})$. Άρα η τετραγωνική μορφή $(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}_k^2}$ και η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}_{nk}^2}$ [Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*, θεώρημα Α.3.2 (σελ. 68)]. Επομένως:

$$c^*=\mathcal{X}_{nk;a}^2.$$

Η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma=E\left(\varphi(\underset{\sim}{X})\;\middle|\;H_1\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'\left(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu}\right)>\boldsymbol{\mathcal{X}_{nk;a}^2}\;\middle|\;H_1\right).$$

Κάτω από την εναλλακτική υπόθεση H_1, η τ.μ. $\underset{\sim}{X}_i$ ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{\mu},2\boldsymbol{I})$, με συνέπεια η τ.μ. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ να ακολουθεί κατανομή $N(\underset{\sim}{0},\boldsymbol{I})$. Άρα η τετραγωνική μορφή $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}_k^2}$ και η τ.μ. $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}_{nk}^2}$ [Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*, θεώρημα Α.3.2 (σελ. 68)]. Συνεπώς:

$$\gamma=E\left(\varphi(\underset{\sim}{X})\;\middle|\;H_1\right)=P\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{X}_i-\underset{\sim}{\mu})>\frac{1}{2}\mathcal{X}_{nk;a}^2\right)\quad\Leftrightarrow\quad\gamma=1-\int_0^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}_{nk;a}^2}}g_{nk}(y)dy\quad,$$

όπου η συνάρτηση $\boldsymbol{g_{nk}(y)}$ είναι η σ.π.π. της $\boldsymbol{\mathcal{X}_{nk}^2}$ κατανομής.

Άσκηση 2.13

Να αποδειχθεί ότι, αν ο λόγος πιθανοφανειών είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος από στατιστική συνάρτηση, τότε οποιαδήποτε ελεγχοσυνάρτηση $\varphi^*(\underset{\sim}{x})$ που ορίζεται αυθαίρετα σ' ένα σύνολο της μορφής $S_1 = \left\{\underset{\sim}{x} \in S: \frac{L_1}{L_0} = k\right\}$, όπου S είναι ο δειγματοχώρος, είναι ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta = \theta_1$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Έστω η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{x})$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \varphi^*\left(\underset{\sim}{x}\right), \qquad \forall\ \underset{\sim}{x} \in S_2 = \left\{\underset{\sim}{x} \in S: \frac{L_1}{L_0} \neq k\right\}, \quad S_1 \cup S_2 = S .$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι, αν $E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) = E_{\theta_0}\varphi^*(\underset{\sim}{X}) = a$, τότε $E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{X}) \leq E_{\theta_1}\varphi^*(\underset{\sim}{X})$.

Ισχύει ότι:

$$E_{\theta_0}\varphi^*\left(\underset{\sim}{X}\right) - E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = 0 \Leftrightarrow E_{\theta_0}\left(\varphi^*\left(\underset{\sim}{X}\right) - \varphi\left(\underset{\sim}{X}\right)\right) = \int_S \left(\varphi^*\left(\underset{\sim}{x}\right) - \varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)\right) L_0 d\underset{\sim}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = \int_{S_1} \left(\varphi^*(\underset{\sim}{x}) - \varphi(\underset{\sim}{x})\right) L_0 d\underset{\sim}{x} + \int_{S_2} \left(\varphi^*(\underset{\sim}{x}) - \varphi(\underset{\sim}{x})\right) L_0 d\underset{\sim}{x} = \int_{S_1} \left(\varphi^*(\underset{\sim}{x}) - \varphi(\underset{\sim}{x})\right) L_0 d\underset{\sim}{x} \Leftrightarrow$$

$$0 = \int_{S_1} \left(\varphi^*(\underset{\sim}{x}) - \varphi(\underset{\sim}{x})\right) \frac{L_1}{k} d\underset{\sim}{x} \Leftrightarrow 0 = \frac{L_1}{k} E_{\theta_1}\left(\varphi^*(\underset{\sim}{X}) - \varphi(\underset{\sim}{X})\right) \Leftrightarrow 0 = E_{\theta_1}\varphi^*(\underset{\sim}{X}) - E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{X}) \Leftrightarrow$$

$$E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = E_{\theta_1}\varphi^*\left(\underset{\sim}{X}\right) .$$

Άσκηση 2.14

Έστω ένας πληθυσμός με θ άτομα, αριθμημένα από 1 έως θ. Από τον πληθυσμό αυτό λαμβάνεται ένα δείγμα μεγέθους n με επανάθεση, ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός του μεγέθους θ του πληθυσμού. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο θ. Επιπλέον, σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$.

Λύση

Η συνάρτηση κατανομής για την τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad x = 1,2,\dots,\theta .$$

Η συνάρτηση κατανομής για το δείγμα είναι:

$$f\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = \frac{1}{\theta^n} I_{(-\infty,\theta]}\left(x_{(n)}\right) I_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) .$$

Συνεπώς, η επαρκής στ.σ. για την παράμετρο θ είναι η $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)}$.

Ο λόγος πιθανοφανειών είναι:

$$\frac{L_0}{L_1} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \frac{I_{(-\infty,\theta_0]}(x_{(n)})}{I_{(-\infty,\theta_1]}(x_{(n)})} = \begin{cases} 0, & \text{αν } x_{(n)} > \theta_0 \\ \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n, & \text{αν } x_{(n)} \leq \theta_0 \end{cases} .$$

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{L_0}{L_1} < c \\ 0, & \text{αν } \dfrac{L_0}{L_1} \geq c \end{cases} ,$$

με συνέπεια:

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\underset{\sim}{\mathbf{x}}\right)=\begin{cases}\mathbf{1}, & \mathbf{\alpha\nu}\ \ \boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{n})}>\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{0}}\\ \mathbf{0}, & \mathbf{\alpha\nu}\ \ \boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{n})}\leq\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{0}}\end{cases}.$$

Παρατηρείται ότι η ελεγχοσυνάρτηση είναι ανεξάρτητη της σ.σ. **a**.

Κεφάλαιο 3 Έλεγχος Σύνθετων Υποθέσεων

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η έννοια της ιδιότητας του μονότονου λόγου πιθανοφανειών, θεωρήματα που σχετίζονται με αυτήν, καθώς και θεωρήματα που αφορούν ομοιόμορφα ισχυρότατες ελεγχοσυναρτήσεις. Το κεφάλαιο συμπληρώνεται με παραδείγματα και ασκήσεις.

Προαπαιτούμενη γνώση
Απαραίτητες γνώσεις για την κατανόηση των εννοιών του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι τα κεφάλαια 1 και 2 του παρόντος συγγράμματος. Μερικά βιβλία που περιέχουν χρήσιμη θεωρία, κατανοητά παραδείγματα και πλήθος ασκήσεων για εξάσκηση είναι τα βιβλία: «Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics» των P. J. Bickel και K. A. Doksum (σελ. 102), «Statistics for Biologists» του R. Campell (σελ. 102), «Statistics: The exploration and analysis of data» των J. Devore και R. Peck (σελ. 102), «Statistics: An Introduction» του D. A. Fraser (σελ. 102), «Statistics, volume 1» των L. W. Hays και L. R. Winkler (σελ. 102), «Introduction to mathematical statistics» των R. V. Hogg, J. W. McKean και A. T. Craig, (σελ. 102), «Probability and Statistical Inference» των R. V. Hogg και E.A. Tanise, (σελ. 102), «The Advanced theory of Statistics, volume II, 3rd edition» των M. G. Kendall και A. Stuart (σελ. 102), «Introduction to Probability Theory and Statistical Inference» του J. Larson, (σελ. 102), «Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edition» των A. Mood, F. Graybill και D. Boes (σελ. 102), «Μαθηματική Στατιστική, 2η Έκδοση» Μαθηματική Στατιστική, 2η Έκδοση» των Τ. Παπαϊωάννου και Κ. Φερεντίνου (σελ. 102) και «Introducing Statistics» των G. Upton και I. Cook (σελ. 102)

3.1. Ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών

Η περίπτωση του ελέγχου απλών υποθέσεων, η οποία μελετήθηκε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ενδιαφέρουσα από θεωρητική, κυρίως, άποψη. Συνήθως, καταστάσεις, όπως αυτές που αναφέρθηκαν, δεν είναι συχνές, αφού οι συνήθεις οικογένειες κατανομών, τις περισσότερες φορές, εξαρτώνται από μια ή περισσότερες συνεχείς παραμέτρους. Στην απλούστερη περίπτωση, που η κατανομή εξαρτάται από μία μόνο παράμετρο θ, η αρχική υπόθεση είναι μονόπλευρη. Για παράδειγμα, έστω H_0: $\theta \leq \theta_0$. Στη γενική περίπτωση η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση της H_0 έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta > \theta_0$ εξαρτάται από την παράμετρο θ και συνεπώς δεν υπάρχει Ι.Ε. Όμως, αν ικανοποιείται μια επιπλέον συνθήκη, υπάρχει Ο.Ι.Ε. Αυτή η επιπλέον συνθήκη είναι η ιδιότητα του **μονότονου λόγου πιθανοφανειών** (Μ.Λ.Π.) (monotone likelihood ratio).

Ορισμός 3.1
Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ τ.δ. από την οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$ της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ανεξάρτητο από άγνωστες παραμέτρους. Η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του **μονότονου λόγου πιθανοφανειών**, αν υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ τέτοια, ώστε για $\theta < \theta'$ οι κατανομές $f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ και $f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta')$ να είναι διακεκριμένες και ο λόγος

$$\frac{f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta')}{f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)}$$

να είναι μια αύξουσα συνάρτηση της $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$.

Στη βιβλιογραφία υπάρχει και ο παρακάτω ορισμός του Μ.Λ.Π., ο οποίος δε χρησιμοποιείται στο παρόν σύγγραμμα.

Ορισμός 3.2
Έστω $\underset{\sim}{X}$ τ.δ. από την οικογένεια κατανομών $f(\underset{\sim}{x};\theta)$, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Η οικογένεια κατανομών $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του **μονότονου λόγου πιθανοφανειών** αν υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$ τέτοια, ώστε για $\theta < \theta'$ οι κατανομές $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ και $f(\underset{\sim}{x};\theta')$ να είναι διακεκριμένες και ο λόγος:

$$\frac{f(\underset{\sim}{x};\theta')}{f(\underset{\sim}{x};\theta)}$$

να είναι μια μονότονη συνάρτηση της $T(\underset{\sim}{x})$.

Παράδειγμα 3.1

Δίνεται η οικογένεια κατανομών $\boldsymbol{f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}}$, $\boldsymbol{\theta > 0}$. Να αποδειχθεί ότι η $\boldsymbol{f(x;\theta)}$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Έστω $\theta < \theta'$, τότε:

$$f\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}\right\} \neq \left(\frac{1}{\theta'}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta'}\right\} = f\left(\underset{\sim}{x};\theta'\right) .$$

Επίσης, ο λόγος:

$$\frac{f(\underset{\sim}{x};\theta')}{f(\underset{\sim}{x};\theta)} = \left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta}\right)\sum_{i=1}^n x_i\right\} ,$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Επομένως, η οικογένεια κατανομών $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

Θεώρημα 3.1
Αν η μονοπαραμετρική κατανομή $f(x;\theta)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και είναι της μορφής:

$$f(x;\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x),$$

όπου $h(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $c(\theta) > 0$, $\forall\, \theta \in \Omega$, τότε η $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x)$, αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, και ως προς τη συνάρτηση $-T(x)$, αν η $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα. Επίσης, η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^n T(x_i)$, αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, και ως προς τη συνάρτηση $-T(\underset{\sim}{x}) = -\sum_{i=1}^n T(x_i)$, αν η $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα, αντίστοιχα.
Απόδειξη.
Έστω ότι η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα και $\theta < \theta'$, τότε:

$$f(x;\theta) - f(x;\theta') = h(x)[c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\} - c(\theta')\exp\{Q(\theta')T(x)\}] \neq 0 .$$

και:

$$\frac{f(x;\theta')}{f(x;\theta)} = \frac{c(\theta')}{c(\theta)}\exp\{T(x)[Q(\theta') - Q(\theta)]\} .$$

Αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα έπεται ότι, για $\theta < \theta'$, ισχύει:

$$Q(\theta') - Q(\theta) > 0.$$

Συνεπώς, ο λόγος $\frac{f(x;\theta')}{f(x;\theta)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση της $T(x)$.

Έστω ότι η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα και $\theta < \theta'$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, $Q(\theta') - Q(\theta) < 0$ και ο λόγος $\frac{f(x;\theta')}{f(x;\theta)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση της $-T(x)$.

Επιπλέον, η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ γράφεται:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \left(c(\theta)\right)^n \exp\left\{Q(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right\}\prod_{i=1}^{n} h(x_i)\,.$$

Θα δοθεί η απόδειξη μόνο για την περίπτωση που η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα. Τότε, για $\theta < \theta'$ ισχύει:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) - L\left(\underset{\sim}{x};\theta'\right) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i)\left[\left(c(\theta)\right)^n \exp\left\{Q(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right\} - \left(c(\theta')\right)^n \exp\left\{Q(\theta')\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right\}\right] \neq 0\,.$$

και:

$$\frac{L\left(\underset{\sim}{x};\theta'\right)}{L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right)} = \left(\frac{c(\theta')}{c(\theta)}\right)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\left[Q(\theta') - Q(\theta)\right]\right\}$$

Επειδή η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, για $\theta < \theta'$ ισχύει $Q(\theta') - Q(\theta) > 0$, με συνέπεια ο λόγος $\frac{L\left(\underset{\sim}{x};\theta'\right)}{L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right)}$ να είναι αύξουσα συνάρτηση της $\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$.

Πόρισμα 3.1

Να δειχθεί ότι, αν η κατανομή $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x)$ και ανήκει στην Ε.Ο.Κ., τότε η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει επίσης την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση:

$$T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i).$$

Απόδειξη.

Έστω ότι η $f(x;\theta)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. ή οικογένεια κατανομών Koopman-Darmois (σελ.102, 102), τότε, για την πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ ισχύει:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = \left(c(\theta)\right)^n \exp\left\{Q(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right\}\prod_{i=1}^{n} h(x_i)\,.$$

Για $\theta < \theta'$ ο λόγος:

$$\frac{L(\underset{\sim}{x};\theta')}{L(\underset{\sim}{x};\theta)} = \left(\frac{c(\theta')}{c(\theta)}\right)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\left[Q(\theta') - Q(\theta)\right]\right\}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του $\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, αν η $Q(\theta)$ είναι αύξουσα ή του $-\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, αν η $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα.

Παρατήρηση 3.1

Από το θεώρημα 3.1 (σελ. 87) και το πόρισμα 3.1 (σελ. 88) προκύπτει ότι οι παρακάτω οικογένειες κατανομών έχουν την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T\left(\underset{\sim}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

1. Διωνυμική, $B(n,\theta)$.
2. Poisson, $P(\theta)$.
3. Κανονική, $N(\theta,\sigma^2)$.

Παράδειγμα 3.2

Από μια παρτίδα N αντικειμένων ενός προϊόντος, λαμβάνεται, με τυχαίο τρόπο, ένα δείγμα μεγέθους n. Ο συνολικός αριθμός των ελαττωματικών αντικειμένων ισούται με $N\theta$, $N\theta \in \mathbb{Z}$, $\theta \in (0,1)$. Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών αντικειμένων στο δείγμα των n αντικειμένων. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή. Να εξετασθεί αν η υπεργεωμετρική κατανομή έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Η σ.π. της υπεργεωμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}_{\theta}(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{N\theta}{x}\binom{N - N\theta}{n - x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, \dots, n \ .$$

Έστω ο λόγος:

$$\frac{\mathrm{P}_{\theta'}(x)}{\mathrm{P}_{\theta}(x)}, \qquad \theta' > \theta \ .$$

Κάνοντας κάποιες αλγεβρικές πράξεις, αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\mathrm{P}_{\theta'}(x)}{\mathrm{P}_{\theta}(x)} < \frac{\mathrm{P}_{\theta'}(x+1)}{\mathrm{P}_{\theta}(x+1)} \ ,$$

με συνέπεια, ο λόγος $\frac{\mathrm{P}_{\theta'}(x)}{\mathrm{P}_{\theta}(x)}$ να είναι αύξουσα συνάρτηση της $T(x) = x$. Άρα η οικογένεια υπεργεωμετρικών κατανομών έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x) = x$.

3.2. Ομοιόμορφα Ισχυρότατες Ελεγχοσυναρτήσεις

Στη συνέχεια θα μελετηθούν οι έλεγχοι σύνθετων υποθέσεων οι οποίοι έχουν τη μορφή:

1. H_0: $\theta \leq \theta_0$ ως προς την εναλλακτική H_1: $\theta > \theta_0$.
2. H_0: $\theta \geq \theta_0$ ως προς την εναλλακτική H_1: $\theta < \theta_0$.
3. H_0: $\theta \leq \theta_1$ ή $\theta \geq \theta_2$ ως προς την εναλλακτική H_1: $\theta_1 < \theta < \theta_2$.
4. H_0: $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ως προς την εναλλακτική H_1: $\theta < \theta_1$ ή $\theta > \theta_2$.

Θα αποδειχθεί ότι, αν η κατανομή έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π., τότε υπάρχουν Ο.Ι.Ε. για τις κλάσεις των υποθέσεων 1, 2, 3, αλλά όχι για την 4. Όμως, αν ο ερευνητής περιοριστεί στην κλάση των αμερόληπτων ελεγχοσυναρτήσεων, τότε είναι δυνατό να κατασκευασθεί Ο.Ι.Ε. για την κλάση των υποθέσεων 4.

3.2.1. Ο.Ι.Ε. για Μονόπλευρες Υποθέσεις

Θεώρημα 3.2

Έστω η τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$. Ας υποτεθεί ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$. Για τον έλεγχο της απλής αρχικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\theta > \theta_0$ η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > c \\ \delta, & \text{αν } \ T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = c \\ 0, & \text{αν } \ T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) < c \end{cases} ,$$

είναι Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_1 σε σ.σ. a. Υπενθυμίζεται ότι οι σταθερές $\delta \in [0,1)$ και $c > 0$ δίνονται από τη σχέση: $E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{a}$. Επιπλέον, αν η κατανομή $f(x;\theta)$ είναι συνεχής, τότε $\delta = 0$.

Απόδειξη.

Ας υποτεθεί ότι ο έλεγχος υποθέσεων είναι H_0: $\theta = \theta_0$ με εναλλακτική H_1: $\theta = \theta_1$ για κάποια τιμή $\theta_1 > \theta_0$. Από το λήμμα Neyman-Pearson (σελ. 102) η Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{L(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{L(\underset{\sim}{x};\theta_0)} > c^* \\ \delta, & \text{αν } \dfrac{L\left(\underset{\sim}{x};\theta_1\right)}{L\left(\underset{\sim}{x};\theta_0\right)} = c^* \\ 0, & \text{αν } \dfrac{L\left(\underset{\sim}{x};\theta_1\right)}{L\left(\underset{\sim}{x};\theta_0\right)} < c^* \end{cases}, \tag{3.1}$$

Επειδή η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$, θέτοντας:

$$\frac{L(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{L(\underset{\sim}{x};\theta_0)} = v\left(T(\underset{\sim}{x})\right),$$

η συνάρτηση $v\left(T(\underset{\sim}{x})\right)$ θα είναι αύξουσα συνάρτηση του $T(\underset{\sim}{x})$ και η ελεγχοσυνάρτηση (3.1) ισοδυναμεί με την ελεγχοσυνάρτηση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) > c \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) = c \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) < c \end{cases}, \tag{3.2}$$

όπου $c = v^{-1}\,(c^*)$. Η παραπάνω ελεγχοσυνάρτηση είναι ισχυρότατη σε σ.σ. a και οι σταθερές $\delta \in [0,1)$ και $c > 0$ δίνονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{P}_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X}) > c) + \delta \mathrm{P}_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X}) = c). \tag{3.3}$$

Από τις σχέσεις (3.2) και (3.3) προκύπτει ότι η ελεγχοσυνάρτηση $\varphi(\underset{\sim}{x})$ είναι ανεξάρτητη της τιμής θ_1, άρα είναι Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της H_1: $\theta > \theta_0$.

Θεώρημα 3.3

Έστω η τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$. Ας υποτεθεί ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underset{\sim}{x};\theta)$, έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$. Για τον έλεγχο της απλής αρχικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης H_1: $\theta < \theta_0$ η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) < c \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) = c \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) > c \end{cases},$$

είναι Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_1 σε σ.σ. a. Υπενθυμίζεται ότι οι σταθερές $\delta \in [0,1)$ και $c > 0$ δίνονται από τη σχέση: $E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{x}) = \mathrm{a}$. Επιπλέον, αν η κατανομή $f(x;\theta)$ είναι συνεχής, τότε $\delta = 0$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη παραλείπεται, διότι είναι όμοια με αυτή του θεωρήματος 3.2 (σελ. 89).

Παράδειγμα 3.3

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$, όπου $\theta \in \Omega = (0, +\infty)$, $x \geq 0$. Σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\theta = 10$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta > 10$ για $n = 31$.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x_i}{\theta}\right\}=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}\right\}.$$

Στο παράδειγμα 3.1 (σελ. 87), αποδείχθηκε ότι η $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2 (σελ. 89), η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0\colon \theta=10$ έναντι της $\mathrm{H}_1\colon \theta>10$ είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i\geq c\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i< c\end{cases},$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\geq c\right).$$

Να σημειωθεί ότι οι τ.μ. $X_1,X_2,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή $G\left(1,\frac{1}{\theta}\right)$. Από την άσκηση 1.4 (σελ. 46), προκύπτει ότι η τ.μ. $Z_i=\frac{2}{\theta}X_i$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2$, ενώ η τ.μ. $Z=\sum_{i=1}^{n} Z_i=\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$. Επομένως, θέτοντας $c^*=\frac{2c}{\theta_0}$, προκύπτει:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i>c^*\right)\Rightarrow\ c=\frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\mathrm{a}}^2.$$

Για $\theta_0=10$, $n=31$ και $\mathrm{a}=0.05$ προκύπτει με χρήση της συνάρτησης «CHISQ.INV.RT(0.05;62)» του Excel, ότι $c=\frac{10}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{62;0.05}^2=5\cdot 81.3810=406.9051$.

Μια εναλλακτική προσέγγιση για τη λύση του παραδείγματος είναι να χρησιμοποιηθεί από τη θεωρία πιθανοτήτων το γνωστό θεώρημα που αναφέρει ότι, αν η τ.μ. W ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\nu^2$, τότε ισχύει $EW=\nu$ και $\mathrm{Var}W=2\nu$. Επίσης, αν $\nu\geq 30$, τότε η τ.μ. W συγκλινει κατά νόμο στην κανονική κατανομή $N(\nu,2\nu)$. Επομένως, η τ.μ. $Z=\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i\xrightarrow{\text{κ.Ν.}}N(2n,4n)$. Άρα:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i>c^*\right),$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{Z-2n}{2\sqrt{n}}>\frac{c^*-2n}{2\sqrt{n}}\right)\Rightarrow\frac{c^*-2n}{2\sqrt{n}}=z_{\mathrm{a}}.$$

Για $\mathrm{a}=0.05$ προκύπτει ότι $z_{\mathrm{a}}=1.65$ και για $n=31$ προκύπτει $c^*=80.3736$ και $c=401.8681$. Η διαφορά των δύο τιμών για τη σταθερά c είναι $406.9051-401.8681=5.0370\cong 5$, δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρή σε σχέση με τη διασπορά του $\sum_{i=1}^{n} x_i$, που είναι $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} x_i)=n\theta_0^2=3100$. Επομένως, το κρίσιμο σημείο δε διαφέρει πολύ στην προσέγγιση με την κανονική κατανομή.

Θεώρημα 3.4

Έστω η τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$, όπου $\theta\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τ.δ. από την κατανομή αυτή. Ας υποτεθεί ότι η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$. Τότε για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0\colon \theta\leq\theta_0$ ως προς την εναλλακτική $\mathrm{H}_1\colon \theta>\theta_0$, υπάρχει Ο.Ι.Ε. που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})>c\\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=c\\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<c\end{cases},\tag{3.4}$$

όπου οι σταθερές c και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).\tag{3.5}$$

Η συνάρτηση ισχύος $\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ είναι αυστηρά αύξουσα για κάθε $\theta \in \Omega$, το οποίο σημαίνει ότι $\sup_{\theta \leq \theta_0} \pi(\theta) = \pi(\theta_0)$.

Απόδειξη.

Στο θεώρημα 3.2 (σελ. 89) αποδείχθηκε ότι για τον έλεγχο της απλής υπόθεσης $\mathrm{H}_0: \theta = \theta_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $\mathrm{H}_1: \theta > \theta_0$ η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση (3.3) είναι Ο.Ι.Ε. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τη σχέση (3.4) είναι Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0: \theta \leq \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $\mathrm{H}_1: \theta > \theta_0$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ισχύος $\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ είναι αύξουσα συνάρτηση του θ. Για το λόγο αυτό ορίζονται οι απλές υποθέσεις $\mathrm{H}_0': \theta = \theta_0^{'}$ και $\mathrm{H}_1': \ \theta = \theta_1^{'}$, όπου $\theta_0^{'} < \theta_1^{'}$. Έστω $\varphi'(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ η ελεγχοσυνάρτηση αυτών των υποθέσεων. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα των Neyman-Pearson, η H_0' απορρίπτεται, όταν:

$$\frac{L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \theta_1^{'})}{L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \theta_0^{'})} > c' \ ,$$

όπου η σταθερά c' υπολογίζεται από τη σχέση: $E_{\theta_0^{'}} \varphi'(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{a}$.

Ο έλεγχος $\varphi'(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο (3.4), λόγω της ιδιότητας του Μ.Λ.Π. της οικογένειας κατανομών $f(x;\theta)$. Επίσης, ο έλεγχος $\varphi'(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$, όπως αποδείχθηκε στο 2ο κεφάλαιο, είναι αμερόληπτος. Επομένως:

$$\pi(\theta_1^{'}) = E_{\theta_1^{'}} \varphi'\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) \geq E_{\theta_0^{'}} \varphi'\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \pi(\theta_0^{'}) \ . \tag{3.6}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\pi(\theta)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του θ.

Άρα αν $\theta < \theta_0 < \theta'$ από τη σχέση (3.6) ισχύει ότι $\pi(\theta) \leq \pi(\theta_0) = \mathrm{a} = \sup\{\pi(\theta),\ \theta \leq \theta_0\}$. Η ελεγχοσυνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση (3.4) είναι Ι.Ε. σε σ.σ. a για τις υποθέσεις $\{\mathrm{H}_0', \mathrm{H}_1'\}$ και αυτό ισχύει για κάθε $\theta < \theta_0$ και για κάθε $\theta' > \theta_0$. Επομένως, ο έλεγχος (3.5) είναι Ο.Ι.Ε. σε σ.σ. $\mathrm{a} = E_{\theta_0} \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0: \theta \leq \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H}_1: \theta > \theta_0$.

Θεώρημα 3.5

Έστω η τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$, όπου $\theta \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τ.δ. από την κατανομή αυτή. Αν υποτεθεί ότι η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$, τότε για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0: \theta \geq \theta_0$ ως προς την εναλλακτική $\mathrm{H}_1: \theta < \theta_0$ υπάρχει Ο.Ι.Ε. που δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) < c \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = c \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > c \end{cases} , \tag{3.7}$$

όπου οι σταθερές c και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0} \varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).$$

Επιπλέον, η συνάρτηση ισχύος $\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς θ.

Απόδειξη.

Η απόδειξη παραλείπεται, διότι είναι ανάλογη της απόδειξης του θεωρήματος 3.4 (σελ. 91).

Πόρισμα 3.2

Έστω η τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$ από την Ε.Ο.Κ.:

$$L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta) = c(\theta) \exp\left\{Q(\theta) T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right\} h(\underset{\sim}{\mathrm{x}}).$$

Για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0: \theta \leq \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H}_1: \theta > \theta_0$ η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τις σχέσεις (3.4) και (3.5), αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, και από τις σχέσεις (3.7) και (3.5), αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα.

Για τον έλεγχο της αρχικής υπόθεσης H_0: $\theta \geq \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta < \theta_0$ η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τις σχέσεις (3.7) και (3.5), αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, και από τις σχέσεις (3.4) και (3.5), αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα.

Παράδειγμα 3.4

Να μελετηθούν οι καμπύλες ισχύος ομοιόμορφα ισχυρότατων ελεγχοσυναρτήσεων της μηδενικής υπόθεσης $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta = \theta_0}$ έναντι των εναλλακτικών $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta > \theta_0}$ και $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta < \theta_0}$, όπου $\boldsymbol{\theta}$ είναι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής $\boldsymbol{N(\theta, \sigma^2)}$, $\boldsymbol{\theta \in \mathbb{R}}$ και $\boldsymbol{\sigma^2}$ γνωστό.

Λύση

Η σ.π.π. της κανονικής κατανομής $N(\theta, \sigma^2)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right\} .$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2\right\}\right],$$

δηλαδή:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ είναι εκθετικής μορφής και έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

<u>1η Περίπτωση</u>. Για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta > \theta_0$ η Ο.Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c' \iff \bar{x} \geq c \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < c' \iff \bar{x} < c \end{cases},$$

όπου:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} \geq c) = \mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X}-\theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} \geq \frac{(c-\theta_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathrm{a} .$$

Αν ισχύει ότι $\mathrm{P}(Z \geq z_{\mathrm{a}}) = \mathrm{a}$, τότε:

$$\frac{(c-\theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} = z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c = \theta_0 + z_{\mathrm{a}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

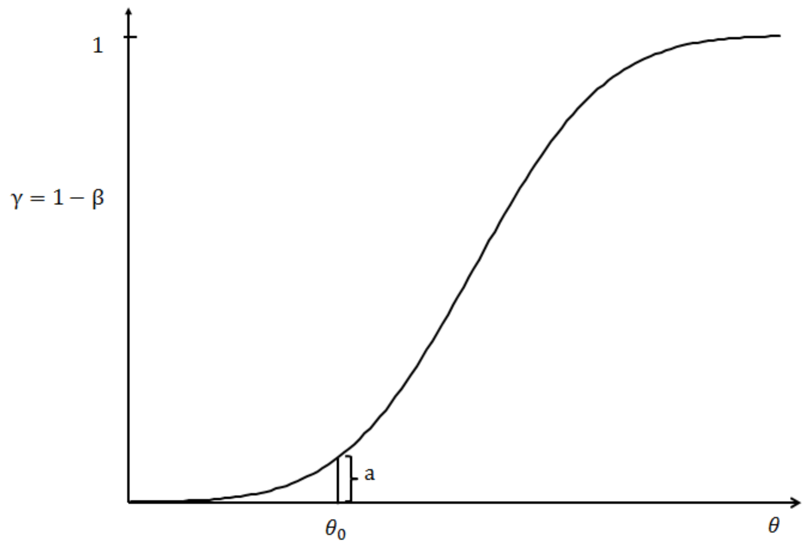
Η συνάρτηση ισχύος είναι:

$$\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{P}_\theta(\bar{X} \geq c) = \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sigma} \geq \frac{(c-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

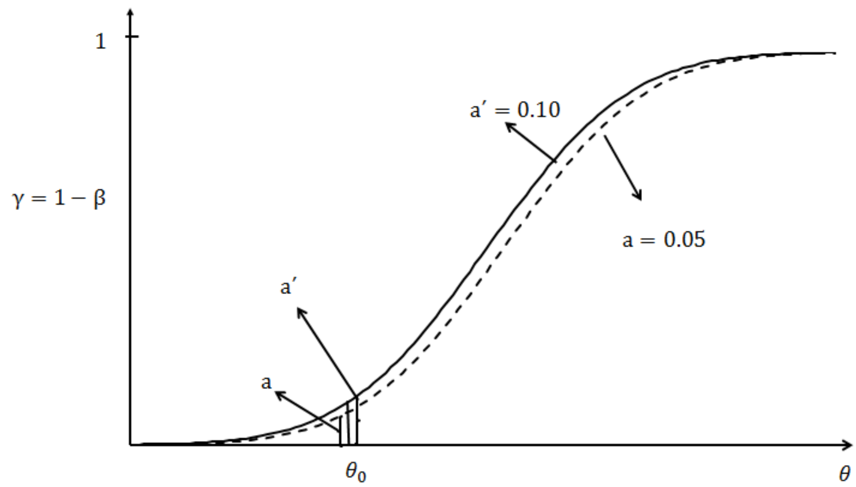
δηλαδή:

$$\pi(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{(c-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(z_{\mathrm{a}} + \frac{(\theta_0-\theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(\theta-\theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} - z_{\mathrm{a}}\right) .$$

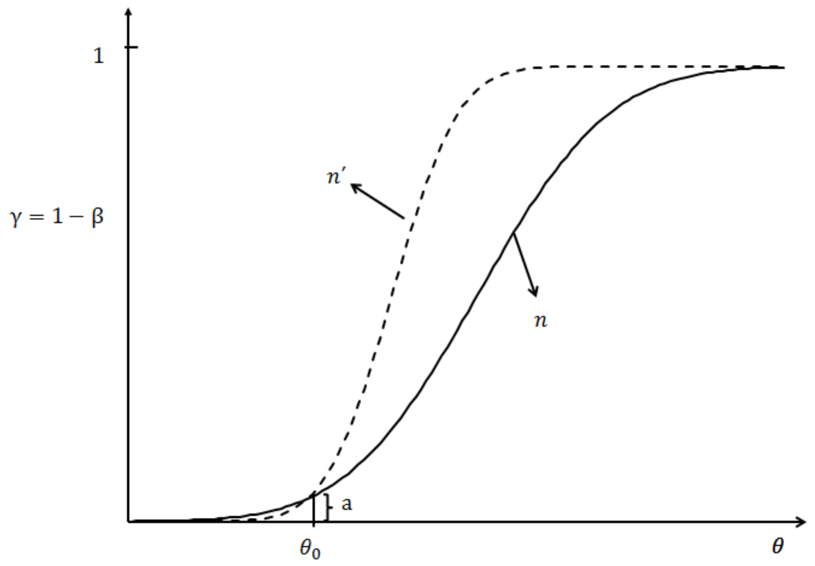
Από την προηγούμενη σχέση, αλλά και από το θεώρημα 3.2 (σελ. 89), η συνάρτηση ισχύος είναι αύξουσα συνάρτηση του θ, του μεγέθους του δείγματος n και της σ.σ. a. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι καμπύλες ισχύος σε σχέση με τη στάθμη σημαντικότητας και το μέγεθος του δείγματος.



Σχήμα 3.1 *Καμπύλη ισχύος της Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της* H_1*:* $\theta > \theta_0$.



Σχήμα 3.2 *Καμπύλες ισχύος για σ.σ.* a = *0.05 και* a′ = *0.10, για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της εναλλακτικής* H_1*:* $\theta > \theta_0$.



Σχήμα 3.3 *Καμπύλες ισχύος για δύο ελέγχους σε σ.σ.* a *= 0.05 με διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων, n΄ > n, για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της* H_1*:* $\theta > \theta_0$*.*

2η Περίπτωση. Για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta < \theta_0$ η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{X} \leq c \\ 0, & \text{αν } X > c \end{cases},$$

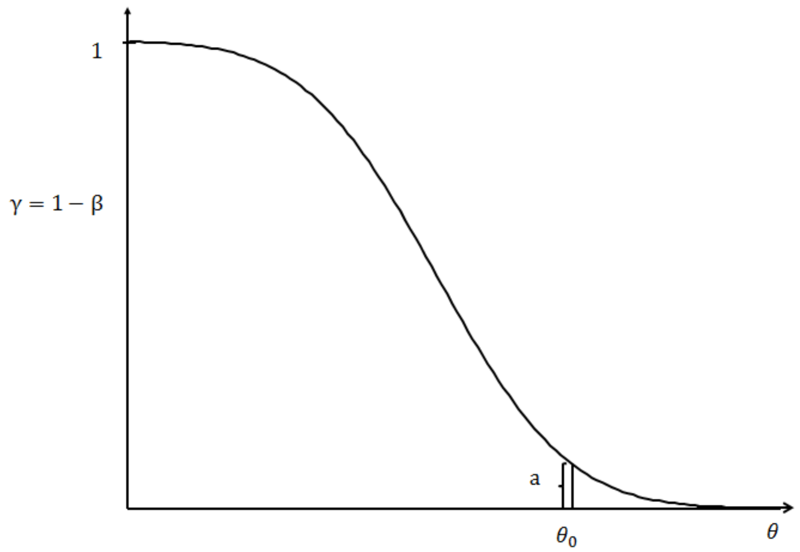
όπου:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} \leq c) = \mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X} - \theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(c - \theta_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathrm{a} \Rightarrow \frac{(c - \theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} = -z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c = \theta_0 - z_{\mathrm{a}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

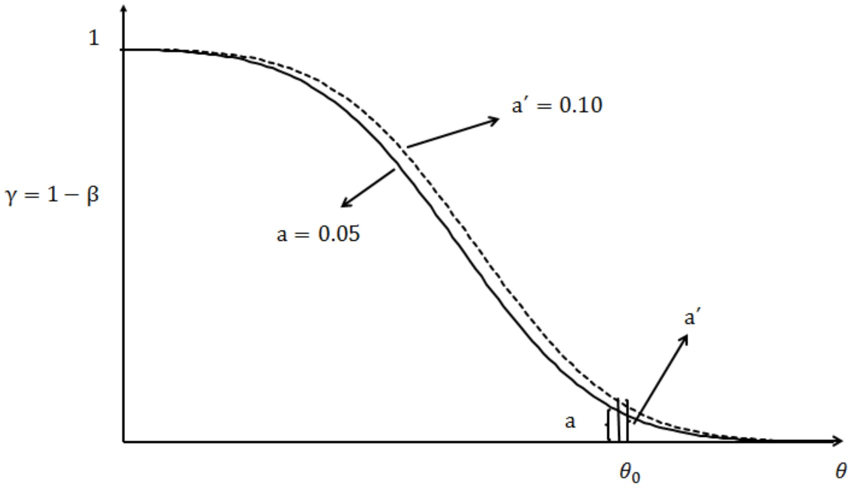
Η συνάρτηση ισχύος είναι:

$$\pi(\theta) = E_\theta \varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{P}_\theta(\bar{X} \leq c) = \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X} - \theta)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(c - \theta)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(\theta_0 - \theta)\sqrt{n}}{\sigma} - z_{\mathrm{a}}\right) .$$

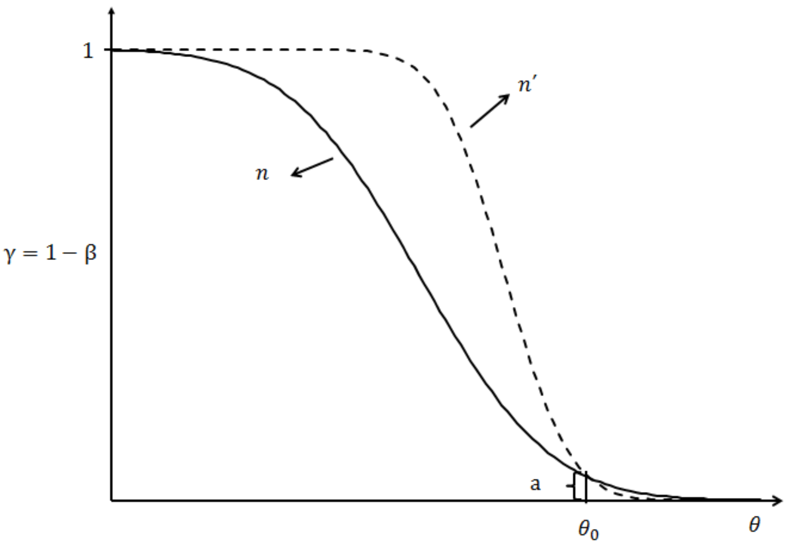
Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ισχύος είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ, αλλά είναι αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος n και της σ.σ. a. Στα σχήματα που ακολουθούν δίνονται οι καμπύλες ισχύος σε σχέση με τη στάθμη σημαντικότητας και το μέγεθος του δείγματος.



Σχήμα 3.4 *Καμπύλη ισχύος της Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της* H_1*:* $\theta < \theta_0$*.*



Σχήμα 3.5 *Καμπύλες ισχύος για σ.σ.* a = *0.05 και* a′ = *0.10 για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της εναλλακτικής* H_1*:* $\theta < \theta_0$*.*



Σχήμα 3.6 *Καμπύλες ισχύος για δύο ελέγχους σε σ.σ.* $a = 0.05$ *με διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων,* $n' > n$*, για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0*:* $\theta = \theta_0$ *έναντι της* H_1*:* $\theta < \theta_0$*.*

Παράδειγμα 3.5

Σε μια παρτίδα 100 αντικειμένων να ελεγχθεί αν το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων υπερβαίνει το 1%. Λαμβάνεται ένα δείγμα 15 αντικειμένων, χωρίς επανάθεση, στο οποίο το πλήθος των ελαττωματικών ήταν 3. Ποιο είναι το συμπέρασμα;

Λύση

Στο παράδειγμα 3.2 (σελ. 88) αποδείχθηκε ότι, η οικογένεια υπεργεωμετρικών κατανομών έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x) = x$. Επομένως, για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\theta \leq 0.01$ ως προς την εναλλακτική $\mathrm{H}_1: \theta > 0.01$, όπου θ είναι το άγνωστο ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \; x > c \\ \delta, & \text{αν } \; x = c \\ 0, & \text{αν } \; x < c \end{cases},$$

όπου η σταθερές δ και c υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}_{0.01}(X > c) + \delta \mathrm{P}_{0.01}(X = c) = 1 - \mathrm{P}_{0.01}(X \leq c) + \delta \mathrm{P}_{0.01}(X = c) \;.$$

$$\mathrm{P}_{0.01}(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{0.01N}{x}\binom{N-0.01N}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{1}{x}\binom{99}{15-x}}{\binom{100}{15}} \geq 1 - \mathrm{a} \;.$$

Σε σ.σ. $\mathrm{a} = 0.05$, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $c = 1$ και $\delta = 1/3$. Τελικά, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, διότι στην παρτίδα των 15 αντικειμένων το πλήθος των ελαττωματικών ήταν 3, μεγαλύτερο του $c = 1$.

Παράδειγμα 3.6

Σε τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 25$ από κατανομή Bernoulli $B(1, \theta)$, $\theta \in (0,1)$ βρέθηκε $\sum_{i=1}^{25} x_i = 24$. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \theta \leq 0.5$ με εναλλακτική $\mathrm{H}_1: \theta > 0.5$, σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.01$.

Λύση

Η κατανομή Bernoulli ανήκει στην Ε.Ο.Κ., διότι:

$$\mathrm{P}(X = x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} = (1-\theta) exp\left\{x \ln \frac{\theta}{1-\theta}\right\},$$

Για $\theta \in (0,1)$, προφανώς η συνάρτηση $\ln\frac{\theta}{1-\theta}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του θ. Άρα η σ.π. $\mathrm{P}(X = x)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(x) = x$, ενώ η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη στ.σ. $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Σύμφωνα με τα θεωρήματα 3.1 (σελ. 87) και 3.4 (σελ. 91), η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \; \sum_{i=1}^{25} x_i > c \\ \delta, & \text{αν } \; \sum_{i=1}^{25} x_i = c \\ 0, & \text{αν } \; \sum_{i=1}^{25} x_i < c \end{cases},$$

με:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > c\right) + \delta \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i = c\right) = \mathrm{a} \;,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{P}_{0.5}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \leq c\right) - \delta \mathrm{P}_{0.5}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i = c\right) = 0.99 \;.$$

Είναι γνωστό (άσκηση 1.1, σελ. 45) ότι, αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ ακολουθούν κατανομή $B(1, \theta)$, τότε η συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \sum_{i=1}^{25} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $B(25, \theta)$. Από τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής (παράρτημα Β, πίνακας Β6, σελ. 221), για $c = 18$ προκύπτει ότι $\mathrm{P}_{0.5}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \leq 18\right) = 0.9927$ και $\mathrm{P}_{0.5}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i = 18\right) = 0.0143$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\delta = 0.1885$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \theta \leq 0.5$ απορρίπτεται, διότι $\sum_{i=1}^{25} X_i = 24 > 18 = c$.

Επειδή, για $p = \theta_0 = 0.5$ ισχύει $np = n(1-p) = 25 \cdot 0.5 = 12.5 > 5$, σύμφωνα με το θεώρημα των De Moivre-Laplace (σελ. 102), η τ.μ. $\sum_{i=1}^{25} X_i$ συγκλίνει κατά νόμο την κανονική κατανομή $N(np, np(1-p))$, δηλαδή στην κανονική κατανομή $N(12.5, 2.5^2)$ και η ελεγχοσυνάρτηση γίνεται:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{25} x_i \geq c \\ 0, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{25} x_i < c \end{cases},$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq c | H_0\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 12.5}{2.5} \geq \frac{c - 12.5}{2.5}\right) = 0.01 \ ,$$

δηλαδή:

$$\frac{c - 12.5}{2.5} = 2.33 \Rightarrow c = 12.5 + 2.33 \cdot 2.5 = 18.325 \ .$$

Επομένως, το κρίσιμο σημείο που βρίσκεται τόσο από την αρχική κατανομή όσο και από την προσέγγισή της με την κανονική κατανομή δε διαφέρουν.

Παράδειγμα 3.7

Ένα φάρμακο, που δίνεται σε δισκία, έχει περιεκτικότητα σε θειικό μαγνήσιο $\mathbf{1.54}$ gr/cm^3 τουλάχιστον. Για να γίνει παραλαβή μιας παρτίδας του φαρμάκου, λαμβάνεται, δείγμα μερικών δισκίων και εξετάζεται η περιεκτικότητά τους σε θειικό μαγνήσιο. Από $\boldsymbol{n}$ δισκία υπολογίστηκε η μέση περιεκτικότητα και αποφασίζεται ότι η παρτίδα θα απορριφθεί, όταν η μέση περιεκτικότητα είναι μικρότερη από κάποια τιμή, έστω $\boldsymbol{x^*}$. Αποφασίζεται ότι η παρτίδα θα επιστραφεί, όταν η μέση τιμή είναι $\boldsymbol{\mu < 1.50}$ με σφάλμα το πολύ 1%, ενώ, αν η μέση τιμή είναι $\boldsymbol{\mu > 1.54}$, τότε η παρτίδα θα γίνει δεκτή τουλάχιστον στο 98% των περιπτώσεων. Με την υπόθεση ότι η περιεκτικότητα σε θειικό μαγνήσιο ακολουθεί κανονική κατανομή, να απαντηθούν τα ερωτήματα: α) Αν η τυπική απόκλιση της περιεκτικότητας είναι $\mathbf{0.03}$, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος και η τιμή $\boldsymbol{x^*}$. β) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι $\mathbf{13}$ και η μέση περιεκτικότητα είναι $\mathbf{1.52}$, να αποφασιστεί αν θα γίνει δεκτή η υπόθεση $\boldsymbol{\mu = 1.54}$, έναντι της εναλλακτικής $\boldsymbol{\mu < 1.54}$, σε στάθμη σημαντικότητας $\mathbf{a = 0.01}$.

Λύση

Ερώτημα α). Ο έλεγχος των υποθέσεων είναι $\mathrm{H}_0: \mu \geq 1.54$ με εναλλακτική $\mathrm{H}_1: \mu < 1.54$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.5 (σελ. 92) και το παράδειγμα 3.4 (σελ. 93), η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{X} \leq x^* \\ 0, & \text{αν } \bar{X} > x^* \end{cases},$$

Η συνάρτηση ισχύος δίνεται από τη σχέση:

$$\pi(\mu) = \mathrm{P}_\mu(\bar{X} \leq x^*), \quad \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Από τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(\bar{X} \leq x^* \ | \ \mu < 1.50) \geq 0.99 \\ \mathrm{P}(\bar{X} > x^* \ | \ \mu > 1.54) > 0.98 \end{array}\right\} .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 3.5 (σελ. 92), η συνάρτηση ισχύος είναι φθίνουσα. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(\bar{X} \leq x^* \ | \ \mu = 1.50) = 0.99 \\ \mathrm{P}(\bar{X} \leq x^* \ | \ \mu = 1.54) = 0.02 \end{array}\right\} ,$$

δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}\left(\dfrac{(\bar{X} - 1.50)\sqrt{n}}{0.03} \leq \dfrac{(x^* - 1.50)\sqrt{n}}{0.03}\right) = 0.99 \\ \mathrm{P}\left(\dfrac{(\bar{X} - 1.54)\sqrt{n}}{0.03} \leq \dfrac{(x^* - 1.54)\sqrt{n}}{0.03}\right) = 0.02 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi\left(\frac{(x^*-1.50)\sqrt{n}}{0.03}\right)=0.99\\ \Phi\left(\frac{(x^*-1.54)\sqrt{n}}{0.03}\right)=0.02\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{(x^*-1.50)\sqrt{n}}{0.03}=z_{0.01}=2.33\\ \frac{(x^*-1.54)\sqrt{n}}{0.03}=-z_{0.02}=-2.06\end{aligned}\right\}\Rightarrow\qquad \begin{aligned}n\geq 11\\ x^*=1.5212\end{aligned}\ .$$

Ερώτημα β). Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \mu = 1.54$ με εναλλακτική $\mathrm{H}_1: \mu < 1.54$ η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \bar{X}\leq c\\ 0, & \text{αν } \bar{X}>c\end{cases},$$

με:

$$E_{1.54}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=0.01 \implies \mathrm{P}_{1.54}(\bar{X}\leq c)=0.01 \implies \Phi\left(\frac{(c-1.54)\sqrt{13}}{0.03}\right)=0.01\,,$$

δηλαδή:

$$\frac{(c-1.54)\sqrt{13}}{0.03}=-z_{0.01}=-2.33\Rightarrow c=1.5206\ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu = 1.54$ απορρίπτεται οριακά, γιατί $\bar{X} = 1.52 < c$.

3.2.2. Ο.Ι.Ε. για τις Υποθέσεις $\mathrm{H_0}$: $\theta \leq \theta_1$ ή $\theta \geq \theta_2$, $\mathrm{H_1}$: $\theta_1 < \theta < \theta_2$

Θεώρημα 3.6

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με κατανομή $f(x;\theta)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$ που ανήκει στην Ε.Ο.Κ. ($f(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta) = c(\theta)\exp\left\{Q(\theta)T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right\}h(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$). Έστω, επίσης, οι υποθέσεις $\mathrm{H}_0: \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$, $\mathrm{H}_1: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα, τότε η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } c_1<T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<c_2\\ \delta_i, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=c_i\,, i=1,2,\ \ c_1<c_2\\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<c_1 \text{ ή } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})>c_2\end{cases}. \tag{3.8}$$

Αν η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι φθίνουσα, τότε η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<c_1 \text{ ή } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})>c_2\\ \delta_i, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=c_i\,, i=1,2,\ \ (c_1<c_2)\\ 0, & \text{αν } c_1<T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<c_2\end{cases}, \tag{3.9}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 και δ_1, δ_2 $\in [0,1)$ ορίζονται από τη σ.σ. a ως εξής:

$$E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = E_{\theta_2}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{a}. \tag{3.10}$$

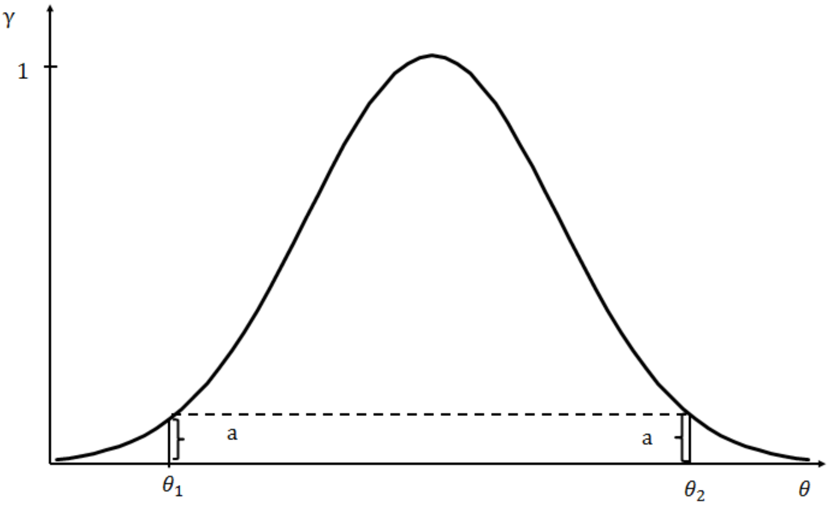
Επίσης, ισχύει ότι:

$$\forall\ \theta\ \in\ (\theta_1,\theta_2)\ \ E_\theta\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)>\mathrm{a}\,. \tag{3.11}$$

$$\forall\ \theta\ \notin\ (\theta_1,\theta_2)\ \ E_\theta\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)\leq\mathrm{a}\,. \tag{3.12}$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη παραλείπεται, γιατί ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης ισχύος του παραπάνω ελέγχου.



Σχήμα 3.7 *Καμπύλη ισχύος για τον έλεγχο της υπόθεσης* H_0: $\theta \le \theta_1$ *ή* $\theta \ge \theta_2$ *έναντι της* H_1: $\theta_1 < \theta < \theta_2$ *για την κανονική κατανομή.*

Παράδειγμα 3.8

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_{12})$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Poisson $P(\theta)$. Σε στάθμη σημαντικότητας a να βρεθεί ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τις υποθέσεις $\mathrm{H_0}$: $\theta \notin (0.325, 1.25)$ με εναλλακτική $\mathrm{H_1}$: $\theta \in (0.325, 1.25)$. Επιπλέον, να βρεθεί η ισχύς του ελέγχου για $\theta = 0.5$.

Λύση

Η κατανομή Poisson ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{x};\theta\right) = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} = e^{-n\theta}\exp\left\{\ln\theta\sum_{i=1}^n x_i\right\}\prod_{i=1}^n (x_i!)^{-1} .$$

και έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.6 (σελ. 99), η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση (3.8) και οι σταθερές $\delta_i \in [0,1)$ και c_i, $i = 1{,}2$ υπολογίζονται από τη σχέση (3.10). Αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ακολουθούν κατανομή $P(\theta)$, τότε η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^n X_i$ ακολουθεί την κατανομή $P(n\theta)$ (βλέπε άσκηση 1.1, σελ. 45). Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{X}) &= \mathrm{P}_{\theta_1}(c_1 < T < c_2) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_1}(T = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_1}(T = c_2) = \mathrm{a} \\ E_{\theta_2}\varphi(\underset{\sim}{X}) &= \mathrm{P}_{\theta_2}(c_1 < T < c_2) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_2}(T = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_1}(T = c_2) = \mathrm{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_{0.325}(T \le c_2 - 1) - \mathrm{P}_{0.325}(T \le c_1) + \delta_1 \mathrm{P}_{0.325}(T = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{0.325}(T = c_2) &= \mathrm{a} \\ \mathrm{P}_{1.25}(T \le c_2 - 1) - \mathrm{P}_{1.25}(T \le c_1) + \delta_1 \mathrm{P}_{1.25}(T = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{1.25}(T = c_2) &= \mathrm{a} \end{aligned}\right\} .$$

Αναζητείται ένα ζεύγος (c_1, c_2) για το οποίο να ισχύει συγχρόνως ότι $\mathrm{P}_{\theta_i}(T \le c_2 - 1) - \mathrm{P}_{\theta_i}(T \le c_1) \le 0.05$, i=1,2. Από τους πίνακες της κατανομής Poisson (παράρτημα Β, πίνακας Β7, σελ. 227), για μέγεθος δείγματος $n = 12$ προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_{0.325}(T \le 8) = \mathrm{P}(T \le 8 \mid \lambda = 3.9) = 0.981 \\ \mathrm{P}_{0.325}(T \le 7) = \mathrm{P}(T \le 7 \mid \lambda = 3.9) = 0.955 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}_{0.325}(T \le 8) - \mathrm{P}_{0.325}(T \le 7) = 0.026\ ,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_{1.25}(T \le 8) = \mathrm{P}(T \le 8 \mid \lambda = 15) = 0.037 \\ \mathrm{P}_{1.25}(T \le 7) = \mathrm{P}(T \le 7 \mid \lambda = 15) = 0.018 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}_{1.25}(T \le 8) - \mathrm{P}_{1.25}(T \le 7) = 0.019\ .$$

Επομένως, $c_1 = 7$ και $c_2 - 1 = 8$, δηλαδή $c_2 = 9$. Για την εύρεση των δ_1 και δ_2 πρέπει να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα, δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} 0.026 + \delta_1 \mathrm{P}(T = 7 \mid \lambda = 3.9) + \delta_2 \mathrm{P}(T = 9 \mid \lambda = 3.9) = 0.05 \\ 0.019 + \delta_1 \mathrm{P}(T = 7 \mid \lambda = 15) + \delta_2 \mathrm{P}(T = 9 \mid \lambda = 15) = 0.05 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 0.055\delta_1 + 0.012\delta_2 = 0.024 \\ 0.010\delta_1 + 0.032\delta_2 = 0.031 \end{aligned}\right\} .$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα έπεται ότι $\delta_1 = 0.243$ και $\delta_2 = 0.866$.

Για $\theta = 0.5$ η ισχύς του ελέγχου είναι:

$$\gamma = \mathrm{P}_{0.5}(7 < T < 9) + \delta_1 \mathrm{P}_{0.5}(T = 7) + \delta_2 \mathrm{P}_{0.5}(T = 9) \ ,$$

Από τους πίνακες της κατανομής Poisson (παράρτημα Β, πίνακας Β7, σελ. 227), για $\lambda = 6$, προκύπτει ότι:

$$\gamma = 0.103 + 0.138 + 0.069 = 0.310 \ .$$

3.2.3. Μελέτη του Ελέγχου Υποθέσεων H_0: $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, H_1: $\theta < \theta_1$ ή $\theta > \theta_2$

Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται κάποια θεωρήματα και πορίσματα χωρίς απόδειξη. Να σημειωθεί ότι οι αποδείξεις τους παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες και δεν κρίνεται σκόπιμο να δοθούν.

Θεώρημα 3.7

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από τ.μ. X με σ.π.π. $f(x;\theta)$. Έστω ότι η πιθανοφάνεια του τ.δ. έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x})$. Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της υπόθεσης $\mathrm{H}_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H}_1 : \theta < \theta_1$ ή $\theta > \theta_2$.

Πόρισμα 3.3

Αν $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, τότε δεν υπάρχει Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ με εναλλακτική την $\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$.

Θεώρημα 3.8

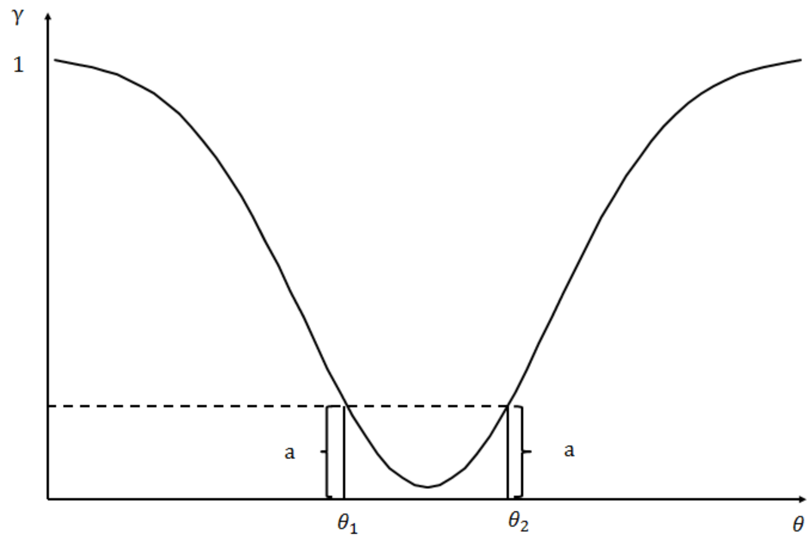
Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ και $\mathrm{H}_1 : \theta < \theta_1$ ή $\theta > \theta_2$ υπάρχει αμερόληπτη Ο.Ι.Ε., δηλαδή ισχύει ότι:

$$E_\theta \varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) \leq \mathrm{a} \ , \qquad \theta \in \Omega_0 \ , \qquad E_\theta \varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) \geq \mathrm{a} \ , \qquad \theta \in \Omega_1 \ ,$$

που δίνεται από τις σχέσεις:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) < c_1 \ \text{ ή } \ T(\underset{\sim}{x}) > c_2 \\ \delta_i, & \text{αν } T(\underset{\sim}{x}) = c_i \ , i = 1,2, \ (c_1 < c_2) \\ 0, & \text{αν } c_1 < T(\underset{\sim}{x}) < c_2 \end{cases} ,$$

με $E_{\theta_1}\varphi(\underset{\sim}{X}) = E_{\theta_2}\varphi(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{a}$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης ισχύος του παραπάνω ελέγχου υποθέσεων.



Σχήμα 3.8 *Συνάρτηση ισχύος για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ έναντι της H_1: $\theta < \theta_1$ ή $\theta > \theta_2$.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (1977). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day Inc.

Campell, R. C. (1988). *Statistics for Biologists*. Cambridge University Press.

Darmois, G. (1935). "Sur les lois de probabilites a estimation exhaustive". C.R. Acad. Sci. Paris (in French) 200: 1265–1266.

Devore, J & Peck, R.(2001). *Statistics: The exploration and analysis of data*. Brooks/Cole.

Fraser, D. A. (1967). *Statistics: An Introduction*. John Wiley & Sons Inc.

Hays, L. W.& Winkler, L. R. (1970). *Statistics, volume 1*. Holt, Rinehart and Winston Inc., New York.

Hogg, R. V., McKean, J. W. & Craig, A. T. (2005). *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Prentice Hall.

Hogg, R. V. & Tanise, E. A. (1977). *Probability and Statistical Inference*. Collier-MacMillan International Editions.

Kendall, M. G. & & Stuart, A. (1973). *The Advanced theory of Statistics, volume II, 3rd edition*. Griffin and Co Ltd., London.

Koopman, B. (1936). "On distribution admitting a sufficient statistic". *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 39, No. 3, 399–409.

Larson, J. (1974). *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*. John Wiley and Sons Inc., New York.

Mood, A., Graybill, F. & Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edition*. McGraw Hill.

Neyman, J. & Pearson, E. S. (1933). "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses". *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 231, 694–706.

Παπαϊωάννου ,Τ. & Φερεντίνος, Κ. (2002). *Μαθηματική Στατιστική, 2η Έκδοση*. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

Upton, G. & Cook, I. (1998). *Introducing Statistics*. Oxford.

Walker, H. M (1985). "De Moivre on the law of normal probability". *In Smith, David Eugene, a source book in mathematics*. Dover.

Λυμένες Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

Άσκηση 3.1

Σε δείγμα 200 ερωτηθέντων βρέθηκε ότι το 45% καπνίζει. Να ελεγχθεί η υπόθεση H_0: το ποσοστό των ατόμων που καπνίζει είναι 45%, έναντι της εναλλακτικής H_1: το ποσοστό των ατόμων που καπνίζει είναι μικρότερο του 45%. Να κατασκευαστεί ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0.05$ και να προσδιοριστεί η σταθερά με τη βοήθεια του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta = 0.45 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \theta < 0.45 \ ,$$

δηλαδή είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης με εναλλακτική σύνθετη υπόθεση. Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ ακολουθούν κατανομή $B(1,\theta)$. Η σ.π. της κατανομής Bernoulli $B(1,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \qquad x = 0,1, \qquad 0 < \theta < 1 \ .$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{200} [\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}] = \theta^{\sum_{i=1}^{200} x_i}(1-\theta)^{200-\sum_{i=1}^{200} x_i} \ ,$$

δηλαδή:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = (1-\theta)^{200}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{200} x_i} = (1-\theta)^{200}\exp\left\{\sum_{i=1}^{200} x_i \ln\frac{\theta}{1-\theta}\right\} \ .$$

Επομένως, ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q(\theta) = \ln\frac{\theta}{1-\theta}$. Προφανώς, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $Q(\theta)$ είναι $Q'(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)} > 0$ με συνέπεια η $Q(\theta)$ να είναι αύξουσα συνάρτηση του θ. Άρα η $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{200} x_i$. Η Ο.Ι.Ε. για τον παραπάνω έλεγχο υποθέσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) < c \\ \delta, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = c \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > c \end{cases},$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) < c\right) + \delta \mathrm{P}_{\theta_0}\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = c\right) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i < c\right) < 0.05 \ .$$

Σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ. η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(n\theta, n\theta(1-\theta))$. Επομένως, για τον υπολογισμό της σταθεράς c ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i - 200\theta_0}{\sqrt{200\theta_0(1-\theta_0)}} \leq \frac{c - 200\theta_0}{\sqrt{200\theta_0(1-\theta_0)}}\right) = 0.05 \ ,$$

ή

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{c-90}{7.04}\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{c-90}{7.04} = -1.64 \Rightarrow c = 78.45 \ .$$

Τελικά, η Ο.Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{200} x_i \leq 78 \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{200} x_i \geq 79 \end{cases} .$$

Άσκηση 3.2

Αν οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθούν κατανομή Bernoulli $B(1,\theta)$ να προσδιορισθεί το μέγεθος του δείγματος, ώστε η ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta \leq 0.5$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta > 0.5$ να έχει στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.10$ και ισχύ, για $\theta = 0.40$, ίση με 0.95.

Λύση

Στη συγκεκριμένη άσκηση ο έλεγχος υποθέσεων είναι έλεγχος σύνθετης υπόθεσης έναντι επίσης σύνθετης υπόθεσης, δηλαδή:

$$\mathrm{H}_0: \quad \theta \leq 0.5 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \quad \theta > 0.5 \ .$$

Στην άσκηση 3.1 (σελ. 102), αποδείχθηκε ότι η πιθανοφάνεια της κατανομής Bernoulli $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Η Ο.Ι.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > c \\ 0, & \text{αν } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) \leq c \end{cases} ,$$

όπου:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right), \qquad \gamma = E_{\theta_1}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right).$$

Από το Κ.Ο.Θ. προκύπτει, όπως είναι γνωστό, ότι η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(n\theta, n\theta(1-\theta))$, διότι $n\theta \geq 5$ και $n\theta(1-\theta) \geq 5$. Επομένως, για τον υπολογισμό της σταθεράς c ισχύει ότι:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} > \frac{c - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right) = 0.10 \ ,$$

ή

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{c - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}\right) = 0.10 \Rightarrow \frac{c - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} = 1.28 \ .$$

Επιπλέον:

$$\gamma = \mathrm{P}_\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} > \frac{c - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) = 0.95 \ ,$$

ή

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{c - 0.4n}{\sqrt{0.24n}}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{c - 0.4n}{\sqrt{0.24n}} = -1.64 \ .$$

Για την εύρεση της σταθεράς c και του μεγέθους του δείγματος n, πρέπει να επιλυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} &= 1.28 \\ \frac{c - 0.4n}{\sqrt{0.24n}} &= -1.64 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} c - 0.5n &= 0.64\sqrt{n} \\ c - 0.4n &= -0.803\sqrt{n} \end{aligned}\right\} ,$$

δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} c - 0.5n &= 0.64\sqrt{n} \\ 0.1n &= 1.443\sqrt{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} n &= 208 \\ c &= 113.23 \end{aligned} .$$

Τελικά, η Ο.Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{208} x_i \geq 114 \\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{208} x_i < 114 \end{cases} .$$

Υπενθυμίζεται ότι $x_i = 0{,}1$ για κάθε $i = 1,2,\dots,n$.

Άσκηση 3.3

Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τον αριθμό των τηλεφωνικών κλήσεων που δέχεται ένας φοιτητής ανά ώρα και ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο θ. Αν η παρατηρούμενη τιμή την προηγούμενη ώρα ήταν 8, ενώ από έρευνες είναι γνωστό ότι η μέση τιμή των τηλεφωνικών κλήσεων είναι 10, είναι σωστό να ισχυριστεί κάποιος ότι ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων ελαττώθηκε; Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος υποθέσεων σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.10$.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \theta = 10 \ ,$$

$$\mathrm{H}_1: \theta < 10 \ .$$

Στο παράδειγμα 1.5 (σελ. 35) αποδείχθηκε ότι η κατανομή Poisson ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q(\theta) = \ln\theta$, διότι η σ.π. της μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\exp\{x\ln\theta\}\frac{1}{x!} \ .$$

Η συνάρτηση $Q(\theta) = \ln\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του θ, με συνέπεια η κατανομή Poisson να έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\mathrm{x}) = x$. Η Ο.Ι.Ε. για τον παραπάνω έλεγχο υποθέσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ x < c \\ \delta, & \text{αν } \ x = c \\ 0, & \text{αν } \ x > c \end{cases},$$

όπου οι σταθερές c και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi(\mathrm{X}) = 0.10,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X < c) + \delta\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c) = 0.10 \ ,$$

ή

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X \leq c - 1) + \delta\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c) = 0.10 \ .$$

Από τους πίνακες της κατανομής Poisson (παράρτημα Β, πίνακας Β7, σελ. 227), προκύπτει για $\theta = 10$ ότι $c = 14$. Επειδή $x = 8 < 14$ η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, δηλαδή ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων ελαττώθηκε.

Άσκηση 3.4

Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τη βροχόπτωση το μήνα Απρίλιο σε κάποιο μετεωρολογικό σταθμό και ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\theta, 62.5)$. Τα τελευταία 10 χρόνια μετρήθηκαν τα παρακάτω ύψη βροχόπτωσης σε mm: 24.3, 25.0, 27.6, 25.6, 21.0, 26.8, 29.5, 24.2, 22.7, 23.4. Να ελεγχθεί αν η βροχόπτωση το μήνα Απρίλιο στο συγκεκριμένο σταθμό είναι 26mm ή λιγότερο σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.05$.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \theta = 26 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \theta < 26 \ .$$

Η σ.π.π. της κανονικής κατανομής $N(\theta, \sigma^2)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\theta x}{\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \ ,$$

και η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{n\theta^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\theta\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}\right\},$$

με συνέπεια να ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$, η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση του θ. Άρα η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ \sum_{i=1}^n x_i \geq c \\ 0, & \text{αν } \ \sum_{i=1}^n x_i < c \end{cases},$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = 0.05 \ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c\right) = 0.05 \ .$$

Από το θεώρημα 1.4 (σελ. 25), προκύπτει ότι η $\bar{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, δηλαδή την κανονική κατανομή $N\left(\theta, \frac{62.5}{10}\right)$ ή $N(\theta, 6.25)$. Επομένως:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c\right) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} < c_1) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - 26}{\sqrt{6.25}} < \frac{c_1 - 26}{\sqrt{6.25}}\right) = 0.05 \ ,$$

ή

$$\frac{c_1 - 26}{2.5} = -1.64 \Rightarrow c_1 = 26 - 4.1 = 21.9 \ .$$

Από το δείγμα προκύπτει ότι $\bar{X} = 25.01 > 21.9$ με συνέπεια η μηδενική υπόθεση να γίνεται δεκτή.

Άσκηση 3.5

Το σημείο τήξεως του Mg είναι μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$. Ένας μεταλλουργός παρατήρησε τις ακόλουθες 4 τιμές: 1269, 1271, 1263, 1265. Η κοινώς αποδεκτή θερμοκρασία τήξεως του Mg είναι 1260° C. Αν $\sigma^2 = 5$ να κατασκευαστεί η ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $|\theta - 1260| \leq 5$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $|\theta - 1260| > 5$ σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.05$.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \quad 1255 \leq \theta \leq 1265 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \ \theta < 1255 \text{ ή } \theta > 1265 \ .$$

Στην προηγούμενη άσκηση αποδείχτηκε ότι η πιθανοφάνεια της κανονικής κατανομής $N(\theta, \sigma^2)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων είναι:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i < c_1 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n} x_i > c_2 \\ 0, & \text{αν } c_1 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq c_2 \end{cases} \ ,$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_i}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_i}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n} X_i > c_2\right) = 0.05, \qquad i = 1,2 \ ,$$

δηλαδή:

$$1 - \mathrm{P}_{\theta_i}\left(c_1 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c_2\right) = 0.05 \Rightarrow \mathrm{P}_{\theta_i}\left(c_1 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c_2\right) = 0.95 \ ,$$

ή

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{c_1 - 4 \cdot 1255}{2\sqrt{5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 4 \cdot 1255}{2\sqrt{5}} \leq \frac{c_2 - 4 \cdot 1255}{2\sqrt{5}}\right) = 0.95 \\ \mathrm{P}\left(\frac{c_1 - 4 \cdot 1265}{2\sqrt{5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 4 \cdot 1265}{2\sqrt{5}} \leq \frac{c_2 - 4 \cdot 1265}{2\sqrt{5}}\right) = 0.95 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{c_1 - 5020}{2\sqrt{5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 5020}{2\sqrt{5}} \leq \frac{c_2 - 5020}{2\sqrt{5}}\right) = 0.95 \\ \mathrm{P}\left(\frac{c_1 - 5060}{2\sqrt{5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 5060}{2\sqrt{5}} \leq \frac{c_2 - 5060}{2\sqrt{5}}\right) = 0.95 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi\left(\frac{c_2-5020}{2\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-5020}{2\sqrt{5}}\right)=0.95\\ \Phi\left(\frac{c_2-5060}{2\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-5060}{2\sqrt{5}}\right)=0.95\end{aligned}\right\}.$$

Έστω: $z_{11}=\frac{c_1-5020}{2\sqrt{5}}$, $z_{12}=\frac{c_2-5020}{2\sqrt{5}}>0$ και $z_{21}=\frac{c_1-5060}{2\sqrt{5}}$, $z_{22}=\frac{c_2-5060}{2\sqrt{5}}>0$, τότε $\Phi(z_{12})-\Phi(z_{11})=\Phi(z_{22})-\Phi(z_{21})=0.95$. Επιπλέον, ισχύει ότι $z_{11}=z_{21}+4\sqrt{5}$ και $z_{12}=z_{22}+4\sqrt{5}$. Άρα $\Phi(z_{22}+4\sqrt{5})-\Phi(z_{21}+4\sqrt{5})=0.95$ και επειδή $z_{22}>0$ προκύπτει ότι $\Phi(z_{22}+4\sqrt{5})=1$, δηλαδή $\Phi(z_{21}+4\sqrt{5})=0.05$, οπότε $z_{21}+4\sqrt{5}=-1.64$ με συνέπεια $z_{21}=-10.58$ και προφανώς $z_{22}=-1.64$. Επομένως, $c_1=5012.67$ και $c_2=5067.33$. Τελικά η Ο.Ι.Ε. έχει τη μορφή:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}x_i<5012.67 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n}x_i>5067.33\\ 0, & \text{αν } 5012.67\le\sum_{i=1}^{n}x_i\le 5067.33\end{cases},$$

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{4}x_i=1269+1271+1263+1265=5068$. Άρα η μηδενική υπόθεση μπορεί να απορριφθεί. Αυτό γίνεται με επιφύλαξη, διότι η τιμή 5068 δεν απέχει και πολύ από την τιμή 5067.33.

Άσκηση 3.6

Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει πόσες φορές ανοίγει και κλείνει, χωρίς βλάβη, ένας διακόπτης και ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ ένα τυχαίο δείγμα από την παραπάνω κατανομή για το οποίο παρατηρήθηκε ότι $\bar{X}=16$. Να κατασκευαστεί η ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\theta\le 0.01$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta>0.01$ σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a}=0.05$.

Λύση

Η κατανομή της τ.μ. X είναι η γεωμετρική, δηλαδή:

$$f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1},\qquad x=1,2,\dots$$

και η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n\exp\left\{\ln(1-\theta)\sum_{i=1}^{n}x_i\right\},$$

όπου $n=15$. Συνεπώς ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q(\theta)=\ln(1-\theta)$, η οποία είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ. Άρα η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=-\sum_{i=1}^{15}x_i$. Η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο υποθέσεων είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{15}x_i<c\\ \delta, & \text{αν } \sum_{i=1}^{15}x_i=c\\ 0, & \text{αν } \sum_{i=1}^{15}x_i>c\end{cases},$$

όπου οι σταθερές c και δ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=0.05,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{15} x_i < c\right) + \delta \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{15} x_i = c\right) = 0.05 \ .$$

Από την άσκηση 1.1 (σελ. 45) είναι γνωστό ότι, αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ ακολουθούν γεωμετρική κατανομή, τότε η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή. Επομένως:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(T < c) + \delta \mathrm{P}_{\theta_0}(T = c) = 0.05 \ ,$$

δηλαδή:

$$\sum_{t=15}^{c-1} \binom{t-1}{14} 0.01^n 0.99^{t-15} + \delta \binom{c-1}{14} 0.01^n 0.99^{c-15} = 0.05 \ .$$

Από την προηγούμενη σχέση και με τη βοήθεια της συνάρτησης «NEGBINOM.DIST(912;15;0,01;TRUE)» του Excel υπολογίστηκαν οι σταθερές $c = 913 + 15 = 928$ και $\delta = 0.018$. Από το δείγμα προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{15} x_i = 15 \cdot 16 = 240 < 928$, δηλαδή ανήκει στην απορριπτική περιοχή της H_0. Άρα η πιθανότητα βλάβης είναι μεγαλύτερη της τιμής 0.01.

Κεφάλαιο 4 Ελεγχοσυναρτήσεις Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών

Σύνοψη

Στο 4[ο] κεφάλαιο δίνεται η έννοια του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και η ασυμπτωτική κατανομή του. Να σημειωθεί ότι η μέθοδος εύρεσης ελεγχοσυναρτήσεων με τη χρήση του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί αρκετούς ερευνητές. Στο κεφάλαιο υπάρχουν αρκετά παραδείγματα και ασκήσεις με τη βοήθεια των οποίων αποσαφηνίζεται η μέθοδος.

Προαπαιτούμενη γνώση

Για την κατανόηση όσων παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, ο αναγνώστης πρέπει να είναι εξοικειωμένος με τις έννοιες των πιθανοτήτων, των κατανομών, των εκτιμητών μεγίστης πιθανοφάνειας, των θεωρημάτων, των παραδειγμάτων και των ασκήσεων του 1ου κεφαλαίου. Επίσης, απαιτούνται στοιχειώδεις γνώσεις διαφορικού λογισμού. Ο αναγνώστης, που είναι εξοικειωμένος με τα παραπάνω αντικείμενα και θέλει να εμβαθύνει τις γνώσεις του, μπορεί να συμβουλευθεί τα βιβλία: «Statistical Inference, 2[nd] edition» των G. Casella και R.L. Berger (σελ. 119), «Theoretical Statistics» των D. R. Cox και D. V. Hinkley (σελ. 119), «Econometric applications of Maximum Likelihood methods» του J. S. Cramer (σελ. 119), «Statistical Inference. 2[nd] edition» των P. H. Garthwaite, I. T. Joliffe και B. Jones (σελ. 119), «Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks» του E. L. Lehmann (σελ. 119), « Statistical Theory, 4[th] edition » του B. W. Lindgren (σελ. 119), «Linear Statistical Inference and its Applications, 2[nd] edition» του C. R. Rao (σελ. 119) και «Essential of Statistical Inference» των G. A. Young και R. L. Smith (σελ. 119).

4.1. Εισαγωγή

Έστω το τ.δ. $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από την κατανομή $f(\underset{\sim}{x};\theta)$, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$ και $\omega \subset \Omega$. Ζητείται να ελεγχθεί η αλήθεια της υπόθεσης $\mathrm{H}_0\colon \theta \in \omega$ ως προς την εναλλακτική $\mathrm{H}_1\colon \theta \in \overline{\omega}$, $\omega \cup \overline{\omega} = \Omega$, σε κάποια σ.σ. a $(0 < \mathrm{a} < 1)$. Αν $\omega = \{\theta_0\}$ και $\overline{\omega} = \{\theta_1\}$, δηλαδή τα σύνολα ω και $\overline{\omega}$ είναι μονοσύνολα, ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια του λήμματος Neyman-Pearson (σελ. 119) και στηρίζεται στο λόγο πιθανοφανειών $\frac{L(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{L(\underset{\sim}{x};\theta_0)}$. Αν όμως τα σύνολα ω και $\overline{\omega}$ δεν είναι μονοσύνολα, τότε δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεμελιώδες λήμμα των Neyman-Pearson και χρησιμοποιείται μία μέθοδος παραπλήσια που θα αναφερθεί παρακάτω.

Έστω $L(\widehat{\omega}) = \sup\left\{L(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})\colon \underset{\sim}{\theta} \in \omega\right\}$ και $L\big(\widehat{\Omega}\big) = \sup\left\{L(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})\colon \underset{\sim}{\theta} \in \Omega\right\}$. Θα περίμενε κανείς, αν η υπόθεση H_0 είναι αληθής, τα δύο αυτά μέγιστα (το supremum συμπίπτει με τη μέγιστη τιμή, όταν το σύνολο ω είναι κλειστό) να συμπίπτουν. Γενικά, επειδή πάντα τα συμπεράσματα στηρίζονται σε κάποια δείγματα, θα περίμενε κανείς πάντα, όταν η H_0 είναι αληθής, οι δύο τιμές, δηλαδή $L(\widehat{\omega})$ και $L\big(\widehat{\Omega}\big)$ να είναι σχεδόν ίσες.

Είναι προφανές ότι, $\sup\left\{L(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})\colon \underset{\sim}{\theta} \in \omega\right\} = L(\underset{\sim}{\hat{\theta}}_\omega)$, όπου $\underset{\sim}{\hat{\theta}}_\omega$ είναι ο Ε.Μ.Π. του $\underset{\sim}{\theta}$, όταν $\underset{\sim}{\theta} \in \omega$ και $\sup\left\{L(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{\theta})\colon \underset{\sim}{\theta} \in \Omega\right\} = L\left(\underset{\sim}{\hat{\theta}}\right)$, όπου $\hat{\theta}$ είναι ο Ε.Μ.Π. του $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$ ορίζεται το πηλίκο:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L\big(\widehat{\Omega}\big)} = \frac{L\big(\hat{\theta}_\omega\big)}{L(\theta)}. \tag{4.1}$$

Προφανώς, $0 < \lambda \leq 1$. Αν η υπόθεση $\mathrm{H}_0\colon \theta \in \omega$ είναι αληθής αναμένονται μεγάλες τιμές του λ, ενώ όταν το λ παίρνει μικρές τιμές, φαίνεται «πιο πιθανό» να μην ισχύει η H_0. Επομένως, η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν ο λόγος λ παίρνει τιμές μικρότερες από μία σταθερά c, που προσδιορίζεται με τη βοήθεια της σ.σ. a.

Για να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς c, πρέπει να είναι γνωστή η κατανομή που ακολουθεί ο λόγος λ. Αν ο λόγος λ είναι συνάρτηση κάποιας στ.σ., της οποίας η κατανομή είναι γνωστή, τότε είναι δυνατό να βρεθεί «σχετικά εύκολα» η ελεγχοσυνάρτηση. Σε διαφορετική περίπτωση, αντί του λόγου λ χρησιμοποιείται η ποσότητα $-2\ln\lambda$, που ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή $\boldsymbol{X}^2$, και η περιοχή απόρριψης της υπόθεσης H_0 θα καθοριστεί από μία σταθερά c' για την οποία θα ισχύει ότι:

$$-2\ln\lambda > c'. \tag{4.2}$$

Οι ελεγχοσυναρτήσεις που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο ονομάζονται **Ελεγχοσυναρτήσεις Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών** (Γ.Λ.Π.) (generalized likelihood ratio). Προφανώς, για $\omega = \{\theta_0\}$ και $\overline{\omega} = \{\theta_1\}$ οι ελεγχοσυναρτήσεις γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών συμπίπτουν με τις ελεγχοσυναρτήσεις που δίνονται από το θεμελιώδες λήμμα Neyman-Pearson. Οι ελεγχοσυναρτήσεις Γ.Λ.Π., πολλές φορές έχουν βέλτιστες ιδιότητες, δηλαδή είναι ομοιόμορφα ισχυρότατες και αμερόληπτα ομοιόμορφα ισχυρότατες. Η κατασκευή της $L(\widehat{\Omega})$ ανάγεται ουσιαστικά στην εύρεση του Ε.Μ.Π. της $\underset{\sim}{\theta}$, ενώ της $L(\widehat{\omega})$ στην εύρεση μίας τιμής $\underset{\sim}{\hat{\theta}}_\omega$, που να μεγιστοποιεί την ποσότητα $L(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta})$, $\underset{\sim}{\theta} \in \omega$, πράγμα που πολλές φορές δεν είναι εύκολο. Βέβαια, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχει αυτή η δυσκολία διότι το ω λαμβάνεται ως μονοσύνολο, δηλαδή η μηδενική υπόθεση έχει τη μορφή: $\mathrm{H}_0\colon \theta = \theta_0$ με συνέπεια $L(\widehat{\omega}) = L(\theta_0)$.

4.2. Η κατανομή της Τυχαίας Μεταβλητής –2lnλ

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι, όταν η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0\colon \theta \in \omega$ είναι αληθής, τότε ασυμπωτικά η κατανομή της τ.μ. $-2\ln\lambda$ είναι η $\boldsymbol{\mathcal{X}^2}$. Η γενική περίπτωση, όπου το σύνολο Ω είναι ένα πολυδιάστατο σύνολο, είναι αρκετά περίπλοκη. Για το λόγο αυτό στη συγκεκριμένη παράγραφο, θα μελετηθεί η περίπτωση $\Omega \subset \mathbb{R}$ και $\omega = \{\theta_0\}$. Ακόμη, επειδή για την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες ομαλότητας, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν.

Έστω η τ.μ. X από κατανομή $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$, όπου το σύνολο Ω είναι ένα ανοικτό διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών και έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από την παραπάνω κατανομή. Οι συνθήκες ομαλότητας είναι:

1. Για όλα τα $x \in \mathbb{R} - N$, όπου N είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathrm{P}_\theta(\, x \in N) = 0$ και για κάθε $\theta \in \Omega$ υπάρχουν οι παράγωγοι: $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$, $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)$ και $\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x;\theta)$.
2. Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε: $\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln f(x;\theta)\right| < H(x)$ για κάθε $\theta \in \Omega$ και $E_\theta H(X) < M < +\infty$, για κάποιο M ανεξάρτητο του θ.
3. Για κάθε $\theta \in \Omega$ ισχύει ότι $E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right] = 0$.
4. Για κάθε $\theta \in \Omega$ ισχύει ότι: $E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right]^2 = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right] = I(\theta)$ και $0 < I(\theta) < +\infty$, όπου $I(\theta)$ είναι ο πληροφοριακός αριθμός του Fisher.

Θεώρημα 4.1

1. Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας, ότι το μέγεθος n του δείγματος είναι αρκούντως μεγάλο και ότι υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένος Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ του θ. Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\mathrm{H}_0\colon \theta \in \omega = \{\theta_0\}$ η ασυμπτωτική κατανομή της στ. σ. $-2\ln\lambda$ είναι η $\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2$, όταν η H_0 είναι αληθής, δηλαδή:
$$\mathrm{P}(-2\ln\lambda \le x) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{P}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2 \le x)$$
και η σταθερά c' στην ανισότητα (4.2) υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}) = \mathrm{P}_{\theta_0}(-2\ln\lambda > c')$$
με $c' = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{1;\mathrm{a}}^2$.
2. Αν το σύνολο Ω είναι ένα r-διάστατο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$, $r \ge 1$ και η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0\colon \underset{\sim}{\theta} \in \omega$, όπου ω είναι ένα m-διάστατο υποσύνολο του Ω ($m < r$), τότε εφόσον ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας και η H_0 είναι αληθής η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $-2\ln\lambda$ είναι η $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{r-m}^2$, δηλαδή:
$$\mathrm{P}(-2\ln\lambda \le x) \underset{n\to+\tau\infty}{\to} \mathrm{P}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{r-m}^2 \le x).$$
και η σταθερά c' στην ανισότητα (4.2) ισούται με $c' = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{r-m;\mathrm{a}}^2$.

Απόδειξη.
Η απόδειξη της περίπτωσης 2 παραλείπεται, γιατί ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Θα δοθεί μόνο η απόδειξη του 1.

Έστω $Y(x;\theta) = \ln f(x;\theta)$. Τότε:

$$Y'(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \varphi(x;\theta) \ ,$$

$$Y''(x;\theta) = \varphi'(x;\theta), \qquad Y'''(x;\theta) = \varphi''(x;\theta) \ .$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor τη συνάρτηση $Y(x;\theta)$ στην περιοχή του θ, με όρους μέχρι $3^{ης}$ τάξης, προκύπτει ότι:

$$Y(x;\theta_0) = Y(x;\theta) + (\theta_0-\theta)Y'(x;\theta) + \frac{1}{2!}(\theta_0-\theta)^2 Y''(x;\theta) + \frac{1}{3!}(\theta_0-\theta)^3 Y'''(x;\theta^*) \ ,$$

δηλαδή:

$$Y(x;\theta_0) = Y(x;\theta) + (\theta_0-\theta)\varphi(x;\theta) + \frac{1}{2!}(\theta_0-\theta)^2\varphi'(x;\theta) + \frac{1}{3!}(\theta_0-\theta)^3\varphi''(x;\theta^*) \ ,$$

όπου θ^* κατάλληλη τιμή μεταξύ θ και θ_0.

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση για τις τιμές x_i του δείγματος και αθροίζοντας τις n αυτές τιμές προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Y(x_i;\theta_0) = \sum_{i=1}^{n} Y(x_i;\theta) + (\theta_0-\theta)\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i;\theta) + \frac{1}{2!}(\theta_0-\theta)^2\sum_{i=1}^{n}\varphi'(x_i;\theta) \\ + \frac{1}{6}(\theta_0-\theta)^3\sum_{i=1}^{n}\varphi''(x_i;\theta^*).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Από τη συνθήκη ομαλότητας 2 ισχύει ότι:

$$|\varphi''(x_i;\theta^*)| < H(x_i) \ ,$$

όπου $E_\theta H(x) < M < +\infty$, για κάποιο M ανεξάρτητο του θ. Επομένως, υπάρχει κατάλληλο λ^*, $|\lambda^*| \le 1$, τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n}\varphi''(x_i;\theta^*) = \lambda^*\sum_{i=1}^{n}H(x_i)$ και η (4.3) γίνεται:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Y(x_i;\theta_0) = \sum_{i=1}^{n} Y(x_i;\theta) + (\theta_0-\theta)\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i;\theta) + \frac{1}{2!}(\theta_0-\theta)^2\sum_{i=1}^{n}\varphi'(x_i;\theta) \\ + \frac{1}{6}(\theta_0-\theta)^3\lambda^*\sum_{i=1}^{n}H(x_i) \ .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Αν $\hat\theta$ είναι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ, τότε από τις ιδιότητες των Ε.Μ.Π. [Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική* (σελ. 119)], ισχύει ότι:

$$\hat\theta \underset{n\to+\infty}{\overset{P_\theta}{\to}} \theta \ .$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge N$ να ισχύει:

$$P\left(\left|\hat\theta-\theta\right| < \varepsilon\right) > 1-\varepsilon \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (4.4) το θ με $\hat\theta$ προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} Y(x_i;\theta_0) = \sum_{i=1}^{n} Y\left(x_i;\hat\theta\right) + \frac{1}{2!}\left(\theta_0-\hat\theta\right)^2\sum_{i=1}^{n}\varphi'\left(x_i;\hat\theta\right) + \frac{1}{6}\left(\theta_0-\hat\theta\right)^3\tilde\lambda\sum_{i=1}^{n}H(x_i) \ ,$$

διότι $\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(x_i;\hat\theta\right) = 0$, αφού ο $\hat\theta$ είναι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ και $\tilde\lambda$ είναι η αντίστοιχη τιμή του λ^*, όταν $\theta = \hat\theta$. Επειδή $Y(x_i;\theta) = \ln f(x_i;\theta)$ προκύπτει ότι:

$$-2\ln\lambda = -2\left[\ln L\left(\underset{\sim}{x};\theta_0\right) - \ln L\left(\underset{\sim}{x};\hat\theta\right)\right] = -2\left[\sum_{i=1}^{n}Y(x_i;\theta_0) - \sum_{i=1}^{n}Y\left(x_i;\hat\theta\right)\right] , \tag{4.5}$$

δηλαδή:

$$-2\ln\lambda = -\left[\sqrt{n}\left(\hat\theta-\theta_0\right)\right]^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi'\left(x_i;\hat\theta\right) + \frac{1}{3}\left[\sqrt{n}\left(\hat\theta-\theta_0\right)\right]^2\left(\hat\theta-\theta_0\right)\tilde\lambda\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(x_i) \ .$$

Όμως:

$$-\sqrt{n}\left(\hat\theta-\theta_0\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} N\left(0, \frac{1}{I(\theta_0)}\right) ,$$

ή

$$-\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} \frac{X}{\sqrt{I(\theta_0)}} \ ,$$

όπου η τ.μ. $X \sim N(0,1)$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\right]^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} \frac{X^2}{I(\theta_0)} \ ,$$

όπου η τ.μ. $X^2 \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2$, δηλαδή:

$$\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\right]^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} \frac{\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2}{I(\theta_0)} \ . \tag{4.6}$$

Αν υποτεθεί ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi'\left(x_i;\hat{\theta}\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}}{\to}} I(\theta_0) \ , \tag{4.7}$$

τότε από τα θεωρήματα σύγκλισης προκύπτει ότι:

$$-\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\right]^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi'\left(x_i;\hat{\theta}\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} \boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2 \ . \tag{4.8}$$

Επειδή ακόμη $\hat{\theta}-\theta_0 \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}_{\theta_0}}{\longrightarrow}} 0$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(x_i) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}_{\theta_0}}{\longrightarrow}} E_{\theta_0}H(X)$ και $\left|\tilde{\lambda}\right| < 1$ η σχέση (4.6) συνεπάγεται ότι:

$$\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\right]^2 \left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\tilde{\lambda}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(x_i) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{K.N.}}{\longrightarrow}} 0 \ ,$$

δηλαδή:

$$\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\right]^2 \left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\tilde{\lambda}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(x_i) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}}{\to}} 0 \ . \tag{4.9}$$

Από τις σχέσεις (4.5), (4.8) και (4.9) προκύπτει ότι:

$$\text{P}_{\theta_0}(-2\ln\lambda \le x) \underset{n\to+\infty}{\to} \text{P}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2 \le x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αποδεικνύοντας ότι ο ισχυρισμός (4.7) είναι αληθής. Αν η συνάρτηση $\varphi'\left(x;\hat{\theta}\right)$ αναπτυχθεί σε σειρά Taylor, τότε:

$$\varphi'\left(x;\hat{\theta}\right) = \varphi'(x;\theta_0) + (\hat{\theta}-\theta_0)\varphi''(x;\theta_0) \ ,$$

όπου θ^* κατάλληλη τιμή μεταξύ θ_0 και $\hat{\theta}$. Αθροίζοντας προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi'\left(x_i;\hat{\theta}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi'\,(x_i;\theta_0) = \left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\lambda^* \sum_{i=1}^{n} H(x_i) \,,$$

όπου λ^* κατάλληλη τιμή τέτοια, ώστε $0 < |\lambda^*| \le 1$.

Προηγουμένως αναφέρθηκε ότι:

$$\hat{\theta} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}}{\to}} \theta_0 \ .$$

Επομένως:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi'\,(x_i;\theta_0) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}}{\to}} -I(\theta_0)$$

και

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(x_i) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{P}}{\to}} E_{\theta_0}H(X) \ .$$

Οι παραπάνω συγκλίσεις συνεπάγονται την αλήθεια της πρότασης (4.7) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Παρατήρηση 4.1

Το θεώρημα 4.1 (σελ. 110) είναι διατυπωμένο ως δύο ξεχωριστές προτάσεις. Φυσικά, η δεύτερη είναι γενικότερη της πρώτης. Προφανώς η πρώτη προκύπτει ως μερική περίπτωση της δεύτερης (για $r = 1$ και $m = 0$). Στη δεύτερη περίπτωση, όπου το σύνολο Ω είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^r$ για τον υπολογισμό του $L(\Omega)$, δηλαδή για τον υπολογισμό του $\hat{\theta}$ απαιτούνται r υπολογισμοί για τις συνιστώσες του $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$. Εφόσον ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0 και το $\underset{\sim}{\theta}$ θεωρείται ότι ανήκει στο ω, ένα m-διάστατο υποσύνολο του Ω, τότε, για τον υπολογισμό του $L(\omega)$ απαιτούνται m υπολογισμοί, ουσιαστικά για την εκτίμηση m ανεξάρτητων παραμέτρων. Άρα, αν η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή, υπολείπονται $r - m$ υπολογισμοί (εκτιμήσεις). Συνεπώς, οι βαθμοί ελευθερίας της Χι-τετράγωνο κατανομής της στ.σ. $-2\ln\lambda$ είναι $r - m$ (πλήθος εκτιμώμενων παραμέτρων για τον υπολογισμό του $L(\Omega)$ μείον πλήθος εκτιμώμενων παραμέτρων για τον υπολογισμό του $L(\omega)$. Όλα, όσα αναφέρονται, θα διευκρινιστούν με τη βοήθεια των παραδειγμάτων. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι, αν είναι γνωστή η κατανομή του λόγου των πιθανοφανειών του λ, τότε δε χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί η ασυμπτωτική κατανομή του $-2\ln\lambda$.

Παράδειγμα 4.1

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή βήτα $\beta(1, \theta)$. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \neq \theta_0$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η σ.π.π. είναι:

$$f(x;\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1} \quad , \qquad x \in (0,1) \ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-x_i)^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\theta-1} \ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) \, .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)} \ .$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)\right) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}$.

Επομένως:

$$L(\hat{\Omega}) = \hat{\theta}^n \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\hat{\theta}-1} \ ,$$

$$L(\hat{\omega}) = \theta_0^n \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\theta_0-1}$$

και:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n \frac{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\theta_0-1}}{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\hat{\theta}-1}} \ ,$$

δηλαδή:

$$\ln\lambda = n\ln\frac{\theta_0}{\hat{\theta}} + (\theta_0 - \hat{\theta})\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) = n\ln\theta_0 + n + n(-\ln\hat{\theta} - \frac{\theta_0}{\hat{\theta}}) \ ,$$

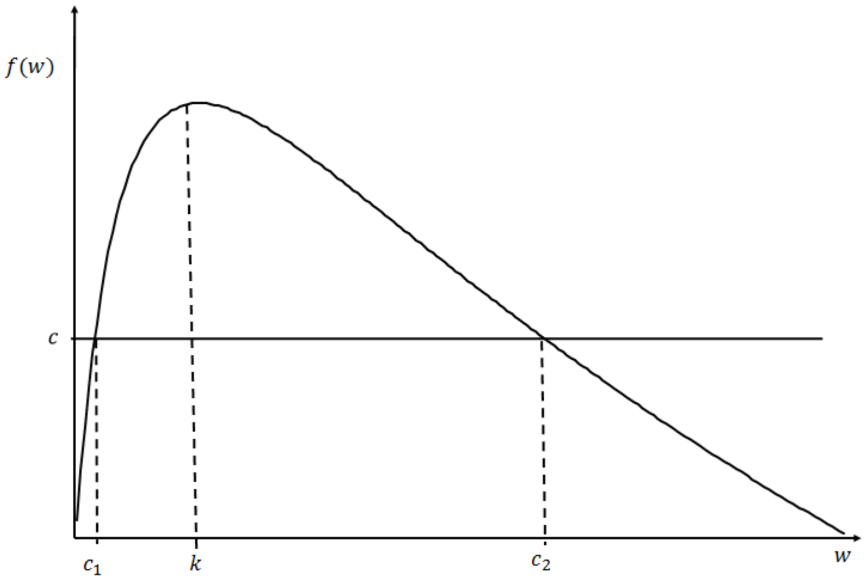
επειδή $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}$.

Προφανώς το μέγιστο του λ καθορίζεται από τη συνάρτηση $f(w) = -\ln w - \frac{k}{w}$, $w > 0$, $k > 0$, όπου $\hat{\theta} = w$ και $\theta_0 = k$. Η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $w = k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = -\frac{1}{w} + \frac{k}{w^2} = 0 \Rightarrow w = k \ ,$$

$$f''(w) = \frac{1}{w^2} - \frac{2k}{w^3} \Rightarrow f''(w)|_{w=k} = -\frac{1}{w^2} < 0 \ .$$

Στο σχήμα 4.1 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w) = -\ln w - \frac{k}{w}$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές c_1 και c_2.



Σχήμα 4.1 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(w)$ παραδείγματος 4.1.

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$ ή ισοδύναμα όταν $\hat{\theta} < c_1$ ή $\hat{\theta} > c_2$, δηλαδή $-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)} < c_1$ ή $-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)} > c_2$ ή ισοδύναμα $-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) > c_1^*$ ή $-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) < c_2^*$, όπου τα κρίσιμα σημεία c_1^* και c_2^* ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) > c_1^*\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) < c_2^*\right) = \mathrm{a}$$

$$f\left(\frac{c_1^*}{n}\right) = f\left(\frac{c_2^*}{n}\right) ,$$

και:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) > c_1^*\right) = \frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) > c_2^*\right) .$$

Από την άσκηση 1.3 (σελ. 46), προκύπτει ότι η τ.μ. $-2\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$ κατανομή. Από τον ορισμό του σημείου $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2$: $\mathrm{P}(\boldsymbol{\mathcal{X}}^2 > \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2) = \mathrm{a}$ προκύπτει ότι:

$$2\theta_0 c_1^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2, \qquad 2\theta_0 c_2^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2$$

και η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } -2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)<\boldsymbol{X}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \text{ ή } -2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)>\frac{1}{2\theta_0}\boldsymbol{X}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} .$$

Παράδειγμα 4.2

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ που ακολουθεί την εκθετική κατανομή $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})$, $x>0$, $\theta\in\Omega=\mathbb{R}^+$. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta=\theta_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta\neq\theta_0$ σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a}=0.05$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x_i}{\theta}\right\}=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}\right\} ,$$

Στο παράδειγμα 1.12 (σελ. 42) αποδείχτηκε ότι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta}=\bar{X}$. Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega})=\frac{1}{\bar{X}^n}\exp\{-n\} ,$$

ενώ:

$$L(\widehat{\omega})=L(\theta_0)=\left(\frac{1}{\theta_0}\right)^n\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta_0}\right\} .$$

Άρα:

$$\lambda=\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}=\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}\right)^n\exp\left\{n-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta_0}\right\}=\left(\frac{\bar{X}}{\theta_0}\right)^n\exp\left\{n-\frac{n\bar{X}}{\theta_0}\right\} ,$$

δηλαδή:

$$\lambda^{\frac{1}{n}}=\frac{\bar{X}}{\theta_0}\exp\left\{1-\frac{\bar{X}}{\theta_0}\right\} .$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(w)=\frac{w}{k}e^{1-\frac{w}{k}}$ παρουσιάζει μέγιστο για $w=k$, διότι:

$$f'(w)=-\frac{1}{k^2}(w-k)e^{1-\frac{w}{k}}=0\Rightarrow w=k ,$$

$$f''(w)|_{w=k}=\frac{1}{k^3}(w-2k)e^{1-\frac{w}{k}}<0 .$$

Συνεπώς, η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $\lambda<c$ ή ισοδύναμα όταν $\bar{X}<c_1$ ή όταν $\bar{X}>c_2$. Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X}<c_1)+\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X}>c_2) .$$

Από την άσκηση 1.2 (σελ. 46) είναι γνωστό ότι, αν οι τ.μ. X_i ακολουθούν την κατανομή $G\left(1,\frac{1}{\theta}\right)$, τότε οι τ.μ. $\frac{2}{\theta}X_i$ ακολουθούν την $\boldsymbol{X}_2^2$ κατανομή και η τ.μ. $\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ακολουθεί την $\boldsymbol{X}_{2n}^2$ κατανομή. Άρα:

$$\mathrm{a}=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i<nc_1\right)+\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i>nc_2\right)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}X_i<\frac{2}{\theta_0}nc_1\right)+\mathrm{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{2}{\theta_0}nc_2\right) ,$$

όπου οι τιμές των c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{\theta_0}\exp\left\{1-\dfrac{c_1}{\theta_0}\right\} = \dfrac{c_2}{\theta_0}\exp\left\{1-\dfrac{c_2}{\theta_0}\right\} \\ \displaystyle\int_{\frac{2}{\theta_0}nc_1}^{\frac{2}{\theta_0}nc_2} g_{2n}(x)dx = 1-\mathrm{a} \end{cases} ,$$

με $g_{2n}(x)$ να είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$.

Προφανώς, η λύση του παραπάνω συστήματος δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Για το λόγο αυτό οι τιμές των c_1 και c_2 θα υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < nc_1\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > nc_2\right) ,$$

δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{2}{\theta_0}nc_1\right) = \mathrm{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{2n}{\theta_0}nc_2\right) .$$

Από τον ορισμό του σημείου $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2$: $\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}^2 > \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;\mathrm{a}}^2\right) = \mathrm{a}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{2}{\theta_0}nc_1 = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2, \qquad \frac{2}{\theta_0}nc_2 = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \le \frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n} X_i \ge \frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Παράδειγμα 4.3

Η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{B(n,\theta)}$, $\boldsymbol{\theta \in \Omega = (0,1)}$. Με τη βοήθεια της ελεγχοσυνάρτησης του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών να γίνει ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta = \theta_0}$, έναντι της εναλλακτικής $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta \neq \theta_0}$.

Λύση

Η σ.π. της διωνυμικής κατανομής είναι

$$f(x;\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} , \qquad x = 0,1,\dots,n , \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Η τιμή της παραμέτρου θ που μεγιστοποιεί την $f(x;\theta)$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{1-\theta}{n-x} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n} ,$$

δηλαδή, ο Ε.Μ.Π. του θ είναι $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$. Συνεπώς:

$$L(\widehat{\Omega}) = \binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x(1-\frac{x}{n})^{n-x} .$$

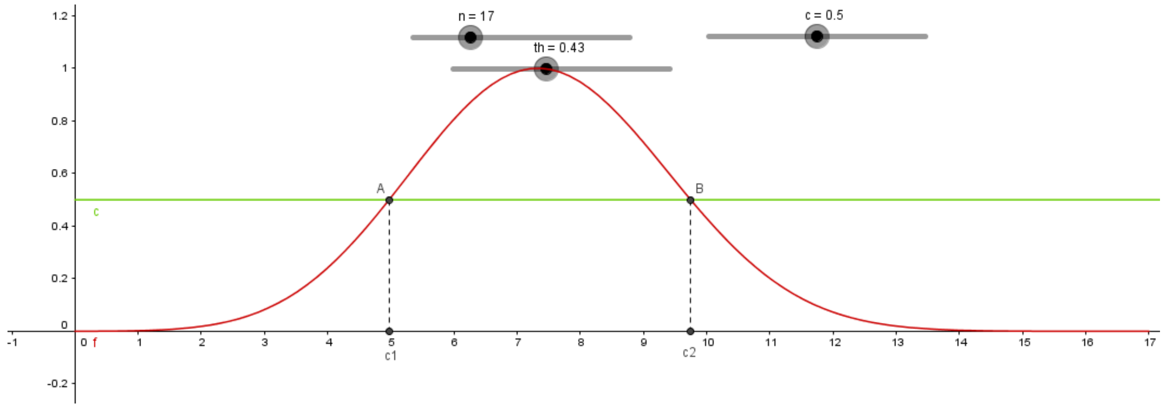
Επιπλέον, επειδή $\omega = \{\theta_0\}$, προκύπτει ότι:

$$L(\widehat{\omega}) = \binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x} .$$

Επομένως:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}}{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x(1-\frac{x}{n})^{n-x}} = n^n\left(\frac{\theta_0}{x}\right)^x\left(\frac{1-\theta_0}{n-x}\right)^{n-x} = \lambda(x) .$$

Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\lambda(x)$ είναι 1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\lambda(x)$ για διάφορες τιμές των n, θ_0 και c δίνεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης λ(x) παραδείγματος 4.3.*

Συνεπώς, η συνθήκη $\lambda < c$ ισοδυναμεί με $x < c_1$ ή $x > c_2$. Οι τιμές των c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\lambda(c_1) = \lambda(c_2)$$

και

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi(X) = \mathrm{P}_{\theta_0}(X < c_1) + \mathrm{P}_{\theta_0}(X > c_2) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_2)\ .$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι πολύ δύσκολο να λυθεί, και επειδή η συνάρτηση είναι σχεδόν συμμετρική ως προς την ευθεία $x = n\theta_0$, οι συνθήκες μπορούν να διαφοροποιηθούν ως εξής:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(X < c_1) \leq \frac{\mathrm{a}}{2}\ , \qquad \mathrm{P}_{\theta_0}(X > c_2) \leq \frac{\mathrm{a}}{2}\ .$$

Το σημείο c_1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\mathrm{P}_{\theta_0}(X < c_1) \leq \frac{\mathrm{a}}{2}$ και το σημείο c_2 είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\mathrm{P}_{\theta_0}(X \leq c_2) \geq 1 - \frac{\mathrm{a}}{2}$. Επιπλέον, οι σταθερές δ_1 και δ_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\delta_1 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(X < c_1)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_1)}\ , \qquad \delta_2 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(X > c_2)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(X = c_2)}\ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > c_2 \ \text{ή}\ \ x < c_1 \\ \delta_i, & x = c_i, \qquad i = 1{,}2\ . \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.4

Η τυχαία μεταβλητή. $\underset{\sim}{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_r)$, $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{X}_i = n$ ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με παράμετρο $\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}}' = (p_1, p_2, \dots, p_r) \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega} = \left\{\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}}' = (p_1, p_2, \dots, p_r),\ p_j > 0,\ \sum_{j=1}^{r} p_j = 1\right\}$. Να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \dots, p_r = p_{r0}$, H_1: $p_i \neq p_{i0}$, για ένα τουλάχιστον i, $i = 1, 2, \dots, r$, με τη μέθοδο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Η από κοινού σ.π. των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_r$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}\ , \qquad \sum_{j=1}^{r} p_j = 1\ , \qquad \sum_{j=1}^{r} x_j = n\ .$$

Ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\theta}\right) = \ln n! - \sum_{j=1}^{r} \ln(x_j)! + \sum_{j=1}^{r} x_j \ln p_j \,.$$

Πρέπει να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα $\ln L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\theta})$ κάτω από τη συνθήκη $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$. Έστω η συνάρτηση:

$$A = \ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\theta}\right) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{r} p_j - 1\right) ,$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrance. Τότε:

$$\frac{\partial A}{\partial p_j} = \frac{x_j}{p_j} - \lambda = 0 \ , \qquad j = 1,2, \dots r \ ,$$

δηλαδή:

$$x_j = \lambda p_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{r} x_j = \lambda \sum_{j=1}^{r} p_j \Rightarrow n = \lambda \Rightarrow \hat{p}_j = \frac{x_j}{n} \ , \qquad j = 1,2, \dots r \ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ είναι:

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}}' = \left(\frac{X_1}{n}, \frac{X_2}{n}, \dots, \frac{X_r}{n}\right) .$$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση A στο σημείο $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$, θα πρέπει ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ με στοιχεία c_{ij} τέτοια ώστε:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j} \ , \qquad i, j = 1,2, \dots r \ ,$$

να είναι αρνητικά ορισμένος. Ισχύει ότι:

$$c_{ij} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{x_i}{p_i} - n\right) = -\delta_{ij} \frac{x_i}{p_i^2} \ , \qquad i, j = 1,2, \dots r \ ,$$

όπου $\delta_{ij} = 1$, αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$, αν $i \neq j$.

Η τιμή του στοιχείου c_{ij} στο σημείο $\hat{p}_i = \frac{x_i}{n}$ είναι:

$$c_{ij} = -\delta_{ij} \frac{n^2}{x_i},$$

και η τιμή του πίνακα $\boldsymbol{C}$ στο σημείο $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ είναι:

$$\boldsymbol{C} = -n^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_r} \end{bmatrix} .$$

Η τετραγωνική μορφή

$$y' \boldsymbol{C} y = -n^2 \sum_{j=1}^{r} \frac{y_i^2}{x_i}$$

είναι αρνητική. Συνεπώς, ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ είναι αρνητικά ορισμένος και ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$ είναι:

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}}' = \left(\frac{X_1}{n}, \frac{X_2}{n}, \dots, \frac{X_r}{n}\right) .$$

Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0: $p_1 = p_{10}$, $p_2 = p_{20}$, …, $p_r = p_{r0}$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $p_i = p_{i0}$ για ένα τουλάχιστον $i = 1,2, \dots, r$ ισχύει ότι:

$$L(\widehat{\Omega}) = \frac{n!}{x_1! \, x_2! \cdots x_r!} \hat{p}_1^{x_1} \hat{p}_2^{x_2} \cdots \hat{p}_r^{x_r}$$

και

$$L(\widehat{\omega}) = \frac{n!}{x_1! \, x_2! \cdots x_r!} p_{10}^{x_1} p_{20}^{x_2} \cdots p_{r0}^{x_r} \ ,$$

με συνέπεια ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών να είναι:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_r!}p_{10}^{x_1}p_{20}^{x_2}\cdots p_{r0}^{x_r}}{\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_r!}\hat{p}_1^{x_1}\hat{p}_2^{x_2}\cdots \hat{p}_r^{x_r}} = \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{p_{i0}}{\hat{p}_i}\right)^{x_i} .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1 (σελ. 110), η ποσότητα $-2\ln\lambda$ ακολουθεί την $\boldsymbol{X}^2_{m-k}$ κατανομή, όπου $m = \dim\Omega = r-1$ και $k = \dim\omega = 0$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $-2\ln\lambda > \boldsymbol{X}^2_{r-1;\mathrm{a}}$ και η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } -2\ln\sum_{i=1}^{r} x_i \ln\frac{np_{i0}}{x_i} > \boldsymbol{X}^2_{r-1;\mathrm{a}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Casella, G. & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference, 2nd edition*. Thomson Learning.

Cox, D. R. & Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall.

Cramer, J. S. (1986). *Econometric applications of Maximum Likelihood methods*. Cambridge University Press.

Garthwaite, P. H., Joliffe, I. T. & Jones, B. (2002). *Statistical Inference. 2nd edition*. Oxford University Press.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Lehmann, E.L. (1975). *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Holden-Day, San Francisco.

Lindgren, B. W. (1993). *Statistical Theory, 4th edition*. Chapman and Hall.

Neyman. J. & Pearson, E.S. (1928). "On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference". *Biometrika 20A*, 175-240 and 263-294.

Neyman. J. & Pearson, E.S. (1933). "On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses". *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 236 333-380.

Pearson, K. (1900). "On the criterion that a given system of derivations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling". *Phil. Mag. Ser.* (5), 50, 157-172.

Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications, 2nd edition*. Wiley, New York.

Young, G. A. & Smith, R. L. (2005). *Essential of Statistical Inference*. Cambridge University Press.

Λυμένες Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

Άσκηση 4.1

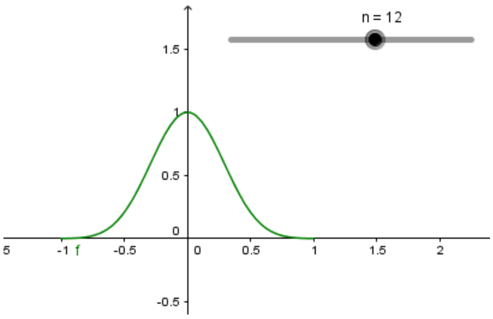
Έστω X τυχαία μεταβλητή από διωνυμική κατανομή με n δοκιμές και πιθανότητα επιτυχίας p .

1. **Να υπολογιστεί ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών για τον έλεγχο των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\theta = 0.5}$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta \neq 0.5}$.**
2. **Να αποδειχθεί ότι ο έλεγχος οδηγεί σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης για μεγάλες τιμές της ποσότητας $|X - n/2|$.**

3. **Χρησιμοποιώντας την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X κάτω από τη μηδενική υπόθεση να ερμηνευτεί η στάθμη σημαντικότητας η οποία αντιστοιχεί στην κρίσιμη περιοχή $|X - n/2| > c$.**
4. **Αν $n = 10$ και το κρίσιμο σημείο είναι $c = 2$ ποια είναι η στάθμη σημαντικότητας του ελέγχου;**
5. **Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική κατανομή να βρεθεί η στάθμη σημαντικότητας για $n = 100$ και το κρίσιμο σημείο είναι $c = 10$.**

Λύση

1. Από το παράδειγμα 4.1 (σελ. 113) και για $\theta = 0.5$ ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών είναι:
$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\binom{n}{x} 0.5^x 0.5^{n-x}}{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x (1-\frac{x}{n})^{n-x}} = \left(\frac{0.5n}{x}\right)^x \left(\frac{0.5n}{n-x}\right)^{n-x} .$$
2. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:
$$\lambda = \left[\left(\frac{2x}{n}\right)^{-\frac{2x}{n}} \left(2 - \frac{2x}{n}\right)^{-2+\frac{2x}{n}}\right]^{\frac{n}{2}} .$$
Έστω $1 + u = \frac{2x}{n}$. Τότε:
$$\lambda = \left[(1+u)^{-(1+u)}(1-u)^{-(1-u)}\right]^{\frac{n}{2}} .$$
Η συνάρτηση λ για όλες τις τιμές του n έχει γραφική παράσταση που δίνεται από το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.3 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης λ(x) άσκησης 4.1.*

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης λ είναι συμμετρική ως προς $u = 0$ και έχει μέγιστο για $u = 0$. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν η ποσότητα λ είναι μικρή, δηλαδή όταν για την ποσότητα $u = \frac{2x}{n} - 1$ ισχύει $u < -c'$ ή η $u > c'$ ή ισοδύναμα όταν $\left|\frac{2x}{n} - 1\right| > c'$. Η ποσότητα $|\frac{2x}{n} - 1|$ παίρνει μεγάλες τιμές, όταν, ισοδύναμα, η ποσότητα $|x - \frac{n}{2}|$ παίρνει μεγάλες τιμές.
3. Η σ.σ. a του έλεγχου, για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, δίνεται από τη σχέση:
$$\mathrm{P}\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| > c \mid \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{a}$$
και υπολογίζεται από τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής (παράρτημα B, πίνακας B6, σελ. 221) για $p = \theta_0 = 0.5$.
4. Για $n = 10$ και $c = 2$ από την προηγούμενη σχέση προκύπτει:
$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(|X-5| > 2 | \mathrm{H}_0) = \mathrm{P}_{\theta_0}(X - 5 > 2) + \mathrm{P}_{\theta_0}(X - 5 < -2) ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}_{\theta_0}(X > 7) + \mathrm{P}_{\theta_0}(X < 3) = 1 - \mathrm{P}_{\theta_0}(X \le 7) + \mathrm{P}_{\theta_0}(X \le 2) \ .$$

Από τον πίνακα Β6 (σελ. 221), εύκολα υπολογίζεται ότι:

$$\mathrm{a} = 1 - 0.945 + 0.055 = 0.110.$$

5. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής $B(100{,}0.5)$ από την κανονική κατανομή προκύπτει η $N(100 \cdot 0.5{,}100 \cdot 0.5 \cdot 0.5)$, δηλαδή η $N(50, 5^2)$. Επομένως, η τ.μ. $Z = \frac{X-50}{5}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0{,}1)$. Στην περίπτωση αυτή, για $n = 100$ και $c = 10$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(|X - 50| > 10) = \mathrm{P}(X - 50 > 10) + \mathrm{P}(X - 50 < -10) \ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(X > 60) + \mathrm{P}(X < 40) = \mathrm{P}\left(\frac{X-50}{5} > \frac{60-50}{5}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{X-50}{5} < \frac{40-50}{5}\right) \ ,$$

ή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(Z > 2) + \mathrm{P}(Z < -2) = 2\mathrm{P}(Z < -2) \ .$$

Από τον πίνακα Β1 (σελ. 214), υπολογίζεται ότι:

$$\mathrm{a} = 2 \cdot 0.0228 = 0.0456 \ .$$

Άσκηση 4.2

Η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\boldsymbol{f(x;\theta) = \theta\exp(-\theta x)}$, $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{\theta \in \Omega = \mathbb{R}_+^*}$. Αν η συνολική διάρκεια ζωής 25 εξαρτημάτων ήταν $\boldsymbol{\sum_{i=1}^n X_i = 30}$, να ελεγχθεί αν η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ μπορεί να είναι $\boldsymbol{\theta_0 = 5}$, σε στάθμη σημαντικότητας $\boldsymbol{\mathrm{a} = 0.05}$.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta \exp\{-x_i\theta\} = \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \ ,$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{X}} \ .$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$.

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \frac{1}{\bar{X}^n} \exp\{-n\} \ ,$$

$$L(\widehat{\omega}) = \theta_0^n \exp\left\{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

και:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\theta_0^n \exp\{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\}}{\frac{1}{\bar{X}^n}\exp\{-n\}} = (\theta_0 \bar{X})^n \exp\{n - n\theta_0\bar{X}\} = (e\theta_0)^n \left(\bar{X} e^{-\theta_0 \bar{X}}\right)^n \ .$$

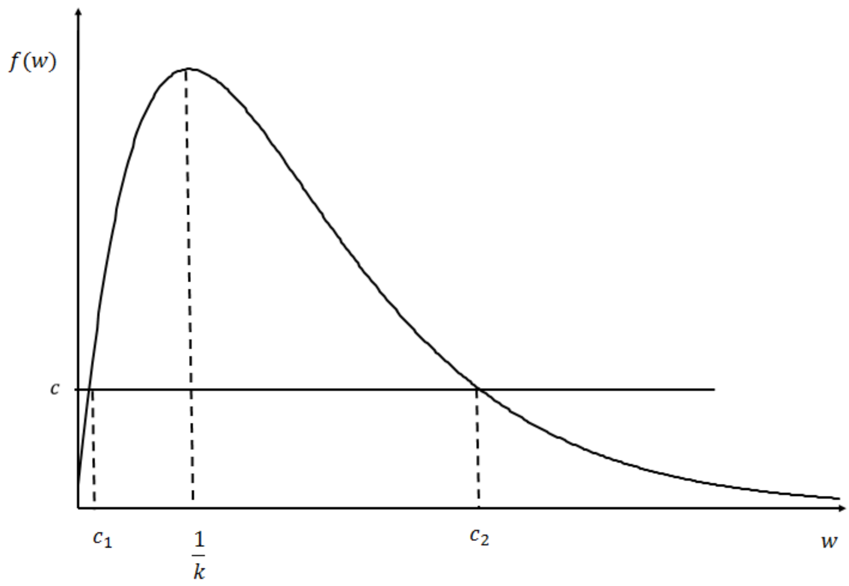
Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\left(\bar{X}e^{-\theta_0\bar{X}}\right)^n < c' \Rightarrow \bar{X}e^{-\theta_0\bar{X}} < c'' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i\, e^{-\frac{\theta_0}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} < c''' \ .$$

Η συνάρτηση $f(w) = we^{-kw}$, $k > 0$, $w > 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $w = \frac{1}{k}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = e^{-kw}(1 - kw) = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{k},$$
$$f''(w)\big|_{w=\frac{1}{k}} = ke^{-kw}(kw - 2) < 0 \ .$$

Στο σχήμα 4.4 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w) = we^{-kw}$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές c_1 και c_2.



Σχήμα 4.4 *Γραφική παράσταση συνάρτησης f(w) άσκησης 4.2.*

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$0 < \bar{X} < c_1 \quad \text{ή} \quad \bar{X} > c_2 \ ,$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$c_1 e^{-\theta_0 c_1} = c_2 e^{-\theta_0 c_2}$$

και

$$\mathrm{P}(\bar{X} < c_1|\theta_0) + \mathrm{P}(\bar{X} > c_2|\theta_0) = \mathrm{a} \ .$$

Από την άσκηση 1.2 (σελ. 46) είναι γνωστό ότι, αν οι τ.μ. X_i ακολουθούν την κατανομή $G(1, \theta)$, τότε οι τ.μ. $2\theta X_i$ ακολουθούν την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2$ και η τ.μ. $2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$. Άρα:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < nc_1\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > nc_2\right) \ ,$$

όπου οι τιμές των c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} c_1 e^{-\theta_0 c_1} = c_2 e^{-\theta_0 c_2} \\ \displaystyle\int_{2\theta_0 nc_1}^{2\theta_0 nc_2} g_{2n}(x)dx = 1 - \mathrm{a} \end{cases} .$$

όπου $g_{2n}(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$.

Προφανώς, η λύση του παραπάνω συστήματος δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Για το λόγο αυτό οι τιμές των c_1 και c_2 θα υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < nc_1\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > nc_2\right) ,$$

δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}\left(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i < 2n\theta_0 c_1\right) = \mathrm{P}\left(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i > 2n\theta_0 c_2\right) .$$

Από την κατανομή της $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$ προκύπτει ότι:

$$2n\theta_0 c_1 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} , \qquad 2n\theta_0 c_2 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}} .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{2\theta_0} \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ \text{ ή } \ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2\theta_0} \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Για $n = 25$ και $\mathrm{a} = 0.05$ προκύπτει, παράρτημα Β, πίνακας Β3 (σελ. 216), $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{50;0.975} = 32.3574$ και $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{50;0.025} = 71.4202$. Επιπλέον, επειδή $\theta_0 = 5$, ισχύει $\frac{1}{10}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{50;0.975} = 3.23574$ και $\frac{1}{10}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{50;0.025} = 7.14202$. Αλλά $\sum_{i=1}^{n} X_i = 30 > \frac{1}{10}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{50;0.025}$ με συνέπεια να μη γίνεται δεκτή η τιμή της παραμέτρου $\theta_0 = 5$.

Άσκηση 4.3

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli $B(1,\theta)$. Με τη βοήθεια ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \neq \theta_0$ σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.05$. Να γίνει εφαρμογή για $\theta_0 = 0.85$, $n = 100$ και $\sum_{i=1}^{n} X_i = 90$.

Λύση

Η σ.π. της κατανομής $B(1,\theta)$ είναι:

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \qquad x = 0,1, \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} .$$

Για $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \theta^t (1-\theta)^{n-t} .$$

Από το παράδειγμα 1.11 είναι γνωστό ότι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = \bar{X}$. Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \bar{X}^t (1-\bar{X})^{n-t} .$$

Επειδή $\omega = \{\theta_0\}$ προκύπτει ότι:

$$L(\widehat{\omega}) = \theta_0^t (1-\theta_0)^{n-t} .$$

Συνεπώς:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\theta_0^t (1-\theta_0)^{n-t}}{\bar{X}^t (1-\bar{X})^{n-t}} = \left(\frac{\theta_0}{\bar{X}}\right)^t \left(\frac{1-\theta_0}{1-\bar{X}}\right)^{n-t} .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\theta_0}{\bar{X}}\right)^{n\bar{X}} \left(\frac{1-\theta_0}{1-\bar{X}}\right)^{n(1-\bar{X})} < c \Rightarrow n\bar{X}\ln\frac{\theta_0}{\bar{X}} + n(1-\bar{X})\ln\frac{1-\theta_0}{1-\bar{X}} < c' .$$

Αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι η συνάρτηση $f(w) = nw\ln\frac{k}{w} + n(1-w)\ln\frac{1-k}{1-w}$, $0 < k < 1$, $0 < w < 1$ δηλαδή $f(w) = nw\ln k - nw\ln w + n(1-w)\ln(1-k) - n(1-w)\ln(1-w)$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = n\ln k - n\ln w - n - n\ln(1-k) + n\ln(1-w) + n = n\ln\frac{k}{1-k} - n\ln\frac{w}{1-w} = 0 \Rightarrow w = k \ ,$$
$$f''(w) = -n\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{1-w}\right) = -n\frac{1-w+w}{w(1-w)} = -\frac{n}{w(1-w)} < 0.$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\sum_{i=1}^{n} x_i < c_1$ ή $\sum_{i=1}^{n} x_i > c_2$, όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} < c_1) + \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} > c_2) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} = c_1) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} = c_2) = \mathrm{a} \ ,$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < nc_1\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > nc_2\right) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = nc_1\right) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = nc_2\right) = \mathrm{a} \ ,$$

όπου $nc_1 = c_1'$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1'\right) = \sum_{t=0}^{c_1'-1} \binom{n}{t} \theta_0^t \,(1-\theta_0)^{n-t} < \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$

με $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ και $nc_2 = c_2'$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le c_2'\right) = \sum_{t=0}^{c_2'} \binom{n}{t} \theta_0^t \,(1-\theta_0)^{n-t} \ge 1 - \frac{\mathrm{a}}{2} \ .$$

Αν ισχύει $n\theta > 5$ και $n(1-\theta) > 5$, τότε, σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ., η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ συγκλίνει κατά νόμο στην κανονική κατανομή $N(n\theta, n\theta(1-\theta))$. Συνεπώς:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} < \frac{nc_1 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} > \frac{nc_2 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right) \ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(Z < \frac{nc_1 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right) + \mathrm{P}\left(Z > \frac{nc_2 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right) \ .$$

Έστω $z_1 = \frac{nc_1 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}$ και $z_2 = \frac{nc_2 - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}$. Τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται ως:

$$\mathrm{P}(Z < z_1) + \mathrm{P}(Z > z_2) = \mathrm{a} \ .$$

Αν:

$$\mathrm{P}(Z < z_1) = \mathrm{P}(Z > z_2) = \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$

τότε:

$$z_1 = -z_{\mathrm{a}/2}, \qquad z_2 = z_{\mathrm{a}/2}$$

και η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} x_i < n\theta_0 - z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} \ \text{ ή } \ \sum_{i=1}^{n} x_i > n\theta_0 + z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Για $\theta_0 = 0.85$, $n = 100$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = 90$, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} n\theta_0 - z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} = 100 \cdot 0.85 - 1.96\sqrt{100 \cdot 0.85 \cdot 0.15} = 78.0014 \\ n\theta_0 + z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} = 100 \cdot 0.85 + 1.96\sqrt{100 \cdot 0.85 \cdot 0.15} = 91.9986 \end{cases} .$$

Επομένως, $78.0014 < 90 < 91.9986$ και η μηδενική υπόθεση δε μπορεί να απορριφθεί.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης της άσκησης είναι να γίνει χρήση της κατανομής της τ.μ. $-2\ln\lambda$. Η διάσταση του χώρου Ω είναι 1, ενώ του ω είναι 0. Επομένως, οι β.ε. είναι $n = 1$ και ισχύει, σύμφωνα με το θεώρημα 4.1 (σελ. 110), ότι:

$$-2\ln\lambda \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2 \ .$$

Τελικά, η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν (παράρτημα Β, πίνακας Β3, σελ. 216):

$$-2\ln\lambda > \boldsymbol{\mathcal{X}}_{1;0.95}^2 = 3.8415 \ .$$

Για $\theta_0 = 0.85$, $n = 100$ και $\sum_{i=1}^{n} X_i = 90$, δηλαδή $\bar{X} = 0.9$ προκύπτει ότι:

$$\lambda = \left(\frac{0.85}{0.90}\right)^{90} \left(\frac{1-0.85}{1-0.90}\right)^{100-90} = 0.9444^{90} \left(\frac{0.15}{0.10}\right)^{10} = 0.00583 \cdot 57.6650 = 0.3363$$

και:

$$-2\ln\lambda = 0.9464 < 3.8415 \ ,$$

δηλαδή η μηδενική υπόθεση δε μπορεί να απορριφθεί.

Άσκηση 4.4

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$. Με τη βοήθεια ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$ σε στάθμη σημαντικότητας $\mathbf{a} = \mathbf{0.05}$.

Λύση

Η σ.π. της γεωμετρικής κατανομής είναι:

$$f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \qquad x = 1,2,\ldots, \qquad 0 < \theta < 1 \ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x-1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - n} \ .$$

Για $t = \sum_{i=1}^n x_i$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \theta^n (1-\theta)^{t-n} \ .$$

Από το παράδειγμα 1.14 (σελ. 43), είναι γνωστό ότι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$. Επομένως:

$$L(\hat{\Omega}) = \hat{\theta}^n (1-\hat{\theta})^{t-n} \ .$$

Επειδή $\omega = \theta_0$ προκύπτει ότι:

$$L(\hat{\omega}) = \theta_0^n (1-\theta_0)^{t-n} \ .$$

Συνεπώς:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\theta_0^n (1-\theta_0)^{t-n}}{\hat{\theta}^n (1-\hat{\theta})^{t-n}} = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n \left(\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}}\right)^{t-n} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n \left(\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}}\right)^{t-n} < c \Rightarrow n\ln\frac{\theta_0}{\hat{\theta}} + (t-n)\ln\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}} < c' \ .$$

Επειδή $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ και $t = \sum_{i=1}^n x_i$ προκύπτει ότι $t = \frac{n}{\hat{\theta}}$. Άρα η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν:

$$n\ln\frac{\theta_0}{\hat{\theta}} + n\left(\frac{1}{\hat{\theta}} - 1\right)\ln\frac{1-\theta_0}{1-\hat{\theta}} < c' \Rightarrow -\ln\hat{\theta} + \frac{1}{\hat{\theta}}\ln(1-\theta_0) - \left(\frac{1}{\hat{\theta}} - 1\right)\ln\left(1-\hat{\theta}\right) < c''.$$

Αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι η συνάρτηση $f(w) = -\ln w + \frac{1}{w}\ln(1-k) - \left(\frac{1}{w} - 1\right)\ln(1-w)$, $0 < k < 1$, $w > 0$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = -\frac{\ln(1-k) - \ln(1-\mathrm{w})}{w^2} = 0 \Rightarrow w = k \ ,$$

$$f''(w)|_{w=k} = \frac{1}{k^2(k-1)} < 0 \ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\hat{\theta} < c_1$ ή $\hat{\theta} > c_2$ ή ισοδύναμα όταν $\bar{X} > c_1'$ ή $\bar{X} < c_2'$, όπου οι σταθερές c_1' και c_2' ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}(\lambda < c) = \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} > c_1') + \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} < c_2') + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} = c_1') + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} = c_2') \ .$$

Οι τιμές των c_1' και c_2' ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} > c_1') \leq \frac{\mathrm{a}}{2} \ , \qquad \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} < c_2') \leq \frac{\mathrm{a}}{2} \ .$$

Για μικρά δείγματα, από την άσκηση 1.1 (σελ. 45), προκύπτει ότι η τ.μ. $T = \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή και το σημείο c_1^* είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{t=n}^{c_1^*-1} \binom{t-1}{n-1} \theta_0^n (1-\theta_0)^{t-n} \le \frac{\mathrm{a}}{2} \ , \qquad c_1^* = nc_1' \ ,$$

ενώ το σημείο c_2 είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{t=n}^{c_2^*} \binom{t-1}{n-1} \theta_0^n (1-\theta_0)^{t-n} \ge \frac{\mathrm{a}}{2} \ , \qquad c_2^* = nc_2' \ .$$

Οι τιμές των δ_1 και δ_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\delta_1 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(T \le c_1^* - 1)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(T = c_1^*)} \ , \qquad \delta_2 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(T > c_2^*)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(T = c_2^*)} \ .$$

Για μεγάλα δείγματα ισχύει το Κ.Ο.Θ., δηλαδή ισχύει ότι:

$$\bar{X} \xrightarrow{\text{K.N.}} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \ ,$$

όπου μ και σ^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής, δηλαδή:

$$EX = \mu = \frac{1}{\theta} \ , \qquad \mathrm{Var}X = \sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2} \ .$$

Σε αυτή την περίπτωση η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή όταν $\bar{X} < c_1$ ή $\bar{X} > c_2$, όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} < c_1) + \mathrm{P}_{\theta_0}(\bar{X} > c_2) = \mathrm{a} \ ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{\left(\bar{X} - \frac{1}{\theta}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta^2}}} < \frac{\left(c_1 - \frac{1}{\theta}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta^2}}} \right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\frac{\left(\bar{X} - \frac{1}{\theta}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta^2}}} > \frac{\left(c_2 - \frac{1}{\theta}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta^2}}} \right) ,$$

ή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(Z < \frac{\sqrt{n}(\theta_0 c_1 - 1)}{\sqrt{1-\theta_0}} \right) + \mathrm{P}\left(Z > \frac{\sqrt{n}(\theta_0 c_2 - 1)}{\sqrt{1-\theta_0}} \right) .$$

Αν $z_1 = \frac{\sqrt{n}(\theta_0 c_1 - 1)}{\sqrt{1-\theta_0}}$ και $z_2 = \frac{\sqrt{n}(\theta_0 c_2 - 1)}{\sqrt{1-\theta_0}}$, τότε ισχύει:

$$\mathrm{P}(Z < z_1) + \mathrm{P}(Z > z_2) = \mathrm{a} \ .$$

Έστω:

$$\mathrm{P}(Z < z_1) = \mathrm{P}(Z > z_2) = \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$

τότε:

$$z_1 = -z_{\mathrm{a}/2} \ , \qquad z_2 = z_{\mathrm{a}/2}$$

και η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \bar{X} < \dfrac{\sqrt{n} - z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{1-\theta_0}}{\theta_0} \quad \text{ή} \quad \bar{X} > \dfrac{\sqrt{n} + z_{\mathrm{a}/2}\sqrt{1-\theta_0}}{\theta_0} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 4.5

Ένα βιβλίο θεωρείται ότι δεν έχει λάθη αν η μέση τιμή των λαθών ανά 20 σελίδες είναι 1. Σ' ένα βιβλίο 200 σελίδων βρέθηκαν 23 λάθη. Μπορεί να θεωρηθεί ότι το βιβλίο δεν έχει λάθη;

Λύση

Είναι γνωστό ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά k σελίδες ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta = EX$. Επομένως, ζητείται να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\theta = 1$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \ne 1$.

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η σ.π. της κατανομής Poisson είναι:

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} \ , \qquad x = 0,1,\dots n, \qquad \theta > 0 \ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L(\theta) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-n\theta}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \ .$$

Λογαριθμίζοντας, προκύπτει:

$$\ln L(\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - \ln\prod_{i=1}^{n} x_i! \ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} \ .$$

Επιπλέον:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = \bar{X}$.

Για $t = \sum_{i=1}^n x_i$ προκύπτει ότι:

$$L(\hat{\Omega}) = \bar{X}^t e^{-n\bar{X}}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \ .$$

Επειδή $\omega = \{\theta_0\}$ ισχύει ότι:

$$L(\hat{\omega}) = \theta_0^t e^{-n\theta_0}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \ .$$

Άρα:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\theta_0^t e^{-n\theta_0}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}}{\bar{X}^t e^{-n\bar{X}}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}} = \left(\frac{\theta_0}{\bar{X}}\right)^t \exp\{-n\theta_0 + n\bar{X}\} \ .$$

Για $\theta_0 = 1$ προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{e^{-n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}}{\bar{X}^t e^{-n\bar{X}}\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}} = \frac{1}{\bar{X}^t}e^{n\bar{X}-n} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\frac{1}{\bar{X}^t}e^{n\bar{X}-n} < c \Rightarrow \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^t e^{\sum_{i=1}^n x_i - n} < c \Rightarrow \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{\sum_{i=1}^n x_i} < c' \ ,$$

ή:

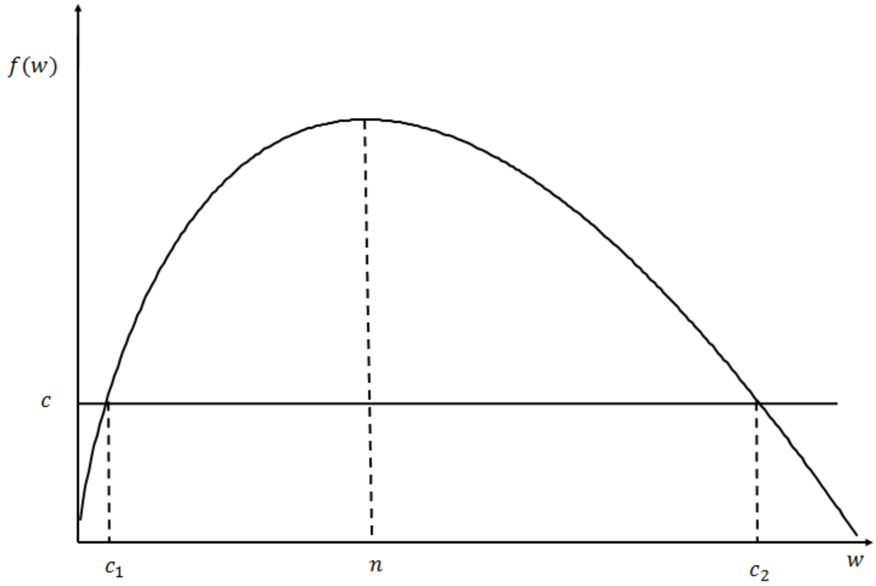
$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\ln n - \ln\sum_{i=1}^{n} x_i\right) < c'' \ .$$

Όμως, η συνάρτηση $f(w) = w + w(\ln n - \ln w)$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = n$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = 1 + \ln n - \ln w - w\frac{1}{w} = \ln n - \ln w = 0 \Rightarrow w = n \ ,$$

$$f''(w) = -\frac{1}{w} < 0 \ .$$

Στο σχήμα 4.5 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w) = w + w(\ln n - \ln w)$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές c_1 και c_2.



Σχήμα 4.5 *Γραφική παράσταση συνάρτησης f(w) άσκησης 4.5.*

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$0 < \sum_{i=1}^{n} x_i < c_1 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i > c_2 \ ,$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$c_1 + c_1(\ln n - \ln c_1) = c_2 + c_2(\ln n - \ln c_2)$$

και

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1\right) + \delta_1 \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2\right) + \delta_2 \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2\right) = \mathrm{a} \ .$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι δύσκολο να λυθεί. Οι συνθήκες μπορούν να διαφοροποιηθούν ως εξής:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1\right) \leq \frac{\mathrm{a}}{2} \ , \qquad \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2\right) \leq \frac{\mathrm{a}}{2} \ .$$

Το σημείο c_1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i < c_1) \leq \frac{\mathrm{a}}{2}$ και το σημείο c_2 είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i > c_2) \leq \frac{\mathrm{a}}{2}$. Επιπλέον, οι σταθερές δ_1 και δ_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\delta_1 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i < c_1)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i = c_1)} \ , \qquad \delta_2 = \frac{\frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i > c_2)}{\mathrm{P}_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i = c_2)} \ .$$

Σύμφωνα με την άσκηση 1.1 (σελ. 45), κάτω από τη μηδενική υπόθεση, η τ.μ. $\sum_{i=1}^{10} X_i$ ακολουθεί κατανομή $P(10)$. Από τον πίνακα B7 (σελ. 227), προκύπτει ότι $\mathrm{P}_{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 4\right) = 0.01$, $\mathrm{P}_{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i = 4\right) = 0.019$ και $\mathrm{P}_{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 17\right) = 0.014$, $\mathrm{P}_{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i = 17\right) = 0.013$. Για $\mathrm{a} = 0.05$ υπολογίζεται ότι:

$$\delta_1 = \frac{0.025 - 0.01}{0.019} = 0.789 \ , \qquad \delta_2 = \frac{0.025 - 0.014}{0.013} = 0.846 \ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \sum_{i=1}^{n} x_i > 17 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n} x_i < 4 \\ 0.789, & \sum_{i=1}^{n} x_i = 4, \\ 0.846, & \sum_{i=1}^{n} x_i = 17, \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} .$$

Τελικά, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται γιατί $\sum_{i=1}^{n} x_i = 23 > 17$, δηλαδή το βιβλίο θεωρείται ότι έχει λάθη.

Άσκηση 4.6

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή γάμμα $G(a, \theta)$. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \neq \theta_0$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η σ.π.π. είναι:

$$f\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{a-1} e^{-\theta x} \ , \qquad x > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \theta > 0 \ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x_i^{a-1} e^{-\theta x_i} = \left(\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta) = n\alpha \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i^{a-1}}{\Gamma(\alpha)} \ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{n\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{\bar{X}} \ .$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{n\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = -\frac{n\alpha}{\theta^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$.

Επομένως:

$$L\left(\widehat{\Omega}\right) = \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} e^{-n\alpha} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} \ ,$$

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{\theta_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} \exp\left\{-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

και:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\dfrac{\theta_0^{na}}{(\Gamma(\alpha))^n} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} \, e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i}}{\dfrac{\left(\dfrac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^{na} e^{-na} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1}}{(\Gamma(\alpha))^n}} = \left(\frac{\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{na}\right)^{na} e^{na-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i} \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{e\theta_0}{na}\right)^{na} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{na} e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i} = \left(\frac{e\theta_0}{na}\right)^{na} (n\bar{X})^{na} e^{-\theta_0 n\bar{X}} = \left(\frac{e\theta_0}{a}\right)^{na} \left(\bar{X}^a e^{-\theta_0 \bar{X}}\right)^n \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\left(\bar{X}^a e^{-\theta_0 \bar{X}}\right)^n < c \Rightarrow a\ln\bar{X} - \theta_0 \bar{X} < c' \Rightarrow a\ln \sum_{i=1}^n x_i - a\ln n - \theta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} < c'' \ ,$$

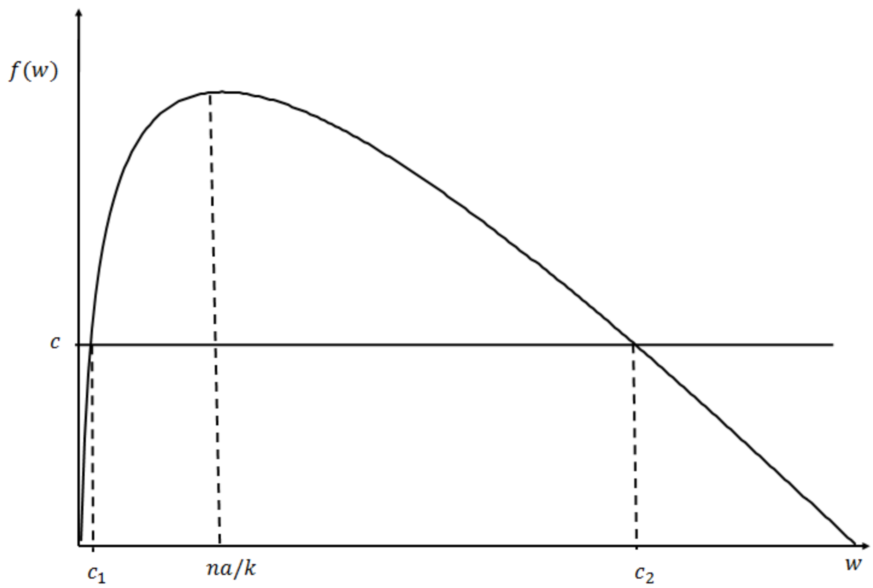
δηλαδή:

$$a\ln \sum_{i=1}^n x_i - \theta_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} < c''' \ ,$$

Η συνάρτηση $f(w) = a\ln w - k\frac{w}{n}$, $w > 0$, $a > 0$, $k > 0$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = \frac{na}{k}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = \frac{a}{w} - \frac{k}{n} = 0 \Rightarrow w = \frac{na}{k} \ ,$$
$$f''(w) = -\frac{a}{w^2} < 0 \ .$$

Στο σχήμα 4.6 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w) = a\ln w - \theta_0 \frac{w}{n}$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές c_1 και c_2.



Σχήμα 4.6 *Γραφική παράσταση συνάρτησης* f(w) *άσκησης 4.6.*

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$0 < \sum_{i=1}^n x_i < c_1 \ , \qquad \sum_{i=1}^n x_i > c_2 \ ,$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a\ln c_1 - \theta_0 \frac{c_1}{n} = a\ln c_2 - \theta_0 \frac{c_2}{n}$$

και

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 | \theta_0\right) + \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 | \theta_0\right) = \mathrm{a} \ .$$

Οι τιμές των c_1 και c_2 είναι δύσκολο να υπολογισθούν από την παραπάνω σχέση. Για το λόγο αυτό οι συνθήκες διαφοροποιούνται ως εξής:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2\right) \ .$$

Από την άσκηση 1.2 (σελ. 46) είναι γνωστό ότι, αν οι τ.μ. X_i ακολουθούν την κατανομή $G(a,\theta)$, τότε η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $G(na,\theta)$ και η τ.μ. $2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $G\left(na, \frac{1}{2}\right)$. Αν $2na \in \mathbb{Z}$, τότε η τ.μ. $2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $G\left(\frac{2na}{2}, \frac{1}{2}\right)$, που είναι η $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2na}^2$ κατανομή. Άρα:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i < 2\theta_0 c_1\right) + \mathrm{P}\left(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i > 2\theta_0 c_2\right)$$

και:

$$2\theta_0 c_1 = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2na;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2, \qquad 2\theta_0 c_2 = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2na;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2\theta_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2na;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \ \text{ ή } \ \sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{1}{2\theta_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2na;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \ .$$

Άσκηση 4.7

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή βήτα $\boldsymbol{\beta(\theta, 1)}$. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\boldsymbol{\theta = \theta_0}$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta \neq \theta_0}$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η σ.π.π. είναι:

$$f\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = \theta x^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1) \ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} \ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} \ .$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$.

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \hat{\theta}^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\theta}-1} \; ,$$

$$L(\widehat{\omega}) = \theta_0^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_0-1}$$

και:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_0-1}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\theta}-1}} \; ,$$

δηλαδή:

$$\ln\lambda = n\ln\theta_0 - n\ln\hat{\theta} + (\theta_0 - \hat{\theta})\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = n\ln\theta_0 - n\ln\hat{\theta} + (\theta_0 - \hat{\theta})\left(-\frac{n}{\hat{\theta}}\right) \; ,$$

επειδή $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$. Άρα:

$$\ln\lambda = \; n\ln\theta_0 + n + n\left(-\ln\hat{\theta} - \frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right).$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία, που περιγράφηκε στο παράδειγμα 4.1 (σελ. 113), προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(w) = -\ln w - \frac{k}{w}$, $w > 0$, $k > 0$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω.

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$ ή ισοδύναμα όταν $\hat{\theta} < c_1$ ή $\hat{\theta} > c_2$, δηλαδή $-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} < c_1$ ή $-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} > c_2$ ή ισοδύναμα $-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i > c_1^*$ ή $-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i < c_2^*$, όπου τα κρίσιμα σημεία c_1^* και c_2^* ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > c_1^*\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i < c_2^*\right) = \mathrm{a}$$

και υπολογίζονται ευκολότερα από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > c_1^*\right) = \frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i < c_2^*\right) .$$

Θεωρώντας το μετασχηματισμό $Y_i = -\ln X_i$ προκύπτει $e^{-Y_i} = X_i$, δηλαδή $f_{Y_i}(y) = f_{X_i}(y_i)\left|\frac{dx_i}{dy_i}\right| = \theta e^{-\theta y_i}$ Επιπλέον, αν $Z_i = 2\theta Y_i$ συνεπάγεται ότι η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n} Z_i = -2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2$ κατανομή. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή του παραδείγματος 4.2 (σελ. 115), η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } -2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i < \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \text{ ή } -2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i > \frac{1}{2\theta_0} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 4.8

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή Weibull με σταθερό c. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\theta = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \neq \theta_0$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής Weibull με σταθερό c είναι:

$$f(x;\theta) = \frac{c}{\theta} x^{c-1} e^{-\frac{x^c}{\theta}} \; , \qquad x > 0, \qquad c > 0, \qquad \theta > 0 \; .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{c}{\theta}x_i^{c-1}e^{-\frac{x_i^c}{\theta}}=\frac{c^n}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^c}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}\ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta)=n\ln c-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^c+(c-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0\Rightarrow-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^c=0\Rightarrow\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}{n}\ .$$

Επιπλέον,

$$\left.\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{n\theta=\sum_{i=1}^{n}x_i^c}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^c\right)=\frac{n}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^c=-\frac{n}{\theta^2}<0\ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}{n}$.

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega})=\frac{c^n}{\hat{\theta}^n}e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^{n}x_i^c}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}\ ,$$

$$L(\widehat{\omega})=\frac{c^n}{\theta_0^n}e^{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}x_i^c}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}$$

και:

$$\lambda=\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}=\frac{\frac{c^n}{\theta_0^n}e^{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}x_i^c}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}}{\frac{c^n}{\hat{\theta}^n}e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}\sum_{i=1}^{n}x_i^c}\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}}=\frac{\hat{\theta}^n}{\theta_0^n}e^{n\hat{\theta}\left(\frac{1}{\hat{\theta}}-\frac{1}{\theta_0}\right)}=\left(\frac{e}{\theta_0}\right)^n\left(\hat{\theta}e^{-\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}}\right)^n\ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda<r$, δηλαδή:

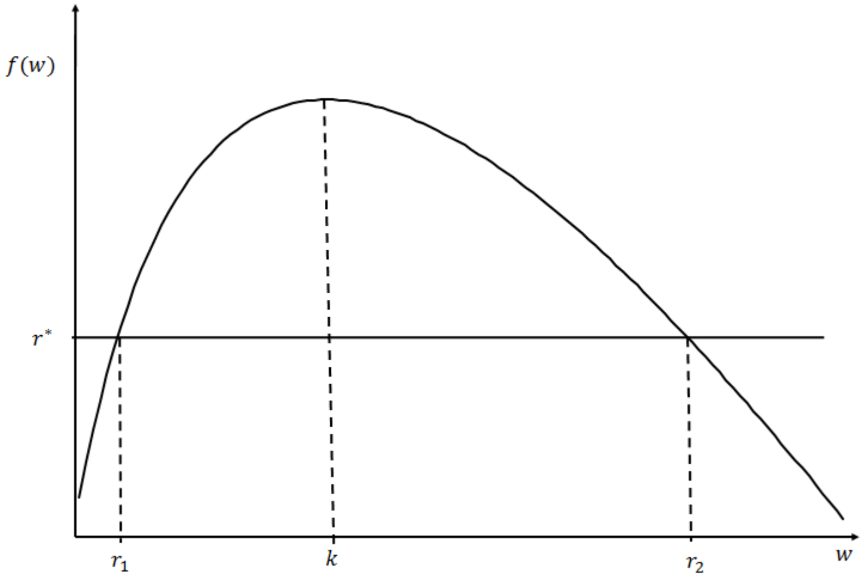
$$\left(\frac{e}{\theta_0}\right)^n\left(\hat{\theta}e^{-\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}}\right)^n<r\Rightarrow\hat{\theta}e^{-\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}}<r'\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}{n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}{n\theta_0}}<r'\Rightarrow\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^c-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}{n\theta_0}<r^*\ .$$

Η συνάρτηση $f(w)=\ln w-\frac{w}{k}$, $w>0$, $k>0$ παρουσιάζει μέγιστο για $w=k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w)=\frac{1}{w}-\frac{1}{k}=0\Rightarrow w=k\ ,$$

$$f''(w)=-\frac{1}{w^2}<0.$$

Στο σχήμα 4.7 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w)=\ln w-\frac{w}{k}$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές r_1 και r_2.



Σχήμα 4.7 *Γραφική παράσταση συνάρτησης f(w) άσκησης 4.8.*

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$0<\sum_{i=1}^{n} x_i^c<r_1\ ,\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^c>r_2\ ,$$

όπου οι σταθερές r_1 και r_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\ln r_1-\frac{r_1}{n\theta_0}=\ln r_2-\frac{r_2}{n\theta_0}$$

και

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^c<r_1|\theta_0\right)+\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^c>r_2|\theta_0\right)=\mathrm{a}\ ,$$

ή

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^c<r_1|\theta_0\right)=\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^c>r_2|\theta_0\right)=\frac{\mathrm{a}}{2}\ .$$

Από την άσκηση 1.4 (σελ. 46), προκύπτει ότι η τ.μ. $W=\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^c$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mathbf{2}}_{2n}$. Άρα η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \dfrac{2}{\theta_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^c<\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ \text{ ή } \ \dfrac{2}{\theta_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^c>\dfrac{1}{2\theta_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\ .$$

Άσκηση 4.9

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ που ακολουθεί την κατανομή Pareto με σταθερό c. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta=\theta_0$, έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H_1}$: $\theta\neq\theta_0$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης πρώτα θα υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ. Η σ.π.π. της κατανομής Pareto με σταθερό c είναι:

$$f(x;\theta)=\frac{\theta c^{\theta}}{x^{\theta+1}}\ ,\qquad x>c,\qquad c>0,\qquad \theta>0\ .$$

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta c^{\theta}}{x^{\theta+1}}=\frac{\theta^{n}c^{n\theta}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta+1}}\ .$$

Λογαριθμίζοντας προκύπτει ότι:

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0\Rightarrow\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow\frac{n}{\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln c)\Rightarrow\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)}\ .$$

Επιπλέον,

$$\left.\frac{\partial^2\ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)}}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)=-\frac{n}{\theta^2}<0\ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)}$.

Επομένως:

$$L(\hat\Omega)=\frac{\hat\theta^{n}c^{n\hat\theta}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\hat\theta+1}}\ ,$$

$$L(\hat\omega)=\frac{\theta_0^{n}c^{n\theta_0}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta_0+1}}$$

και:

$$\lambda=\frac{L(\hat\omega)}{L(\hat\Omega)}=\frac{\dfrac{\theta_0^{n}c^{n\theta_0}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta_0+1}}}{\dfrac{\hat\theta^{n}c^{n\hat\theta}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\hat\theta+1}}}=\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^{n}e^{(\hat\theta-\theta_0)\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)}=\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^{n}e^{n(1-\frac{\theta_0}{\hat\theta})}\ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda<r$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^{n}e^{n(1-\frac{\theta_0}{\hat\theta})}<r\Rightarrow n\ln\frac{\theta_0}{\hat\theta}+n\left(1-\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)<\ln r\Rightarrow n\ln\theta_0-n\ln\hat\theta+n-n\frac{\theta_0}{\hat\theta}<\ln r\ ,$$

δηλαδή:

$$-\ln\hat\theta-\frac{\theta_0}{\hat\theta}<r'\ .$$

Στο παράδειγμα 4.1 (σελ. 113) αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση $f(w)=-\ln w-\frac{k}{w}$, $w>0,\ k>0$ παρουσιάζει μέγιστο για $w=k$ και στρέφει τα κοίλα κάτω.

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$\hat\theta<r_1,\qquad \hat\theta>r_2\ ,$$

ή ισοδύναμα όταν:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)>r_1^*\quad\text{ή}\quad\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)<r_2^*\ ,$$

όπου τα κρίσιμα σημεία r_1^* και r_2^* υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{X_i}{c}\right)>r_1^*\right)+\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{X_i}{c}\right)<r_2^*\right)\ .$$

Οι τ.μ. X_i ακολουθούν κατανομή Pareto με παράμετρο θ. Επομένως, οι τ.μ. $Y_i=\ln\frac{X_i}{c}$ έχουν κατανομή με σ.π.π. $f_{Y_i}(y_i)=f_{X_i}(y_i)\left|\frac{dx_i}{dy_i}\right|=\theta e^{-\theta y_i}$, δηλαδή την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ. Από την άσκηση

1.2 (σελ. 46), προκύπτει ότι η τ.μ. $2\theta\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^{2}$. Ακολουθώντας τη διαδικασία, που περιγράφηκε σε προηγούμενες ασκήσεις, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } 2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)<\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}^{2} \ \text{ ή } \ 2\theta_0\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{c}\right)>\boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}}^{2}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} .$$

Άσκηση 4.10

Έστωσαν $\underset{\sim}{\mathbf{X}}'=(\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2},\dots,\boldsymbol{X_n})$ και $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}'=(\boldsymbol{Y_1},\boldsymbol{Y_2},\dots,\boldsymbol{Y_m})$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από εκθετική κατανομή $\boldsymbol{E(\theta_1)}$ και $\boldsymbol{E(\theta_2)}$, αντίστοιχα. Σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta_1=\theta_2}$, έναντι της εναλλακτικής $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta_1\neq\theta_2}$.

Λύση

Η λύση θα δοθεί με τη μέθοδο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}'=(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)$ είναι ανεξάρτητα. Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι:

$$L(\Omega)=L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\underset{\sim}{\mathrm{y}},\theta_1,\theta_2\right)=L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\theta_1\right)L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}},\theta_2\right)=\theta_1^n\exp\left\{-\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}\theta_2^m\exp\left\{-\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j\right\} .$$

Οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$\ln L(\Omega)=n\ln\theta_1-\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+m\ln\theta_2-\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j .$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_1}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow\theta_1=\dfrac{1}{\overline{\overline{X}}}\\[2ex] \dfrac{\partial\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2}=\dfrac{m}{\theta_2}-\sum_{i=1}^{m}y_j=0\Rightarrow\theta_2=\dfrac{1}{\overline{\overline{Y}}}\end{cases} .$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1^2}=\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\dfrac{n}{\theta_1}-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=-\dfrac{n}{\theta_1^2}<0\\[2ex] \dfrac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2^2}=\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\dfrac{m}{\theta_2}-\sum_{j=1}^{m}y_j\right)=-\dfrac{m}{\theta_2^2}<0\end{cases} .$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ ισχύει ότι: $\frac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2}=\frac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2\,\partial\theta_1}=0$. Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1=\frac{1}{\overline{X}}$ και $\hat{\theta}_2=\frac{1}{\overline{Y}}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta_1=\theta_2=\theta$ η πιθανοφάνεια γίνεται:

$$L(\omega)=\theta^{n+m}\exp\left\{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j\right)\right\} ,$$

με συνέπεια:

$$\ln L(\omega)=(n+m)\ln\theta-\theta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$$

και:

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta}=\frac{n+m}{\theta}-\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{j=1}^{m} y_j=0 \Rightarrow \theta=\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i+\sum_{j=1}^{m} y_j} \ ,$$

ενώ:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2}=-\frac{n+m}{\theta^2}<0 \ .$$

Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι $\hat{\theta}=\frac{n+m}{n\bar{X}+m\bar{Y}}$.

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών γίνεται:

$$\lambda=\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}=\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m \frac{\exp\left\{-\hat{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+\sum_{j=1}^{m} y_j\right)\right\}}{\exp\left\{-\hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}\exp\left\{-\hat{\theta}_2 \sum_{j=1}^{m} y_j\right\}} \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\theta}=\frac{n+m}{n\bar{X}+m\bar{Y}}$, $\hat{\theta}_1=\frac{1}{\bar{X}}$ και $\hat{\theta}_2=\frac{1}{\bar{Y}}$ προκύπτει ότι:

$$\lambda=\left(\frac{\frac{n+m}{n\bar{X}+m\bar{Y}}}{\frac{1}{\bar{X}}}\right)^n\left(\frac{\frac{n+m}{n\bar{X}+m\bar{Y}}}{\frac{1}{\bar{Y}}}\right)^m \frac{\exp\left\{-\hat{\theta}\frac{n+m}{\hat{\theta}}\right\}}{\exp\left\{-\hat{\theta}_1\frac{n}{\hat{\theta}_1}\right\}\exp\left\{-\hat{\theta}_2\frac{m}{\hat{\theta}_2}\right\}} \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda=(n+m)^{n+m}\left(\frac{\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}}{n\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}+m\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}}}\right)^n\left(\frac{\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}}}{n\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}+m\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}}}\right)^m \frac{\exp\{-(n+m)\}}{\exp\{-n\}\exp\{-m\}} \ .$$

Έστω $W=\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\lambda=(n+m)^{n+m}\frac{W^n}{(nW+m)^{n+m}} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda<c$, δηλαδή:

$$(n+m)^{n+m}\frac{W^n}{(nW+m)^{n+m}}<c \Rightarrow \frac{W^n}{(nW+m)^{n+m}}<c' \Rightarrow n\ln W-(n+m)\ln(nW+m)<c'' \ .$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(W)=n\ln W-(n+m)\ln(nW+m)$, $W>0$, παρουσιάζει μέγιστο για $W=1$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(W)=\frac{n}{W}-\frac{n(n+m)}{nW+m}=0 \Rightarrow W=1 \ ,$$

$$f''(W)|_{W=1}=-\frac{n}{W^2}+\frac{n^2(n+m)}{(nW+m)^2}=-n+\frac{n^2(n+m)}{(n+m)^2}=-\frac{nm}{n+m}<0 \ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$W<c_1 \ , \qquad W>c_2 \ ,$$

όπου τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}},\underset{\sim}{\mathrm{Y}}|\mathrm{H}_0\right)=\mathrm{P}(W<c_1|\mathrm{H}_0)+\mathrm{P}(W>c_2|\mathrm{H}_0) \ .$$

Για να υπολογισθούν οι παραπάνω πιθανότητες, θα πρέπει να βρεθεί η κατανομή του στατιστικού $W=\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$. Από την άσκηση 1.2 (σελ. 46) είναι γνωστό ότι:

$$\begin{cases} X_i \sim G(1,\theta) \ \Rightarrow \ 2\theta_1 X_i \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2 \ \Rightarrow \ 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2 \\ Y_i \sim G(1,\theta) \ \Rightarrow \ 2\theta_2 Y_i \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_2^2 \ \Rightarrow \ 2\theta_2 \sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2m}^2 \end{cases} .$$

Επιπλέον, τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι ανεξάρτητα, με συνέπεια οι τ.μ. $2\theta_1\sum_{i=1}^{n} X_i$ και $2\theta_2\sum_{i=1}^{m} Y_i$ να είναι ανεξάρτητες. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\frac{2\theta_1\sum_{i=1}^{n} X_i}{2n}}{\frac{2\theta_2\sum_{j=1}^{m} Y_j}{2m}}=\frac{\theta_1\bar{X}}{\theta_2\bar{Y}}$$

ακολουθεί την κατανομή $F_{2n;2m}$. Για $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η τ.μ. $W = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$ ακολουθεί επίσης την κατανομή $F_{2n;2m}$. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε σε προηγούμενες ασκήσεις τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}(W < c_1) = \mathrm{P}(W > c_2) = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

και προκύπτει ότι:

$$c_1 = F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}, \qquad c_2 = F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}}.$$

Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} < F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \text{ ή } \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} > F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Άσκηση 4.11

Έστωσαν $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{m}$ από κατανομή $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\theta}_1)$ και $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\theta}_2)$, αντίστοιχα. Σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$.

Λύση

Η λύση θα δοθεί με χρήση της μεθόδου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Επειδή τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι ανεξάρτητα, η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι:

$$L(\Omega) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_1, \theta_2\right) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \theta_1\right) L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_2\right) = \theta_1^n \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{\theta_1 - 1} \theta_2^m \prod_{j=1}^{m} (1 - y_j)^{\theta_2 - 1}.$$

Οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$\ln L(\Omega) = n \ln\theta_1 + (\theta_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i) + m \ln\theta_2 + (\theta_2 - 1) \sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - y_j\right).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1} = \dfrac{n}{\theta_1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i) = 0 \Rightarrow \theta_1 = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i)} \\ \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2} = \dfrac{m}{\theta_2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j) = 0 \Rightarrow \theta_2 = -\dfrac{m}{\sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j)} \end{cases}.$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\dfrac{n}{\theta_1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i) \right) = -\dfrac{n}{\theta_1^2} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2^2} = \dfrac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\dfrac{m}{\theta_2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j) \right) = -\dfrac{m}{\theta_2^2} < 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i)}$ και $\hat{\theta}_2 = -\frac{m}{\sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j)}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η πιθανοφάνεια γίνεται:

$$L(\omega) = \theta^{n+m} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{\theta - 1} \prod_{j=1}^{m} (1 - y_j)^{\theta - 1}$$

με συνέπεια:

$$\ln L(\omega) = (n+m)\ln\theta + (\theta - 1)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)\right)$$

και:

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta} = \frac{n+m}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j) = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)} \ ,$$

ενώ:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2} = -\frac{n+m}{\theta^2} < 0 \ .$$

Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι:

$$\hat{\theta} = -\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)} = -\frac{n+m}{\frac{n}{\hat{\theta}_1} + \frac{m}{\hat{\theta}_2}} \ .$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{\hat{\theta}-\hat{\theta}_1} \prod_{j=1}^{m}(1-y_j)^{\hat{\theta}-\hat{\theta}_2} \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n + \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m + \hat{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)\right) - \hat{\theta}_1\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) - \hat{\theta}_2\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j) \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\theta} = -\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)+\sum_{i=1}^{m}\ln(1-y_i)}$, $\hat{\theta}_1 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}$και $\hat{\theta}_2 = -\frac{m}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}$ προκύπτει ότι:

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n + \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m = \left(\frac{(n+m)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)\right)}\right)^n \left(\frac{(n+m)\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}{m\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)\right)}\right)^m,$$

ή:

$$\lambda = A\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}}{n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)} + \frac{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}\right)}\right)^n \left(\frac{\frac{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}}{m\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)} + \frac{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-y_j)}\right)}\right)^m \ ,$$

όπου $A = (n+m)^{n+m}$.

Έστω $W = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)}{\sum_{j=1}^{m}\ln(1-Y_j)}$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\lambda = (n+m)^{n+m}\left(\frac{W}{n(W+1)}\right)^n \left(\frac{1}{m(W+1)}\right)^m = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} < c \Rightarrow \frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} < c' \Rightarrow n\ln W - (n+m)\ln(W+1) < c'' \ .$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(W) = n\ln W - (n+m)\ln(W+1)$, $W > 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $W = \frac{n}{m}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(W) = \frac{n}{W} - \frac{n+m}{W+1} = 0 \Rightarrow W = \frac{n}{m} \ ,$$

$$f''(W)\big|_{W=\frac{n}{m}} = -\frac{n}{W^2} + \frac{n+m}{(W+1)^2} = -\frac{n}{\frac{n^2}{m^2}} + \frac{n+m}{\left(\frac{n}{m}+1\right)^2} = -\frac{m^2}{n} + \frac{m^2}{n+m} = -\frac{m^3}{n(n+m)} < 0 \ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$W < c_1 \ , \qquad W > c_2 \ ,$$

όπου τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}, \underset{\sim}{\mathrm{Y}} | \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{P}(W < c_1 | \mathrm{H}_0) + \mathrm{P}(W > c_2 | \mathrm{H}_0) \ .$$

Οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται, εφόσον βρεθεί η κατανομή του στατιστικού $W = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}{\sum_{j=1}^{m} \ln(1-Y_j)}$. Από το παράδειγμα 4.1 (σελ. 113), είναι γνωστό ότι:

$$\begin{cases} -2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i) \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2n}^2 \\ -2\theta_2 \sum_{j=1}^{m} \ln(1 - Y_j) \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_{2m}^2 \end{cases} .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\dfrac{-2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)}{2n}}{\dfrac{-2\theta_2 \sum_{j=1}^{m} \ln(1 - Y_j)}{2m}} = \frac{m\theta_1}{n\theta_2} W$$

ακολουθεί την κατανομή $F_{2n;2m}$. Για $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η τ.μ. $\frac{m}{n}W$ ακολουθεί επίσης την κατανομή $F_{2n,2m}$. Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}\left(\frac{m}{n} W < \frac{m}{n} c_1\right) = \mathrm{P}\left(\frac{m}{n} W > \frac{m}{n} c_2\right) = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

και προκύπτει ότι:

$$\frac{m}{n} c_1 = F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ , \qquad \frac{m}{n} c_2 = F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ .$$

Τελικά, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{m \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i)}{n \sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j)} < F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ \text{ ή } \ \dfrac{m \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i)}{n \sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j)} > F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 4.12

Έστωσαν $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n και m από κατανομή Weibull με παραμέτρους $\frac{1}{\theta_1}$, c_1 και $\frac{1}{\theta_2}$, c_2, αντίστοιχα, όπου c_1 και c_2 είναι γνωστά. Σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\theta_1 = \theta_2$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta_1 \neq \theta_2$.

Λύση

Η σ.π.π. της κατανομής Weibull με παραμέτρους $\frac{1}{\theta}$ και c δίνεται από τη σχέση:

$$f(x;\theta) = c\theta x^{c-1} e^{-\theta x^c} \ , \qquad x > 0, \qquad \theta > 0, \qquad c > 0 \ .$$

Η λύση θα δοθεί με χρήση της μεθόδου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Επειδή τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι ανεξάρτητα, η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι:

$$L(\Omega) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_1, \theta_2\right) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \theta_1\right) L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_2\right) = c_1^n \theta_1^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_1 - 1} e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}} c_2^m \theta_2^m \prod_{j=1}^{m} y_j^{c_2 - 1} e^{-\theta_2 \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} \ .$$

Οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$\ln L(\Omega) = n\ln(c_1\theta_1) + (c_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + m\ln(c_2\theta_2) + (c_2 - 1)\sum_{j=1}^{m} \ln y_j - \theta_2 \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2} \ .$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1} = \dfrac{n}{\theta_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} = 0 \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}} \\ \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2} = \dfrac{m}{\theta_2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2} = 0 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{m}{\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} \end{cases} .$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1^2}\right|_{\theta_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}}} = \dfrac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\dfrac{n}{\theta_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}\right) = -\dfrac{n}{\theta_1^2} < 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2^2}\right|_{\theta_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}} = \dfrac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\dfrac{m}{\theta_2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}\right) = -\dfrac{m}{\theta_2^2} < 0 \end{cases} .$$

Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} y_i^{c_2}}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η πιθανοφάνεια γίνεται:

$$L(\omega) = c_1^n c_2^m \theta^{n+m} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}} e^{-\theta \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_1 - 1} \prod_{j=1}^{m} y_j^{c_2 - 1}$$

με συνέπεια:

$$\ln L(\omega) = n \ln c_1 + m \ln c_2 + (n+m)\ln\theta - \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}\right) + (c_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i + (c_2 - 1)\sum_{j=1}^{m} \ln y_j$$

και:

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta} = \frac{n+m}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}\right) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} ,$$

ενώ:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1 - 1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}} = -\frac{n+m}{\theta^2} < 0 .$$

Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}.$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{c_1^n c_2^m \hat{\theta}^{n+m} e^{-\hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}} e^{-\hat{\theta} \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_1 - 1} \prod_{j=1}^{m} y_j^{c_2 - 1}}{c_1^n \hat{\theta}_1^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_1 - 1} e^{-\hat{\theta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}} c_2^m \hat{\theta}_2^m \prod_{j=1}^{m} y_j^{c_2 - 1} e^{-\hat{\theta}_2 \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}} ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m e^{(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\theta} = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}$, $\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}}$ προκύπτει ότι:

$$(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1} = n - \hat{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}$$

και:

$$(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2} = m - \hat{\theta}\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2} ,$$

με συνέπεια:

$$(\hat{\theta}_1-\hat{\theta})\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}+(\hat{\theta}_2-\hat{\theta})\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}=n+m-\hat{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}-\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}\right)=0\ .$$

Συνεπώς:

$$\lambda=\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m=\left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}+\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{n}\right)^n\left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}+\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}{m}\right)^m\ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda=\left(\frac{n+m}{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}+\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}}{n}\right)^n\left(\frac{n+m}{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}+\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}}\frac{\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}{\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}}}{m}\right)^m\ .$$

Για $W=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{c_1}}{\sum_{j=1}^{m}Y_j^{c_2}}$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\lambda=\left(\frac{(n+m)W}{n(W+1)}\right)^n\left(\frac{n+m}{m(W+1)}\right)^m=\frac{(n+m)^{n+m}}{n^nm^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}}\ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda<c$, δηλαδή:

$$\frac{(n+m)^{n+m}}{n^nm^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}}<c\Rightarrow\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}}<c'\Rightarrow n\ln W-(n+m)\ln(W+1)<c''\ .$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(W)=n\ln W-(n+m)\ln(W+1)$, $W>0$, παρουσιάζει μέγιστο για $W=\frac{n}{m}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(W)=\frac{n}{W}-\frac{n+m}{W+1}=0\Rightarrow W=\frac{n}{m}\ ,$$

$$f''(W)|_{W=\frac{n}{m}}=-\frac{n}{W^2}+\frac{n+m}{(W+1)^2}=-\frac{m^2}{n}+\frac{n+m}{\left(\frac{n}{m}+1\right)^2}=-\frac{m^2}{n}+\frac{m^2}{n+m}=-\frac{m^3}{n(n+m)}<0.$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$W<c_1\ ,\qquad W>c_2\ ,$$

όπου τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}},\underset{\sim}{\mathrm{Y}}|\mathrm{H}_0\right)=\mathrm{P}(W<c_1|\mathrm{H}_0)+\mathrm{P}(W>c_2|\mathrm{H}_0)\ .$$

Οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται, εφόσον βρεθεί η κατανομή του στατιστικού $W=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^{c_1}}{\sum_{j=1}^{m}Y_j^{c_2}}$. Σύμφωνα με την άσκηση 4.8 (σελ. 132) ισχύει ότι:

$$\begin{cases}2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}\sim\boldsymbol{X}_{2n}^2\\2\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j^{c_2}\sim\boldsymbol{X}_{2m}^2\end{cases}.$$

Από το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\frac{2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{2n}}{\frac{2\theta_2\sum_{i=1}^{n}x_i^{c_1}}{2m}}=\frac{m\theta_1}{n\theta_2}W$$

ακολουθεί την κατανομή $F_{2n,2m}$. Για $\theta_1=\theta_2=\theta$ η τ.μ. $\frac{m}{n}W$ ακολουθεί επίσης την κατανομή $F_{2n,2m}$. Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}\left(\frac{m}{n}W<\frac{m}{n}c_1\right)=\mathrm{P}\left(\frac{m}{n}W>\frac{m}{n}c_2\right)=\frac{\mathrm{a}}{2}$$

και προκύπτει ότι:

$$\frac{m}{n}c_1=F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}}\ ,\qquad\frac{m}{n}c_2=F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}}\ .$$

Τελικά, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{m\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}}{n\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} < F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \text{ ή } \dfrac{m\sum_{i=1}^{n} x_i^{c_1}}{n\sum_{j=1}^{m} y_j^{c_2}} > F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 4.13

Έστωσαν $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{m}$ από κατανομή Pareto με παραμέτρους $\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{c_1}$ και $\boldsymbol{\theta_2}$, $\boldsymbol{c_2}$, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{c_1}$ και $\boldsymbol{c_2}$ είναι γνωστά. Σε στάθμη σημαντικότητας a να γίνει ο έλεγχος των υποθέσεων $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\theta_1 = \theta_2}$, έναντι της εναλλακτικής $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\theta_1 \neq \theta_2}$.

Λύση

Η λύση θα δοθεί με χρήση της μεθόδου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Επειδή τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι ανεξάρτητα, η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι:

$$L(\Omega) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_1, \theta_2\right) = L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \theta_1\right) L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}, \theta_2\right) = \frac{\theta_1^n c_1^{n\theta_1}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_1+1}} \frac{\theta_2^m c_2^{m\theta_2}}{\prod_{j=1}^{m} y_j^{\theta_2+1}} .$$

Οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$\ln L(\Omega) = n\ln\theta_1 + n\theta_1 \ln c_1 - (\theta_1 + 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i + m\ln\theta_2 + m\theta_2 \ln c_2 - (\theta_2 + 1)\sum_{j=1}^{m} \ln y_j .$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\theta_1} = \dfrac{n}{\theta_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{c_1} = 0 \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{c_1}} \\ \dfrac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\theta_2} = \dfrac{m}{\theta_2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \ln\frac{y_j}{c_2} = 0 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{m}{\sum_{j=1}^{m} \ln\frac{y_j}{c_2}} \end{cases} .$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\theta_1^2}\right|_{\theta_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{c_1}}} = \dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\dfrac{n}{\theta_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{c_1}\right) = -\dfrac{n}{\theta_1^2} < 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\theta_2^2}\right|_{\theta_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{y_j}{c_2}}} = \dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\dfrac{m}{\theta_2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \ln\frac{y_j}{c_2}\right) = -\dfrac{m}{\theta_2^2} < 0 \end{cases} .$$

Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{c_1}}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{y_j}{c_2}}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η πιθανοφάνεια γίνεται:

$$L(\omega) = \frac{\theta^{n+m} c_1^n c_2^m}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta+1} \prod_{j=1}^{m} y_j^{\theta+1}}$$

με συνέπεια:

$$\ln L(\omega) = (n+m)\ln\theta + n\ln c_1 + m\ln\theta_2 - (\theta + 1)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \sum_{j=1}^{m} \ln y_j\right)$$

και:

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial\theta} = \frac{n+m}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{c_1} + \sum_{j=1}^{m} \ln\frac{y_j}{c_2}\right) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{c_1} + \sum_{j=1}^{m} \ln\frac{y_j}{c_2}} ,$$

ενώ:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{n+m}{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}+\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}} = -\frac{n+m}{\theta^2} < 0 \ .$$

Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} + \sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} \ .$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m c_1^{n(\hat{\theta}-\hat{\theta}_1)} c_2^{m(\hat{\theta}-\hat{\theta}_2)} \prod_{i=1}^n x_i^{\hat{\theta}_1-\hat{\theta}} \prod_{j=1}^m y_j^{\hat{\theta}_2-\hat{\theta}} \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{c_1}\right)^{\hat{\theta}_1-\hat{\theta}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{y_j}{c_2}\right)^{\hat{\theta}_2-\hat{\theta}} \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln\lambda = (n+m)\ln\hat{\theta} - n\ln\hat{\theta}_1 - m\ln\hat{\theta}_2 + \left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} + \left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:
$\hat{\theta} = \frac{n+m}{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}+\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} = \frac{n+m}{\frac{n}{\hat{\theta}_1}+\frac{m}{\hat{\theta}_2}}$, $\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}$ και $\hat{\theta}_2 = \frac{m}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}$ προκύπτει ότι:

$$\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} = \left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)\frac{n}{\hat{\theta}_1} = n - n\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}$$

και:

$$\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2} = \left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)\frac{m}{\hat{\theta}_2} = m - m\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2} \ ,$$

δηλαδή:

$$\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} + \left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2} = n + m - \hat{\theta}\left(\frac{n}{\hat{\theta}_1} + \frac{m}{\hat{\theta}_2}\right) = n + m - \hat{\theta}\frac{n+m}{\hat{\theta}} = 0 \ .$$

Άρα:

$$\ln\lambda = (n+m)\ln\hat{\theta} - n\ln\hat{\theta}_1 - m\ln\hat{\theta}_2 = \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n + \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_1}\right)^n \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_2}\right)^m = \left(\frac{(n+m)\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{n(\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} + \sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2})}\right)^n \left(\frac{(n+m)\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}{m(\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1} + \sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2})}\right)^m \ ,$$

ή:

$$\lambda = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}}{\frac{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} + \frac{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}}\right)^n \left(\frac{\frac{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}}{\frac{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} + \frac{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}}}\right)^m \ .$$

Έστω $W = \frac{\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{Y_j}{c_2}}$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\lambda = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\left(\frac{W}{W+1}\right)^n \left(\frac{1}{W+1}\right)^m = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m}\frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} < c \Rightarrow \frac{W^n}{(W+1)^{n+m}} < c'$$

ή, όταν:

$$n\ln W - (n+m)\ln(W+1) < c'' \ .$$

Η συνάρτηση $f(W) = n\ln W - (n+m)\ln(W+1)$, $W > 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $W = \frac{n}{m}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(W) = \frac{n}{W} - \frac{n+m}{W+1} = 0 \Rightarrow W = \frac{n}{m} \ ,$$

$$f''(W)|_{W=\frac{n}{m}} = -\frac{n}{W^2} + \frac{n+m}{(W+1)^2} = -\frac{m^2}{n} + \frac{n+m}{\left(\frac{n}{m}+1\right)^2} = -\frac{m^2}{n} + \frac{m^2}{n+m} = -\frac{m^3}{n(n+m)} < 0 \ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$W < c_1 \ , \qquad W > c_2 \ ,$$

όπου τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}, \underset{\sim}{\mathrm{Y}} | \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{P}(W < c_1 | \mathrm{H}_0) + \mathrm{P}(W > c_2 | \mathrm{H}_0) \ .$$

Οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται, εφόσον βρεθεί η κατανομή του στατιστικού $W = \frac{\sum_{i=1}^n \ln\frac{X_i}{c_1}}{\sum_{j=1}^m \ln\frac{Y_j}{c_2}}$. Από την άσκηση 4.9 (σελ. 134) είναι γνωστό ότι:

$$\begin{cases} 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} \ln\frac{X_i}{c_1} \sim \boldsymbol{\chi}^2_{2n} \\ 2\theta_2 \sum_{j=1}^{m} \ln\frac{Y_j}{c_2} \sim \boldsymbol{\chi}^2_{2m} \end{cases} .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\frac{2\theta_1 \sum_{i=1}^n \ln\frac{X_i}{c_1}}{2n}}{\frac{2\theta_2 \sum_{j=1}^m \ln\frac{Y_j}{c_2}}{2m}} = \frac{m\theta_1}{n\theta_2}W$$

ακολουθεί την κατανομή $F_{2n;2m}$. Για $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ η τ.μ. $\frac{m}{n}W$ ακολουθεί επίσης την κατανομή $F_{2n,2m}$. Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}\left(\frac{m}{n}W < \frac{m}{n}c_1\right) = \mathrm{P}\left(\frac{m}{n}W > \frac{m}{n}c_2\right) = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

και προκύπτει ότι:

$$\frac{m}{n}c_1 = F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ , \qquad \frac{m}{n}c_2 = F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ .$$

Τελικά, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \ \frac{m\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{n\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} < F_{2n,2m;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ \text{ή} \ \frac{m\sum_{i=1}^n \ln\frac{x_i}{c_1}}{n\sum_{j=1}^m \ln\frac{y_j}{c_2}} > F_{2n,2m;\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Στους πίνακες 4.1 και 4.2 που ακολουθούν, δίνεται η απορριπτική περιοχή και το στατιστικό για τους ελέγχους υποθέσεων για ένα δείγμα και για δύο δείγματα.

Κατανομή	$\mathrm{H_0}$	$\mathrm{H_1}$	Απορριπτική περιοχή	Στατιστικό
$\boldsymbol{E(\theta)}$	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x}) = 2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i$
	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;a}\right\}$	
	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{a}{2}} \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{a}{2}}\right\}$	
$\boldsymbol{\beta(1,\theta)}$	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-a}\right\}$	$T\left(\underset{\sim}{x}\right) = -2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)$
	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;a}\right\}$	
	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{a}{2}} \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{a}{2}}\right\}$	
$\boldsymbol{\beta(\theta,1)}$	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-a}\right\}$	$T\left(\underset{\sim}{x}\right) = -2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$
	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;a}\right\}$	
	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{a}{2}} \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{a}{2}}\right\}$	
Weibull $\boldsymbol{(\theta,c)}$, $\boldsymbol{c}$**: γνωστό**	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x}) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} X_i^c$
	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;a}\right\}$	
	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{a}{2}} \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{a}{2}}\right\}$	
Pareto $\boldsymbol{(\theta,c)}$, $\boldsymbol{c}$**: γνωστό**	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x}) = 2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln\frac{X_i}{c}$
	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;a}\right\}$	
	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{a}{2}} \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{a}{2}}\right\}$	

Πίνακας 4.1 *Έλεγχοι υποθέσεων για ένα δείγμα.*

Κατανομή	$\mathrm{H_0}$	$\mathrm{H_1}$	Απορριπτική περιοχή	Στατιστικό
$\boldsymbol{E(\theta)}$	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;a}\right\}$	
	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$R = \left\{\begin{matrix}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-\frac{a}{2}} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) > F_{2n,2m;\frac{a}{2}}\end{matrix}\right\}$	
$\boldsymbol{\beta(1,\theta)}$	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \frac{m\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)}{n\sum_{j=1}^{m} \ln\left(1 - Y_j\right)}$
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;a}\right\}$	
	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$R = \left\{\begin{matrix}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-\frac{a}{2}} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) > F_{2n,2m;\frac{a}{2}}\end{matrix}\right\}$	
$\boldsymbol{\beta(\theta,1)}$	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \frac{m\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}{n\sum_{j=1}^{m} \ln Y_j}$
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;a}\right\}$	
	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$R = \left\{\begin{matrix}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-\frac{a}{2}} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) > F_{2n,2m;\frac{a}{2}}\end{matrix}\right\}$	
Weibull $\boldsymbol{(\theta_1,c_1)}$, $\boldsymbol{(\theta_2,c_2)}$,	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n;2m;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = \frac{m\sum_{i=1}^{n} X_i^{c_1}}{n\sum_{j=1}^{m} Y_j^{c_2}}$
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;a}\right\}$	

$\boldsymbol{c_1, c_2}$**: γνωστά**	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$R = \left\{ \begin{matrix} (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-\frac{a}{2}} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) > F_{2n,2m;\frac{a}{2}} \end{matrix} \right\}$	
Pareto $(\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{c_1})$, $(\boldsymbol{\theta_2}, \boldsymbol{c_2})$, $\boldsymbol{c_1, c_2}$**: γνωστά**	$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$R = \left\{ (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-a} \right\}$	$T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \dfrac{m \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{c_1}}{n \sum_{j=1}^{m} \ln \frac{Y_j}{c_2}}$
	$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$R = \left\{ (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;a} \right\}$	
	$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$R = \left\{ \begin{matrix} (\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) : T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) < F_{2n,2m;1-\frac{a}{2}} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) > F_{2n,2m;\frac{a}{2}} \end{matrix} \right\}$	

Πίνακας 4.2 *Έλεγχοι υποθέσεων για δύο δείγματα.*

Κεφάλαιο 5 Ελεγχοσυναρτήσεις για τις Παραμέτρους της Κανονικής Κατανομής

Σύνοψη
Είναι γνωστό ότι η κανονική κατανομή εξαρτάται από δύο παραμέτρους, τη μέση τιμή και τη διασπορά. Οι έλεγχοι, που περιγράφονται στο 5ο κεφάλαιο, αφορούν μια από τις δύο παραμέτρους, ακόμη και όταν οι δύο παράμετροι είναι άγνωστες. Να σημειωθεί ότι η άγνωστη παράμετρος για την οποία δε γίνεται έλεγχος υποθέσεων συχνά αναφέρεται ως ενοχλητική παράμετρος (nuisance parameter). Έστω θ *η παράμετρος για την οποία γίνεται έλεγχος υποθέσεων. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται οι ελεγχοσυναρτήσεις που αφορούν τις υποθέσεις:* $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$, *όταν η δεύτερη παράμετρος είναι γνωστή ή άγνωστη,* $H_0: \theta \geq \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$, *ή* $H_0: \theta \leq \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$, *μόνο όταν η δεύτερη παράμετρος είναι άγνωστη. Για τους τελευταίους ελέγχους υποθέσεων, όταν η δεύτερη παράμετρος είναι γνωστή, οι ελεγχοσυναρτήσεις δίνονται στο κεφάλαιο 3. Επίσης στο κεφάλαιο αυτό γίνεται σύγκριση των παραμέτρων δύο κατανομών ανεξαρτήτων δειγμάτων όταν αυτά προέρχονται από κανονική κατανομή. Οι έλεγχοι υποθέσεων αφορούν τις μέσες τιμές ή τις διασπορές των δύο δειγμάτων, τόσο στην περίπτωση που οι παράμετροι για τις οποίες δε γίνεται έλεγχος υποθέσεων είναι γνωστές όσο και άγνωστες.*

Προαπαιτούμενη γνώση
Η κανονική κατανομή κατέχει εξέχουσα θέση τόσο στη Θεωρία Πιθανοτήτων όσο και στη Στατιστική, διότι οι τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν μαθηματικά πολλά προβλήματα ακολουθούν κανονική κατανομή, αλλά και γιατί εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα η δειγματική μέση τιμή ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό στο βιβλίο αφιερώνεται ένα ολόκληρο κεφάλαιο σε ελέγχους υποθέσεων που αφορούν στις παραμέτρους, μέση τιμή και διασπορά, της κανονικής κατανομής. Στα κεφάλαια 2 και 3 μελετήθηκε μερικώς η κανονική κατανομή χωρίς να εξαντληθούν, όμως, όλες οι περιπτώσεις. Στο 2ο κεφάλαιο οι έλεγχοι ήταν απλοί, ενώ στο 3ο κεφάλαιο οι έλεγχοι, που μελετήθηκαν, ήταν για σύνθετες υποθέσεις, όταν, όμως, η μία από τις δύο παραμέτρους ήταν γνωστή. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο καλύπτονται, σχεδόν, όλες οι περιπτώσεις για τους ελέγχους υποθέσεων των παραμέτρων μιας, αλλά και δύο κανονικών κατανομών. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει παραδείγματα και ασκήσεις που σχετίζονται με όσα πραγματεύεται το συγκεκριμένο κεφάλαιο στα βιβλία: «Statistics: Theory and Methods» του D. A. Berry (σελ. 176), «Statistical Inference, 2nd Edition» των G. Casella και J. O. Berger (σελ. 176), «Probability and Statistics, 3rd edition» του M. H. De Groot (σελ. 176), «Mathematical Statistics with Applications, 6th Edition» των W. Mendenhall, R. L. Scheaffer και D. D. Wackerly (σελ. 176), «Mathematical Statistics and Data Analysis, 2nd edition» του J. A. Rice (σελ. 176) και «Statistical Methods, 8th edition» των G. W. Snedecor και W. G. Cochran (σελ. 177).

5.1. Εισαγωγή

Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζονται οι έλεγχοι υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός δείγματος που ακολουθεί κανονική κατανομή, όταν η διασπορά είναι γνωστή ή άγνωστη, για τη διασπορά ενός δείγματος που ακολουθεί κανονική κατανομή, όταν η μέση τιμή είναι γνωστή ή άγνωστη. Επίσης, αναφέρονται οι έλεγχοι υποθέσεων για τις μέσες τιμές και τις διασπορές δύο ανεξαρτήτων δειγμάτων που προέρχονται από κανονική κατανομή. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τους ελέγχους υποθέσεων που αφορούν στη σύγκριση των μέσων τιμών δύο εξαρτημένων δειγμάτων που προέρχονται από κανονική κατανομή.

5.2. Υποθέσεις για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής

Θεώρημα 5.1

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου σ^2 γνωστό, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Να αποδειχθεί ότι οι ελεγχοσυναρτήσεις για τις παρακάτω υποθέσεις:

1. $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu \neq \mu_0$,
2. $\mathrm{H}_0: \mu \geq \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$,
3. $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$,

δίνονται από τις σχέσεις (5.3), (5.4) και (5.5) , αντίστοιχα.

Απόδειξη.

1. Ο παραμετρικός χώρος Ω είναι $\Omega = \{\mu : -\infty < \mu < +\infty\}$. Ο υποχώρος ω που χαρακτηρίζεται από τη μηδενική υπόθεση H_0 είναι $\omega = \{\mu : \mu = \mu_0\}$, δηλαδή ένα και μόνο σημείο.
Η πιθανοφάνεια είναι:
$$L\left(\underset{\sim}{x}; \mu\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} . \qquad (5.1)$$
Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:
$$\ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} .$$
Παραγωγίζοντας ως προς μ και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:
$$\frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} .$$
Επιπλέον,
$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\sigma^2}\right) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 .$$
Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου μ είναι $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X}$. Επομένως:
$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2}\right\}$$
και:
$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\} .$$
Ο λόγος των πιθανοφανειών γίνεται:
$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \mu_0)^2 - (x_i - \bar{X})^2]\right\} = \exp\left\{-\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\} .$$
Άρα:
$$-2\ln\lambda = \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} = \left[\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right]^2 .$$
Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση του λόγου πιθανοφανειών είναι:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \left[\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right]^2 > c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} , \qquad (5.2)$$
όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:
$$\mathrm{a} = E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(\left[\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right]^2 > c\right) \Rightarrow 1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(-\sqrt{c} \leq \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \sqrt{c}\right) .$$
Σύμφωνα με το θεώρημα 1.10 (σελ. 25), αν η τ.μ. X_i ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τ.μ. $\bar{X}$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Επιπλέον, όταν η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$ είναι αληθής, τότε $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ και η τ.μ.

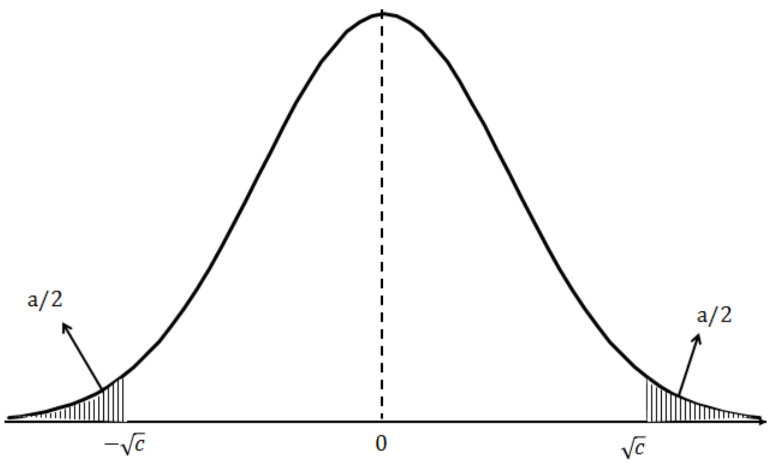
$$\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)\,.$$

Επομένως:

$$\mathrm{P}\left(-\sqrt{c} \le \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \le \sqrt{c}\right) = 1-\mathrm{a} \Rightarrow \Phi(\sqrt{c}) - \Phi(-\sqrt{c}) = 1-\mathrm{a}\ ,$$

ή:

$$2\Phi(\sqrt{c}) = 2-\mathrm{a} \Rightarrow \sqrt{c} = z_{\mathrm{a}/2}\ .$$



Σχήμα 5.1 *Κρίσιμα σημεία και απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης του θεωρήματος 5.1.*

Από τη σχέση (5.2) προκύπτει ότι η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \left|\dfrac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| > z_{\mathrm{a}/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}\ . \tag{5.3}$$

2. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \mu \ge \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$, σύμφωνα με το παράδειγμα 3.4 (σελ. 93), η κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ και η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i < c \\ 0, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ge c \end{cases}\ ,$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c\right) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \mathrm{a}\ ,$$

δηλαδή:

$$\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = -z_{\mathrm{a}} \Rightarrow c = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\mathrm{a}}\ .$$

Άρα η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < -z_{\mathrm{a}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}\ . \tag{5.4}$$

3. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \mu \le \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$ με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η Ο.Ι.Ε. ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \dfrac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}>z_{\mathrm{a}} \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} . \qquad (5.5)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται η απορριπτική περιοχή για όλες τις περιπτώσεις των ελέγχων υποθέσεων για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά είναι γνωστή.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) < -z_{\mathrm{a}}\right\}$	$T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=\dfrac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > z_{\mathrm{a}}\right\}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : \left\lvert T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right\rvert > z_{\mathrm{a}/2}\right\}$	

Πίνακας 5.1 *Έλεγχοι υποθέσεων για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά είναι γνωστή.*

Η ισχύς του δίπλευρου έλεγχου των υποθέσεων $\mathrm{H}_0\colon \mu=\mu_0$, $\mathrm{H}_1\colon \mu\neq\mu_0$, όταν η διασπορά είναι γνωστή, δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma=\mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X}-\mu_0|\sqrt{n}}{\sigma}>z_{\mathrm{a}/2}\middle|\mu\neq\mu_0\right)=1-\mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X}-\mu_0|\sqrt{n}}{\sigma}<z_{\mathrm{a}/2}\middle|\mu\neq\mu_0\right),$$

ή:

$$\gamma=1-\mathrm{P}\left(-z_{\mathrm{a}/2}+\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}<\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}<z_{\mathrm{a}/2}+\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

δηλαδή:

$$\gamma=1-\Phi\left(z_{\mathrm{a}/2}+\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)+\Phi\left(-z_{\mathrm{a}/2}+\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\Phi(z_1)+\Phi(z_2),$$

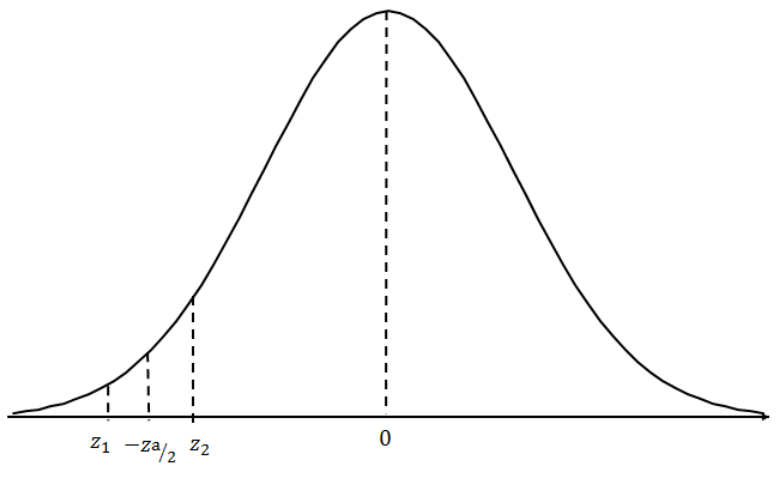
δηλαδή:

$$\gamma=\Phi\left(-z_{\mathrm{a}/2}-\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)+\Phi\left(-z_{\mathrm{a}/2}+\frac{(\mu_0-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

ή:

$$\gamma=\Phi\left(-z_{\mathrm{a}/2}-\frac{|\mu_0-\mu|\sqrt{n}}{\sigma}\right)+\Phi\left(-z_{\mathrm{a}/2}+\frac{|\mu_0-\mu|\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\Phi(z_1)+\Phi(z_2),$$

για $z_1=-z_{\mathrm{a}/2}-\frac{|\mu_0-\mu|\sqrt{n}}{\sigma}$ και $z_2=-z_{\mathrm{a}/2}+\frac{|\mu_0-\mu|\sqrt{n}}{\sigma}$.



Σχήμα 5.2 *Ισχύς ελέγχου υποθέσεων H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$, όταν η διασπορά είναι γνωστή.*

Από το σχήμα 5.2 προκύπτει ότι:

$$\gamma = 2\Phi\left(-z_{a/2}\right) + \mathrm{P}\left(-z_{a/2} < Z \le -z_{a/2} + \frac{|\mu_0 + \mu|\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(-z_{a/2} - \frac{|\mu_0 - \mu|\sqrt{n}}{\sigma} \le Z \le -z_{a/2}\right) .$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}\left(-z_{a/2} < Z \le -z_{a/2} + \frac{|\mu_0 - \mu|\sqrt{n}}{\sigma}\right) > \mathrm{P}\left(-z_{a/2} - \frac{|\mu_0 - \mu|\sqrt{n}}{\sigma} \le Z \le -z_{a/2}\right) ,$$

με συνέπεια $\gamma > \mathrm{a}$ και ο έλεγχος να είναι αμερόληπτος.

Θεώρημα 5.2

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου σ^2 άγνωστο, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Να αποδειχθεί ότι οι ελεγχοσυναρτήσεις για τις παρακάτω υποθέσεις:

1. $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu \neq \mu_0$,
2. $\mathrm{H}_0: \mu \geq \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu < \mu_0$,
3. $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$,

δίνονται από τις σχέσεις (5.14), (5.15) και (5.16), αντίστοιχα.

Απόδειξη.

1. Ο παραμετρικός χώρος Ω είναι $\Omega = \{(\mu, \sigma^2): -\infty < \mu < +\infty,\ 0 < \sigma^2 < +\infty\}$. Ο υποχώρος ω που χαρακτηρίζεται από τη μηδενική υπόθεση H_0 είναι η κατακόρυφη ευθεία $\omega = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0,\ 0 < \sigma^2 < +\infty\}$. Ο έλεγχος θα γίνει με τη βοήθεια του γενικευμένου λόγου των πιθανοφανειών. Η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \mu, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} . \tag{5.6}$$

Από το θεώρημα 5.1 (σελ. 148) είναι γνωστό ότι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου μ είναι $\hat{\mu} = \bar{X}$. Για τον Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2 λογαριθμίζοντας τη σχέση (5.6) προκύπτει ότι:

$$\ln\left(L(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \mu, \sigma^2)\right) = \ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\mu} = \bar{X}$, παραγωγίζοντας ως προς σ^2 και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L(\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n} .$$

Επιπλέον,

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2}\right|_{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4}\right) = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma^6}$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^4} < 0 .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2 είναι:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n} . \tag{5.7}$$

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} . \tag{5.8}$$

Η ποσότητα $L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \mu, \sigma^2\right)$ πρέπει να μεγιστοποιηθεί, όταν $(\mu, \sigma^2) \in \omega$. Θέτοντας $\mu = \mu_0$ προκύπτει, με ανάλογο τρόπο, ότι η τιμή του σ^2 που μεγιστοποιεί την ποσότητα $L(\omega)$ είναι:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 \ .$$

Τότε:

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} \ . \tag{5.9}$$

Ο λόγος των πιθανοφανειών γίνεται:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \ . \tag{5.10}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστεί η κατανομή του λ, δοθείσης της μηδενικής υπόθεσης H_0 και να προσδιοριστεί ένας αριθμός, έστω A, τέτοιος, ώστε η κρίσιμη (απορριπτική) περιοχή $0 < \lambda < A$ να δίνει την πιθανότητα a απόρριψης της υπόθεσης H_0, όταν αυτή είναι σωστή. Επειδή:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2 \ ,$$

ο λόγος πιθανοφανειών λ παίρνει τη μορφή:

$$\lambda = \left(\frac{1}{1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}} \ , \tag{5.11}$$

όπου η μεταβλητή:

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s}, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 \ ,$$

ακολουθεί, σύμφωνα με το θεώρημα 1.12 (σελ. 30), την κατανομή t του Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας όταν η μηδενική υπόθεση H_0 είναι σωστή. Διαπιστώνεται, επομένως, ότι ο λόγος πιθανοφανειών λ είναι μία μονότονη συνάρτηση του t^2, με αποτέλεσμα ο έλεγχος να γίνει ως προς t^2. Επειδή ο λόγος λ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t^2, μια περιοχή της μορφής $0 < \lambda < A$ ισοδυναμεί με μια κρίσιμη περιοχή $t^2 > B$, όπου το B προσδιορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{a} = E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}(\lambda < A) = \mathrm{P}_{\mu_0}(t^2 > B) \ ,$$

ή ισοδύναμα:

$$1 - \mathrm{a} = \mathrm{P}_{\mu_0}(t^2 \le B) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(-\sqrt{B} \le t \le \sqrt{B}\right) = T_{n-1}\left(\sqrt{B}\right) - T_{n-1}\left(-\sqrt{B}\right) \ , \tag{5.12}$$

όπου $T_{n-1}(t)$ είναι η σ.α.κ. της τ.μ. T η οποία ακολουθεί την κατανομή Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή την t_{n-1} όταν η μηδενική υπόθεση H_0: $\mu = \mu_0$ ισχύει. Επειδή η κατανομή t_{n-1} είναι συμμετρική, ισχύει ότι $1 - T_{n-1}\left(\sqrt{B}\right) = T_{n-1}\left(-\sqrt{B}\right)$ και η (5.12) γίνεται:

$$1 - \mathrm{a} = 2T_{n-1}\left(\sqrt{B}\right) - 1 \ ,$$

ή:

$$T_{n-1}\left(\sqrt{B}\right) = \mathrm{P}_{\mu_0}\left(T \le \sqrt{B}\right) = 1 - \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$

δηλαδή $\sqrt{B} = t_{n-1;\frac{\mathrm{a}}{2}}$. Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης H_0 συνοψίζεται ως εξής:

Υπολογίζεται η ποσότητα:

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \ . \tag{5.13}$$

Αν ισχύει ότι: $|t| < t_{n-1;\mathrm{a}/2}$ η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή, αλλιώς απορρίπτεται. Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

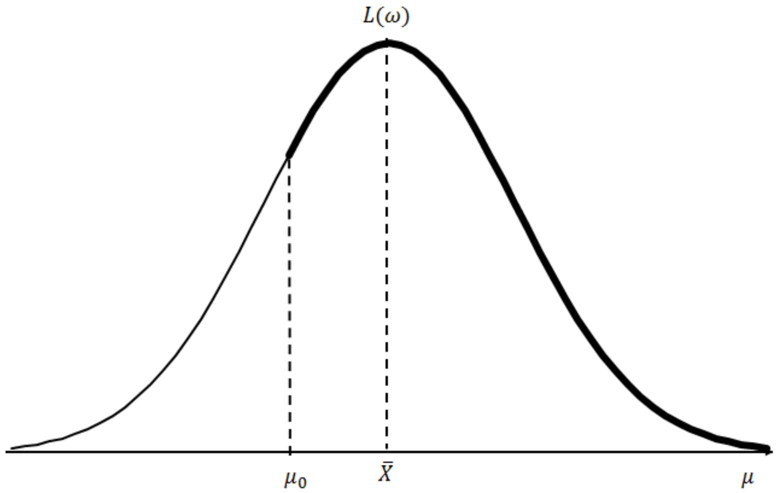
$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \left|\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}\right|>t_{n-1;a/2} \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} \quad . \tag{5.14}$$

2. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ ισχύει ότι:

$$\omega = \{\mu, \sigma^2\} = \{\mu \geq \mu_0, 0 < \sigma^2 < +\infty\} \ .$$

Στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί το:

$$\sup_{\omega}\{L(\omega)\} = \sup_{\mu\geq\mu_0}\left\{L\left(\underset{\sim}{x};\mu,\sigma^2\right)\right\} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\} \ .$$

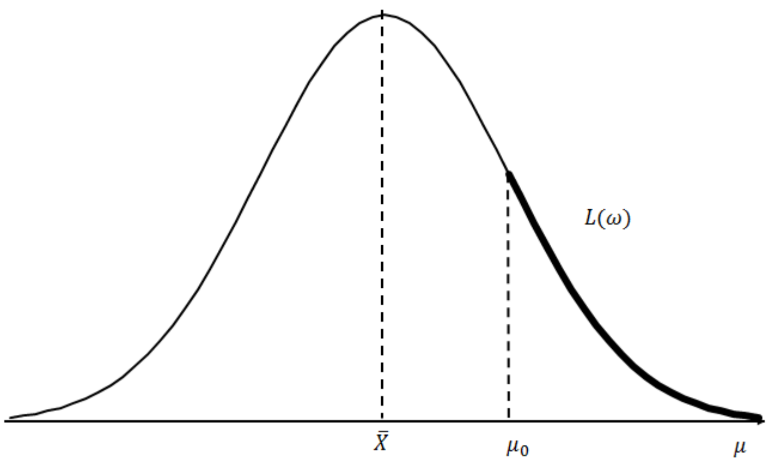


Σχήμα 5.3 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανοφάνειας (με έντονη γραμμή είναι η πιθανοφάνεια L(ω)) της περίπτωσης 2 του θεωρήματος 5.2, όταν $\mu_0 < \bar{X}$.*

Έστω $\mu_0 < \bar{X}$. Σύμφωνα με το σχήμα 5.2 προκύπτει ότι:

$$\sup_{\mu\geq\mu_0}\left\{L\left(\underset{\sim}{x};\mu,\sigma^2\right)\right\} = L\left(\underset{\sim}{x};\sigma^2\right)$$

και ο Ε.Μ.Π. της διασποράς σ^2 είναι $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{n}$ με συνέπεια, από τη σχέση $\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}$ να ισχύει ότι $\lambda = 1$ και η μηδενική υπόθεση να γίνεται δεκτή, χωρίς περαιτέρω έλεγχο.



Σχήμα 5.4 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανοφάνειας (με έντονη γραμμή είναι η πιθανοφάνεια L(ω)). της περίπτωσης 2 του θεωρήματος 5.2, όταν $\mu_0 > \bar{X}$.*

Αν $\mu_0 > \bar{X}$, τότε από το σχήμα 5.3 προκύπτει ότι:

$$\sup\left\{L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\underset{\sim}{\theta}\right):\underset{\sim}{\theta}\in\omega\right\}=\sup_{\mu\geq\mu_0}\left\{L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\mu,\sigma^2\right)\right\}=L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\mu_0,\sigma^2\right).$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$. Από τη σχέση (5.10) προκύπτει ότι:

$$\lambda=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right]^{\frac{n}{2}}<c\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}>c'\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}>c'\ ,$$

ή:

$$1+\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}>c'\Rightarrow\frac{|\bar{X}-\mu_0|\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}}>c''\ .$$

Θέτοντας: $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$, από το θεώρημα 1.12 (σελ. 30), είναι γνωστό ότι η τ.μ. $\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$ ακολουθεί την κατανομή t_{n-1}. Επομένως, για $\mu_0 > \bar{X}$ η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu \geq \mu_0$ απορρίπτεται, όταν $\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} < -c''$, όπου η σταθερά c'' υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E_{\mu_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{P}_{\mu_0}(\lambda<c)=\mathrm{P}_{\mu_0}\left(\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}<-c''\right)\Rightarrow c''=t_{n-1;\mathrm{a}}\ .$$

Άρα η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}<-t_{n-1;\mathrm{a}}\ .\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\tag{5.15}$$

3. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0$, $\mathrm{H}_1: \mu > \mu_0$ ακολουθώντας τη διαδικασία, που περιγράφηκε στην προηγούμενη περίπτωση 2, αποδεικνύεται ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, το οποίο συνεπάγεται $\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} > c'''$, με $c''' = t_{n-1;\mathrm{a}}$ και η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}>t_{n-1;\mathrm{a}}\ .\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\tag{5.16}$$

Στον πίνακα 5.2 δίνεται η ανακεφαλαίωση, όσων αποδείχθηκαν στο θεώρημα 5.2 (σελ. 152), για τους ελέγχους υποθέσεων της μέσης τιμής της κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά είναι άγνωστη.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}:T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})<-t_{n-1;\mathrm{a}}\right\}$	$T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})=\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}:T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})>t_{n-1;\mathrm{a}}\right\}$	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$R=\left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}:\left\lvert T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right\rvert>t_{n-1;\mathrm{a}/2}\right\}$	

Πίνακας 5.2 *Έλεγχοι υποθέσεων για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά είναι άγνωστη.*

Παράδειγμα 5.1

Δίνεται τυχαίο δείγμα μεγέθους 25 από κανονική κατανομή $N(\mu, 2^2)$. Υπολογίστηκε η μέση τιμή του τυχαίου δείγματος και βρέθηκε ίση με 18. Σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.01$ να ελεγχθεί αν η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu = 20$ γίνεται δεκτή έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H}_1: \mu \neq 20$.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων αφορά ένα δείγμα που προέρχεται από κανονική κατανομή με διασπορά γνωστή και ίση με $\sigma^2 = 2^2$. Σύμφωνα με τον πίνακα 5.1 (σελ. 151), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : \left|T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right| > z_{a/2}\right\}$, όπου $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$. Από τα δεδομένα του παραδείγματος, εύκολα, υπολογίζεται ότι:

$$T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \frac{(18-20)\sqrt{25}}{2} = -5 \ .$$

Από τον πίνακα Β1 (σελ. 214) του παραρτήματος Β, για $\mathrm{a} = 0.01$ προκύπτει ότι $z_{0.005} = 2.57$. Συνεπώς, $\left|T(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right| = 5 > z_{a/2} = 2.57$ και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Παράδειγμα 5.2

Για τυχαίο δείγμα μεγέθους 36 από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ υπολογίστηκε η μέση τιμή και η διασπορά του και βρέθηκαν ίσες με 15 και 6.25, αντίστοιχα. Να ελεγχθεί, σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.10$, αν η μηδενική υπόθεση H_0: $\mu = 12$ γίνεται δεκτή έναντι της εναλλακτικής H_1: $\mu > 12$.

Λύση

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ζητείται να πραγματοποιηθεί μονόπλευρος έλεγχος υποθέσεων για ένα δείγμα που προέρχεται από κανονική κατανομή με διασπορά άγνωστη. Από τον πίνακα 5.2 (σελ. 155), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) > t_{n-1;\mathrm{a}}\right\}$, όπου $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Στην εκφώνηση του παραδείγματος δίνεται ότι $\bar{X} = 15$, $s = \sqrt{6.25} = 2.25$ και $n = 36$. Επομένως:

$$T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \frac{(15-12)\sqrt{36}}{2.25} = 8 \ .$$

Επιπλέον, $t_{n-1;\mathrm{a}} = t_{35;0.10} = 1.306$ (παράρτημα Β, πίνακας Β2, σελ. 215). Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, γιατί $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = 8 > t_{n-1;\mathrm{a}} = 1.306$.

5.3. Σύγκριση μέσων τιμών δύο κανονικών κατανομών

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να συγκριθούν δύο μέσες τιμές, χωρίς καμια τους να είναι γνωστή, σε αντίθεση με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, όπου η μέση τιμή μ_0 ήταν γνωστή. Για παράδειγμα, αν πρόκειται να εξετασθεί αν ο μέσος όρος του βαθμού πτυχίου των φοιτητών ενός τμήματος διαφέρει σε σχέση με το φύλο, τότε κανένας από τους μέσους όρους δε μπορεί να θεωρηθεί γνωστός ώστε να ληφθεί ως βάση για σύγκριση.

Θεώρημα 5.3

Έστωσαν δύο πληθυσμοί από κανονική κατανομή, ο X_1 από την κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και ο X_2 από την κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, με σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα. Από τους δύο πληθυσμούς λαμβάνονται δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n και m αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο υποθέσεων H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ δίνεται από τη σχέση (5.23).

Απόδειξη.

Ο παραμετρικός χώρος Ω είναι τετραδιάστατος. Η από κοινού κατανομή των X_1 και X_2 προσδιορίζεται, όταν πάρουν τιμές και οι τέσσερις παράμετροι $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Ο υπόχωρος ω είναι τριδιάστατος, διότι χρειάζονται μόνο τρεις τιμές, για να προσδιοριστεί η από κοινού κατανομή, κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Αν υπάρχουν n παρατηρήσεις από τον πρώτο πληθυσμό $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})$ και m παρατηρήσεις από το δεύτερο πληθυσμό $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2m})$, η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2; \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} . \tag{5.17}$$

Η πιθανοφάνεια γίνεται μέγιστη, όταν $\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2$, $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2$ και $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνει τη μορφή:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{2\pi\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} . \tag{5.18}$$

Αν $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ και επιχειρηθεί να μεγιστοποιηθεί η πιθανοφάνεια ως προς μ, σ_1^2 και σ_2^2, τότε θα βρεθεί ότι η εκτίμηση του μ δίνεται ως ρίζα μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, η οποία είναι μια αρκετά σύνθετη παράσταση των παρατηρήσεων. Ο λόγος πιθανοφανειών λ που προκύπτει είναι μία περίπλοκη συνάρτηση των παρατηρήσεων και αυτό έχει ως συνέπεια να είναι αρκετά δύσκολος ο υπολογισμός της κατανομής του, καθώς εξαρτάται, εκτός των άλλων, και από το λόγο των διασπορών. Συνεπώς, η εύρεση μιας κρίσιμης περιοχής $0 < \lambda < A$ με δοσμένη πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι ίση με a είναι δύσκολη, διότι ο λόγος των διασπορών είναι συνήθως άγνωστος. Έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές, για να παρακαμφθεί αυτή η δυσκολία. Όταν τα δείγματα είναι μεγάλα, υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους αυτή η κυβική ρίζα και στη συνέχεια εκτιμάται ο λόγος πιθανοφανειών λ. Η κρίσιμη περιοχή υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ποσότητα $-2\log\lambda$ ακολουθεί με καλή προσέγγιση την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2$-κατανομή.

Αν υποτεθεί ότι οι διασπορές είναι ίσες, τότε το πρόβλημα είναι πιο εύκολο να λυθεί. Σε αυτή την περίπτωση ο παραμετρικός χώρος Ω έχει διάσταση τρία, με συνιστώσες $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$, ενώ ο ω για τη μηδενική υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ έχει διάσταση δύο με συνιστώσες $(\mu_1 = \mu_2 = \mu, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι Ε.Μ.Π. των μ_1, μ_2 και σ^2 είναι:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1 \ , \qquad \hat{\mu}_2 = \bar{X}_2 \ , \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right] .$$

Επομένως, για τον Ω, ισχύει ότι:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{n+m}{2\pi\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right]}\right)^{\frac{n+m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} . \tag{5.19}$$

Για τον ω, αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}x_{1i} + \sum_{j=1}^{m}x_{2j}\right] = \frac{n\bar{X}_1 + m\bar{X}_2}{n+m} \ ,$$
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\hat{\mu})^2\right] ,$$

ή:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right) + \frac{n^2m^2}{(n+m)^2}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2 = \hat{\sigma}^2 + \frac{n^2m^2}{(n+m)^2}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2 \ .$$

Επομένως:

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{n+m}{2\pi\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\right]}\right)^{\frac{n+m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} . \tag{5.20}$$

Τελικά, ο λόγος πιθανοφανειών γίνεται:

$$\lambda = \left[\frac{1}{1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2+\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}}\right]^{\frac{n+m}{2}} . \tag{5.21}$$

Η σχέση (5.21) είναι παρόμοια με τη σχέση (5.11) και αποδεικνύεται ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος μπορεί να γίνει πάλι με τη βοήθεια της t-κατανομής. Πράγματι, οι $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονικές κατανομές, διότι: $\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ και $\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m})$, σύμφωνα με το θεώρημα 1.10 (σελ. 25). Τότε από το θεώρημα 1.13 (σελ. 30), προκύπτει ότι:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right) .$$

Όταν η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu$, ισχύει τότε:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right) .$$

Οι ποσότητες:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sigma^2} \quad , \qquad \frac{\sum_{j=1}^{m}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2}{\sigma^2} \ ,$$

είναι ανεξάρτητες και έχουν κατανομές $\boldsymbol{\mathcal{X}^2}$ με $n-1$ και $m-1$ β.ε. αντίστοιχα, σύμφωνα με το θεώρημα 1.12 (σελ. 30). Άρα από το θεώρημα 1.8 (σελ. 25), το άθροισμα τους, έστω V, θα ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}^2}$ κατανομή με $n+m-2$ β.ε. Ακόμη, επειδή:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim N(0,1) \ ,$$

η ποσότητα:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n+m-2}}} = \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2+\sum_{j=1}^{m}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2}{n+m-2}}}$$

θα ακολουθεί την t-κατανομή με $n+m-2$ β.ε., σύμφωνα με το θεώρημα 1.12 (σελ. 30). Στην περίπτωση αυτή ο λόγος πιθανοφανειών γράφεται ως:

$$\lambda = \left[\frac{1}{1+\frac{t^2}{n+m-2}}\right]^{\frac{n+m}{2}} . \tag{5.22}$$

και η κατανομή του προσδιορίζεται από την t-κατανομή. Έστω:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2+\sum_{j=1}^{m}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2}{n+m-2} .$$

Τελικά η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} > t_{n+m-2;\mathrm{a}/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} . \tag{5.23}$$

Αν κάποιος επιθυμεί να ελέγξει τη μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2$ έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H}_1: \mu_1 < \mu_2$ σε σ.σ. a η απορριπτική περιοχή προκύπτει, όταν $t < -t_{n+m-2;\mathrm{a}}$, ενώ για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2$, $\mathrm{H}_1: \mu_1 > \mu_2$ η απορριπτική περιοχή προκύπτει, όταν $t > t_{n+m-2;\mathrm{a}}$. Στον πίνακα 5.3 (σελ. 159) δίνονται οι απορριπτικές περιοχές όλων των ελέγχων υποθέσεων για τις μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών με διασπορές άγνωστες και ίσες, ακολουθώντας τη διαδικασία του θεωρήματος 5.2 (σελ. 152), περιπτώσεις 2 και 3.

H_0	H_1	Απορριπτική περιοχή	Στατιστικό
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) < -t_{n+m-2;a} \right\}$	$T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$, $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(X_{2j} - \bar{X}_2)^2}{n+m-2}$ ή $s^2 = \dfrac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) > t_{n+m-2;a} \right\}$	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : \left| T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) \right| > t_{n+m-2;a/2} \right\}$	

Πίνακας 5.3 *Έλεγχοι υποθέσεων για μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών με διασπορές άγνωστες και ίσες.*

Θεώρημα 5.4

Έστωσαν δύο πληθυσμοί από κανονική κατανομή, ο X_1 από την κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και ο X_2 από την κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, με σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα και άνισα. Από τους δύο πληθυσμούς λαμβάνονται δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n και m, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο υποθέσεων H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ δίνεται από τη σχέση (5.27).

Απόδειξη.

Αν υποτεθεί ότι οι διασπορές είναι άνισες, τότε η στ.σ. T, με τη βοήθεια της οποίας θα καθοριστεί η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης H_0, έχει μία αρκετά πολύπλοκη μορφή, η οποία περιέχει τις ποσότητες $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, S_1^2, S_2^2 και τις παραμέτρους μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2. Αποδεικνύεται ότι ο λόγος λ είναι συνάρτηση της στ. σ. $T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$, η οποία έχει τη μορφή:

$$T\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2\right) = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+m-2}\left[\dfrac{(n-1)s_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(m-1)s_2^2}{\sigma_2^2}\right]}}. \tag{5.24}$$

Μία προσεγγιστική τιμή είναι να αντικατασταθεί η παραπάνω τιμή της $T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$ από την ποσότητα:

$$T^*\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}}}. \tag{5.25}$$

Στη σχέση (5.25) ο αριθμητής ακολουθεί μια κανονική κατανομή, με μέση τιμή 0, αλλά ο παρονομαστής δεν είναι πολλαπλάσιο κάποιας μεταβλητής που ακολουθεί την $\boldsymbol{X}^2$ κατανομή, με συνέπεια η στ.σ. $T^*(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)$ να μην έχει t κατανομή. Για μεγάλες, όμως, τιμές των n και m μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί μια κατανομή t_{n+m-2}, χωρίς σοβαρό σφάλμα. Μια προσέγγιση, που βελτιώνει περισσότερο τη μέθοδο, είναι ο αριθμός των β.ε. να ισούται με τον πλησιέστερο ακέραιο προς τον αριθμό:

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}} - 2\ . \tag{5.26}$$

Η παραπάνω προσέγγιση οφείλεται στους Behrens (σελ. 176), Fisher (σελ. 176) και Snedecor (σελ. 177). Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}}} > t_{\nu;a/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \tag{5.27}$$

Στον πίνακα 5.4 δίνονται οι απορριπτικές περιοχές όλων των ελέγχων υποθέσεων για τις μέσες δύο κανονικών κατανομών με διασπορές άγνωστες και άνισες.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) < -t_{v;a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$,
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) > t_{v;a}\right\}$	$v = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}} - 2$, ή $v = 2n$, αν $n = m$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : \left\lvert T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)\right\rvert > t_{v;a/2}\right\}$	

Πίνακας 5.4 *Έλεγχοι υποθέσεων για μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών με διασπορές άγνωστες και άνισες.*

Θεώρημα 5.5
Έστω $\underset{\sim}{X}_1' = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n})$ τ.δ. από κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $\underset{\sim}{X}_2' = (X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2m})$ τ.δ. από κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, με σ_1^2, σ_2^2 γνωστά. Να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο υποθέσεων H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ δίνεται από τη σχέση (5.29).
Απόδειξη.
Ο έλεγχος θα γίνει με τη βοήθεια του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Από το θεώρημα 5.3 (σελ. 156), είναι γνωστό ότι η πιθανοφάνεια γίνεται μέγιστη, όταν $\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2$ και ισχύει ότι:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j} - \bar{X}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} . \tag{5.28}$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ η πιθανοφάνεια γίνεται:

$$L(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \mu)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j} - \mu)^2}{2\sigma_2^2}\right\} .$$

με συνέπεια:

$$\ln L(\omega) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_1^2) - \frac{m}{2}\ln(2\pi\sigma_2^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \mu)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j} - \mu)^2}{2\sigma_2^2}$$

και:

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \mu)}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j} - \mu)}{\sigma_2^2} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\frac{n}{\sigma_1^2}\bar{X}_1 + \frac{m}{\sigma_2^2}\bar{X}_2}{\frac{n}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2}} ,$$

ενώ:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma_1^2} - \frac{m}{\sigma_2^2} < 0 .$$

Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου μ είναι $\hat{\mu} = \frac{\frac{n}{\sigma_1^2}\bar{X}_1 + \frac{m}{\sigma_2^2}\bar{X}_2}{\frac{n}{\sigma_1^2} + \frac{m}{\sigma_2^2}}$.

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών γίνεται:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \hat{\mu})^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j} - \hat{\mu})^2}{2\sigma_2^2}\right\}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}} ,$$

ή:

$$\lambda = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\hat{\mu})^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_{2i}-\bar{X}_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\hat{\mu})^2}{2\sigma_2^2}\right\} .$$

Προφανώς:

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\hat{\mu})^2}{2\sigma_1^2} = -\dfrac{n(\hat{\mu}-\bar{X}_1)^2}{2\sigma_1^2} = -\dfrac{n}{2\sigma_1^2}\left(\dfrac{m}{\sigma_2^2}\right)^2 \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\left(\dfrac{n}{\sigma_1^2}+\dfrac{m}{\sigma_2^2}\right)^2} \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\left(x_{2j}-\bar{X}_2\right)^2}{2\sigma_2^2} - \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\left(x_{2j}-\hat{\mu}\right)^2}{2\sigma_2^2} = -\dfrac{m(\hat{\mu}-\bar{X}_2)^2}{2\sigma_2^2} = -\dfrac{m}{2\sigma_2^2}\left(\dfrac{n}{\sigma_1^2}\right)^2 \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\left(\dfrac{n}{\sigma_1^2}+\dfrac{m}{\sigma_2^2}\right)^2} \end{cases} ,$$

Επομένως:

$$\lambda = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma_1^2}\frac{m}{\sigma_2^2}\left(\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}}\right)^2\left(\frac{n}{\sigma_1^2}+\frac{m}{\sigma_2^2}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right\} .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right\} < c \Rightarrow \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2}{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}} > c' .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.13 (σελ. 30), η τ.μ. $\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$ ακολουθεί την κανονική $N(0,1)$ κατανομή. Συνεπώς, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} > \sqrt{c'} ,$$

όπου η σταθερά c' υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E\left(\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{X}}_2)|\mu_1=\mu_2\right) = \mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} > \sqrt{c'}\,\middle|\,\mu_1=\mu_2\right) \Rightarrow 1-\mathrm{P}\left(-\sqrt{c'} \le \frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \le \sqrt{c'}\right) = \mathrm{a} ,$$

ή:

$$\Phi(\sqrt{c'}) - \Phi(-\sqrt{c'}) = 1-\mathrm{a} \Rightarrow 2\Phi(\sqrt{c'}) = 2-\mathrm{a} \Rightarrow \sqrt{c'} = z_{\mathrm{a}/2} .$$

Άρα η ελεγχοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} > z_{\mathrm{a}/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} . \tag{5.29}$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκονται οι ελεγχοσυναρτήσεις των ελέγχων $\mathrm{H}_0: \mu_1 \ge \mu_2$, $\mathrm{H}_1: \mu_1 < \mu_2$ και $\mathrm{H}_0: \mu_1 \le \mu_2$, $\mathrm{H}_1: \mu_1 > \mu_2$. Στον πίνακα 5.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ελέγχων υποθέσεων για τις μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών, όταν οι διασπορές τους είναι γνωστές.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2 : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) < -z_{\mathrm{a}}\right\}$	$T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) = \dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$
$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2 : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) > z_{\mathrm{a}}\right\}$	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$	$R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2 : \left\lvert T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1,\underset{\sim}{\mathrm{x}}_2)\right\rvert > z_{\mathrm{a}/2}\right\}$	

Πίνακας 5.5 *Έλεγχοι υποθέσεων για μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών με διασπορές γνωστές.*

Παράδειγμα 5.3

Για ένα δείγμα 10 κεντρικών δρόμων μιας πόλης υπολογίστηκαν η μέση τιμή και η δειγματική διασπορά των παραβιάσεων των κόκκινων σηματοδοτών που συνέβησαν σε μια ημέρα και βρέθηκαν 381 και 198, αντίστοιχα. Για ένα άλλο δείγμα μεγέθους 8 από μια άλλη πόλη υπολογίστηκε η μέση τιμή και η διασπορά ότι είναι ίσες με 351 και 173, αντίστοιχα. Να γίνει έλεγχος της υπόθεσης ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των παραβιάσεων των κόκκινων σηματοδοτών των δύο πόλεων, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.1, υποθέτοντας ότι τα δύο τυχαία δείγματα προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν κανονική κατανομή με διασπορές άνισες.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων που πρέπει να γίνει είναι:

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \mu_1 \neq \mu_2 \ .$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του παραδείγματος ο έλεγχος υποθέσεων αφορά σε δύο ανεξάρτητα δείγματα, που προέρχονται από κανονική κατανομή, με διασπορές άγνωστες και άνισες. Από τον πίνακα 5.4 (σελ. 160), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $\left|T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2)\right| > t_{v;\frac{a}{2}}$, όπου $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}}$, και $v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}} - 2$. Ισχύει ότι: $n = 10$, $\bar{X}_1 = 381$, $s_1^2 = 198$, $m = 8$, $\bar{X}_2 = 351$ και $s_2^2 = 173$. Επομένως:

$$T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = \frac{381 - 351}{\sqrt{\frac{198}{10} + \frac{173}{8}}} = \frac{30}{6.436} = 4.661 \ ,$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}} - 2 = \frac{\left(\frac{198}{10} + \frac{173}{8}\right)^2}{\frac{\left(\frac{198}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{173}{8}\right)^2}{7}} = \frac{1716.031}{110.369} = 15.549 \ .$$

Συνεπώς, $t_{v;a/2} = t_{16;0.05} = 1.746$ (παράρτημα Β, πίνακας Β2, σελ. 215) και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, γιατί $T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) > t_{v;\frac{a}{2}}$.

Παράδειγμα 5.4

Ένα τουριστικό πρακτορείο πραγματοποίησε μια έρευνα σχετικά με τους τουριστικούς οικισμούς της Ελλάδας. Για ένα δείγμα 12 νησιών προέκυψε ότι η μέση τιμή των τουριστικών οικισμών είναι ίση με 135 και η διασπορά ότι είναι ίση με 82. Για ένα άλλο δείγμα 10 νομών της Βόρειας Ελλάδας υπολογίστηκε η μέση τιμή ότι είναι ίση με 120 και η διασπορά ίση με 76. Το πρακτορείο ισχυρίζεται ότι στα νησιά το μέσο πλήθος οικισμών είναι μεγαλύτερο από το μέσο πλήθος της Βόρειας Ελλάδας. Να ελεγχθεί ο παραπάνω ισχυρισμός σε στάθμη σημαντικότητας 0.025, υποθέτοντας ότι τα δύο τυχαία δείγματα προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν κανονική κατανομή με διασπορές ίσες.

Λύση

Ο έλεγχος υποθέσεων για το συγκεκριμένο παράδειγμα διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2 \ ,$$
$$\mathrm{H}_1: \mu_1 > \mu_2 \ .$$

Από τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτει ότι ο έλεγχος υποθέσεων είναι για δύο ανεξάρτητα δείγματα που προέρχονται από κανονική κατανομή με διασπορές άγνωστες και ίσες. Σύμφωνα με τον πίνακα 5.3 (σελ. 159), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $R = \{\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2 : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) > t_{n+m-2;\mathrm{a}}\}$, όπου $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$ και $s^2 = \frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}$. Ισχύει ότι: $n = 12$, $\bar{X}_1 = 135$, $s_1^2 = 82$, $m = 10$, $\bar{X}_2 = 120$ και $s_2^2 = 76$. Άρα:

$$s^2 = \frac{11 \cdot 135 + 9 \cdot 120}{12 + 10 - 2} = \frac{2565}{20} = 128.250, \qquad s = 11.325 \ ,$$

και:

$$T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = \frac{135 - 120}{11.325 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}} = \frac{15}{4.849} = 3.093 \ .$$

Για $\mathrm{a} = 0.025$, από τον πίνακα Β2 (σελ. 215) του παραρτήματος Β, προκύπτει $t_{n+m-2;\mathrm{a}} = t_{20;0.05} = 2.086$. Επομένως, $T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = 3.093 > t_{n+m-2;\mathrm{a}} = 2.086$ και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, δηλαδή ο ισχυρισμός του τουριστικού πρακτορείου είναι σωστός.

5.4. Έλεγχος Μέσων Τιμών δύο Εξαρτημένων Δειγμάτων

Στις προηγούμενες ενότητες αποδείχτηκαν θεωρήματα για τους ελέγχους υποθέσεων των μέσων τιμών δύο πληθυσμών από τους οποίους επιλέγονται, τυχαία, δύο ανεξάρτητα δείγματα.

Σε αρκετές περιπτώσεις, τα δείγματα δεν είναι ανεξάρτητα. Για παράδειγμα, έστω ότι μετράται η πίεση 50 ατόμων, πριν και μετά την χορήγηση ενός υπερτασικού φαρμάκου, και επιθυμείται να ελεγχθεί αν η χορήγηση του φαρμάκου μείωσε την πίεση ή όχι των ατόμων. Στην περίπτωση αυτή οι παρατηρήσεις είναι εξαρτημένες και ονομάζονται ζευγαρωτές παρατηρήσεις (paired). Στις ζευγαρωτές παρατηρήσεις, κάθε παρατήρηση του ενός δείγματος αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική παρατήρηση του άλλου δείγματος. Σε αντίθεση με τα ανεξάρτητα δείγματα, στα εξαρτημένα δείγματα οι δύο ομάδες που συγκρίνονται είναι συσχετισμένες. Ο ερευνητής πρέπει να δίνει ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός αν τα δείγματα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα, γιατί άλλον έλεγχο θα εφαρμόσει στη μια περίπτωση και άλλο στη δεύτερη. Αν για παράδειγμα ένας καθηγητής θέλει να ελέγξει αν η επίδοση των φοιτητών σε κάποιο συγκεκριμένο μάθημα στην εξεταστική περίοδο του Ιανουαρίου διαφέρει ως προς το φύλο των φοιτητών, τότε τα δείγματα είναι ανεξάρτητα. Αν ένας καθηγητής θέλει να ελέγξει αν η επίδοση των φοιτητών σε κάποιο συγκεκριμένο μάθημα διαφέρει στην εξεταστική περίοδο του Ιανουαρίου από την εξεταστική περίοδο του Σεπτεμβρίου, τότε πρέπει να ελέγξει την επίδοση των φοιτητών που απέτυχαν στην εξεταστική περίοδο του Ιανουαρίου και προσήλθαν ξανά στην εξεταστική περίοδο του Σεπτεμβρίου. Στην περίπτωση αυτή, προφανώς, ο καθηγητής θα λάβει υπόψη του μόνο τους βαθμούς όσων φοιτητών προσήλθαν και στις δύο εξεταστικές περιόδους. Επομένως, τα δείγματα είναι εξαρτημένα.

Θεώρημα 5.6

Έστωσαν X_i και Y_i οι παρατηρήσεις στο i-άτομο, $i = 1,2,\ldots,n$. Οι παρατηρήσεις X_i και Y_i δεν είναι ανεξάρτητες, ενώ τα ζεύγη (X_i, Y_i) και (X_j, Y_j), $i \neq j = 1,2,\ldots,n$ είναι ανεξάρτητα και έστω ότι ακολουθούν διδιάστατη κανονική κατανομή. Έστω, επίσης ότι η μέση τιμή των X_i είναι μ_1 και των Y_i είναι μ_2. Να γίνει ο έλεγχος υποθέσεων H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Απόδειξη.

Από την εκφώνηση του θεωρήματος προκύπτει ότι οι τ.μ. $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονική κατανομή. Η πλήρης απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτός αντικειμένου του παρόντος βιβλίου και για το λόγο αυτό παραλείπεται. Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\mu_1 = \mu_2$ με εναλλακτική H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ βασίζεται στο στατιστικό:

$$T = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}Z}{n}}} \quad ,$$

όπου:

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) \quad , \qquad \mathrm{Var}Z = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$$

και η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι:

$$R = \left\{|T| > t_{n-1;\frac{\mathrm{a}}{2}}\right\} .$$

Στον πίνακα 5.6 δίνονται οι έλεγχοι υποθέσεων για ζευγαρωτές παρατηρήσεις τόσο για την περίπτωση του δίπλευρου ελέγχου όσο και για την περίπτωση των μονόπλευρων υποθέσεων.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$R = \left\{|T| < -t_{n-1;\mathrm{a}}\right\}$	$T = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}Z}{n}}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$R = \left\{|T| > t_{n-1;\mathrm{a}}\right\}$	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$R = \left\{|T| > t_{n-1;\mathrm{a}/2}\right\}$	

Πίνακας 5.6 *Έλεγχοι υποθέσεων για τις μέσες τιμές δύο κανονικών κατανομών με διασπορές γνωστές, όταν τα δείγματα είναι εξαρτημένα.*

Παράδειγμα 5.5

Μία μελέτη διεξήχθη, για να διερευνήσει αν τα ακτινίδια βοηθούν να ελαττωθεί το επίπεδο κακής χοληστερίνης (LDL) σε άτομα με υψηλή χοληστερίνη. Για το λόγο αυτό λήφθηκε τυχαίο δείγμα 20 ατόμων στα οποία εφαρμόστηκε μια δίαιτα για διάστημα τεσσάρων εβδομάδων, η οποία περιελάμβανε στο απογευματινό 100 gr ακτινίδια. Πριν και μετά την εφαρμογή της δίαιτας καταγράφηκαν τα επίπεδα χοληστερίνης για τα 20 άτομα και τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Άτομο	**LDL (mg/dl)**	
	Πριν	**Μετά**
1	**161.6**	**105.8**
2	**185.5**	**120.5**
3	**173.4**	**126.8**
4	**171.7**	**111.4**
5	**189.5**	**135.7**
7	**198.7**	**152.4**
8	**184.9**	**119.8**
9	**190.2**	**123.5**
10	**193.4**	**125.7**
11	**189.6**	**124.4**
12	**188.6**	**121.7**
13	**175.7**	**112.5**
14	**189.6**	**132.5**
15	**182.2**	**117.6**
16	**198.7**	**136.9**
17	**168.6**	**143.4**
18	**185.2**	**130.1**
19	**201.3**	**142.5**
20	**202.4**	**137.6**

Πίνακας 5.7 *Πίνακας δεδομένων παραδείγματος 5.5.*

Να γίνει ο κατάλληλος έλεγχος σε στάθμη σημαντικότητας $\mathbf{a = 0.05}$**.**

Λύση

Προφανώς, τα δεδομένα είναι εξαρτημένα, διότι στα ίδια άτομα πραγματοποιήθηκαν δύο μετρήσεις, μια πριν τη δίαιτα και μια μετά τη δίαιτα με ακτινίδια. Ο έλεγχος υποθέσεων που πρέπει να πραγματοποιηθεί, ώστε να διερευνηθεί αν τα ακτινίδια βοηθούν να ελαττωθεί το επίπεδο κακής χοληστερίνης είναι:

$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2$,

$\mathrm{H}_1: \mu_1 > \mu_2$.

Ο παρακάτω πίνακας βοηθά στον υπολογισμό του στατιστικού T.

	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{Y_i}$	$\boldsymbol{Z_i = X_i - Y_i}$	$\boldsymbol{(Z_i - \bar{Z})^2}$
1	161.6	105.8	55.8	4.84
2	185.5	120.5	65.0	49.00
3	173.4	126.8	46.6	129.96
4	171.7	111.4	60.3	5.29
5	189.5	135.7	53.8	17.64
7	198.7	152.4	46.3	136.89
8	184.9	119.8	65.1	50.41
9	190.2	123.5	66.7	75.69
10	193.4	125.7	67.7	94.09
11	189.6	124.4	65.2	51.84
12	188.6	121.7	66.9	79.21
13	175.7	112.5	63.2	27.04
14	189.6	132.5	57.1	0.81
15	182.2	117.6	64.6	43.56
16	198.7	136.9	61.8	14.44
17	168.6	143.4	25.2	1075.84
18	185.2	130.1	55.1	8.41
19	201.3	142.5	58.8	0.64
20	202.4	137.6	64.8	46.24
		Αθροίσματα	1160.0	1975.84

Πίνακας 5.8 *Πίνακας πράξεων παραδείγματος 5.5.*

Από τον πίνακα 5.8 προκύπτει ότι:

$$\bar{Z} = \frac{1160}{20} = 58 \ , \qquad \mathrm{Var}Z = \frac{1975.84}{19} = 103.992$$

με συνέπεια:

$$T = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}Z}{n}}} = \frac{58}{\sqrt{\frac{103.99}{20}}} = 25.436.$$

Επιπλέον, από τον πίνακα B2 (σελ. 215) του παραρτήματος B, ισχύει ότι $t_{n-1;\mathrm{a}/2} = t_{19;0.05} = 1.729 < T = 25.436$. Άρα η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και το συμπέρασμα το οποίο εξάγεται είναι ότι η κατανάλωση ακτινιδίων βοηθά στην ελάττωση του επιπέδου κακής χοληστερίνης στον ανθρώπινο οργανισμό.

5.5. Έλεγχοι για τη διασπορά κανονικής κατανομής

Θεώρημα 5.7

Δίνεται τ.δ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, με μ: γνωστό. Σε σ.σ. a να αποδειχθεί ότι οι ελεγχοσυναρτήσεις για τις παρακάτω υποθέσεις::

1. $\mathrm{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,\ \mathrm{H}_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$
2. $\mathrm{H}_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2,\ \mathrm{H}_1: \sigma^2 < \sigma_0^2,$
3. $\mathrm{H}_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2,\ \mathrm{H}_1: \sigma^2 > \sigma_0^2,$

δίνονται από τις σχέσεις (5.30), (5.31) και (5.32), αντίστοιχα.

Απόδειξη.

1. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} .$$

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\} ,$$

όπου $\hat{\sigma}^2$ είναι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2. Από το θεώρημα 5.2 (σελ. 152), ισχύει: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$. Επιπλέον:

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\} .$$

Συνεπώς, ο λόγος των πιθανοφανειών γίνεται:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}}{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\}} .$$

Για $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$ προκύπτει ότι:

$$\lambda = \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}}\right\} ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = n^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\} .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$n^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\} < c ,$$

ή:

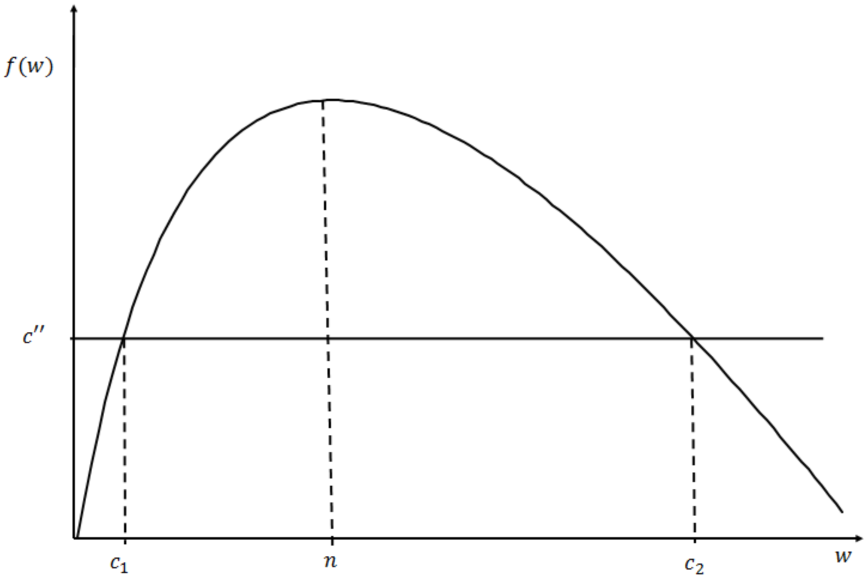
$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\right\} < c' ,$$

ή:

$$\frac{n}{2}\ln\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 < c'' .$$

Η συνάρτηση $f(w) = n\ln w - w,\ w > 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $w = n$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(w) = \frac{n}{w} - 1 = 0 \Rightarrow w = n \ ,$$
$$f''(w) = -\frac{n}{w^2} < 0 \ .$$
Στο σχήμα 5.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(w) = n\ln w - w$. Επίσης, απεικονίζονται οι τιμές c_1 και c_2.



Σχήμα 5.5 *Γραφική παράσταση συνάρτησης f(w) της περίπτωσης 1του θεωρήματος 5.7.*

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 < c_1 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 > c_2 \ ,$$
όπου οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν τις σχέσεις:
$$n\ln c_1 - c_1 = n\ln c_2 - c_2$$
και
$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 < c_1|\sigma_0^2\right) + \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 > c_2|\sigma_0^2\right) = \mathrm{a} \ .$$
Όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, η τ.μ. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$. Άρα, για:
$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 < c_1|\sigma_0^2\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 > c_2|\sigma_0^2\right) = \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$
ισχύει ότι:
$$c_1 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n;1-\mathrm{a}/2} \ , \qquad c_2 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n;\mathrm{a}/2} \ .$$
Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:
$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n;1-\mathrm{a}/2} \text{ ή } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 > \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n;\mathrm{a}/2} \ . \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{5.30}$$

2. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $\mathrm{H}_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $\mathrm{H}_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα 3.1 (σελ. 87). Από το παράδειγμα 1.6 (σελ. 35), προκύπτει ότι η κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}$. Προφανώς, η συνάρτηση $Q(\theta)$ είναι αύξουσα

συνάρτηση του θ. Άρα σύμφωνα με το πόρισμα 3.1, η πιθανοφάνεια $L(\underset{\sim}{x};\sigma^2)$ έχει την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. ως προς τη συνάρτηση $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ και η Ο.Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \leq c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases},$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = E_{\sigma_0^2}\varphi\left(\underset{\sim}{X}\right) = P_{\sigma_0^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \leq c\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \leq c'\right) \Rightarrow c' = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-a}^2 .$$

Επομένως, η Ο.Ι.Ε. είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \leq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-a}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \tag{5.31}$$

3. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, αποδεικνύεται ότι η Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \geq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;a}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \tag{5.32}$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η απορριπτική περιοχή για όλες τις περιπτώσεις των ελέγχων υποθέσεων για τη διασπορά της κανονικής κατανομής, όταν η μέση τιμή είναι γνωστή.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-a}^2\right\}$	$T\left(\underset{\sim}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;a}^2\right\}$	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$R = \left\{\underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;1-a/2}^2 \text{ ή } T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n;a/2}^2\right\}$	

Πίνακας 5.9 *Έλεγχοι υποθέσεων για τη διασπορά της κανονικής κατανομής όταν η μέση τιμή είναι γνωστή.*

Θεώρημα 5.8

Δίνεται τ.δ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, με μ: άγνωστο. Σε σ.σ. a να κατασκευαστούν οι ελεγχοσυναρτήσεις για τις παρακάτω υποθέσεις υποθέσεις:

1. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,
2. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$,
3. $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει μόνο για την πρώτη περίπτωση. Για την απόδειξη των άλλων περιπτώσεων ακολουθείται η ίδια διαδικασία των περιπτώσεων 2 και 3 του θεωρήματος 5.2 (σελ. 152).

Για να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος, αρκεί να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα:

$$L = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

μέσα στο σύνολο $\Omega = \{(\mu, \sigma^2): \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$, που είναι ένας διδιάστατος χώρος και στη συνέχεια μέσα στον $\omega = \{(\mu, \sigma^2): \mu \in \mathbb{R}\}$, που είναι η ευθεία $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.2 (σελ. 152), οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων μ και σ^2 είναι

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}.$$

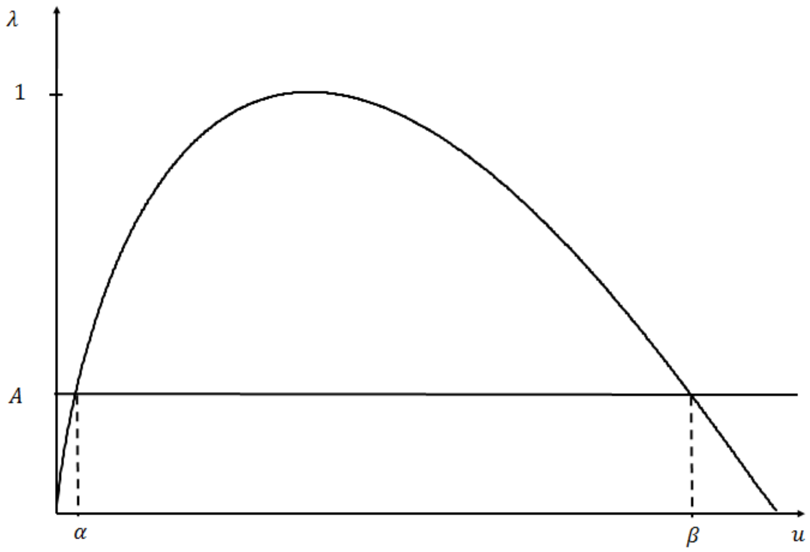
Ο λόγος των δύο μεγίστων βρίσκεται αμέσως ότι είναι:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\} = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{u-n}{2}\right\}, \tag{5.33}$$

όπου:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}.$$

Είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή $U = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$ ακολουθεί την $\boldsymbol{X}_{n-1}^2$-κατανομή.



Σχήμα 5.6 *Γραφική παράσταση συνάρτησης f(u) του θεωρήματος 5.8*

Ο έλεγχος μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ως κριτήριο την ίδια τη μεταβλητή U. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5, η κρίσιμη περιοχή για το λ είναι της μορφής $0 < \lambda < A$ και αντιστοιχεί σ' ένα ζεύγος διαστημάτων $0 < u < \alpha$ και $\beta < u < +\infty$, όπου τα α και β είναι δύο σημεία με ίσες τεταγμένες. Έστω η συνάρτηση:

$$\lambda(u) = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{u-n}{2}\right\}.$$

Η συνάρτηση $\lambda(u)$ έχει μέγιστο για $u = n$. Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $\lambda(u) < A$ ή ισοδύναμα, όταν: $u < \alpha$ ή $u > \beta$, όπου τα σημεία α και β είναι τέτοια ώστε:

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\beta),$$

και:

$$\mathrm{P}(U < a) + \mathrm{P}(U > \beta) = \mathrm{a}.$$

Τα σημεία α και β είναι δύσκολο να υπολογισθούν. Για το λόγο αυτό οι τιμές των α και β λαμβάνονται έτσι, ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}(U < a) = \mathrm{P}(U > \beta) = \frac{\mathrm{a}}{2},$$

δηλαδή $\alpha = \boldsymbol{X}_{n-1;1-\mathrm{a}/2}^2$ και $\beta = \boldsymbol{X}_{n-1;\mathrm{a}/2}^2$. Άρα η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma_0}\right)^2 < \boldsymbol{X}_{n-1;1-\mathrm{a}/2}^2 \text{ ή } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma_0}\right)^2 > \boldsymbol{X}_{n-1;\mathrm{a}/2}^2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \tag{5.34}$$

Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ή $\sigma^2 > \sigma_0^2$ οι αντίστοιχες κρίσιμες περιοχές, με μέγεθος σφάλματος τύπου I ίσο με a, είναι $u < \boldsymbol{X}_{n-1;1-\mathrm{a}}^2$ και $u > \boldsymbol{X}_{n-1;\mathrm{a}}^2$.

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η απορριπτική περιοχή για όλες τις περιπτώσεις των ελέγχων υποθέσεων για τη διασπορά της κανονικής κατανομής, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;1-a} \right\}$	$T\left(\underset{\sim}{x}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;a} \right\}$	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$R = \left\{ \underset{\sim}{x} : T(\underset{\sim}{x}) < \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;1-a/2}$ ή $T(\underset{\sim}{x}) > \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;a/2} \right\}$	

Πίνακας 5.10 *Έλεγχοι υποθέσεων για τη διασπορά της κανονικής κατανομής, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη.*

Η ισχύς του δίπλευρου έλεγχου των υποθέσεων $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη, δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} > \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;a/2} \text{ ή } \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} < \boldsymbol{\chi}^2_{n-1;1-a/2} \middle| \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \right),$$

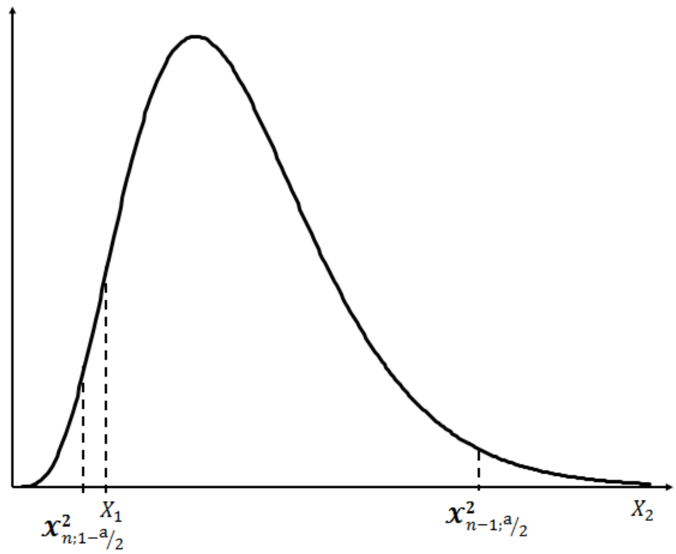
ή:

$$\gamma = 1 - P\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\boldsymbol{\chi}^2_{n-1;1-a/2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\boldsymbol{\chi}^2_{n-1;a/2} \right).$$

Για $X_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\boldsymbol{\chi}^2_{n-1;1-a/2}$ και $X_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\boldsymbol{\chi}^2_{n-1;a/2}$ προκύπτει ότι:

$$\gamma = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} < X_1 \right) + P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} > X_2 \right)$$

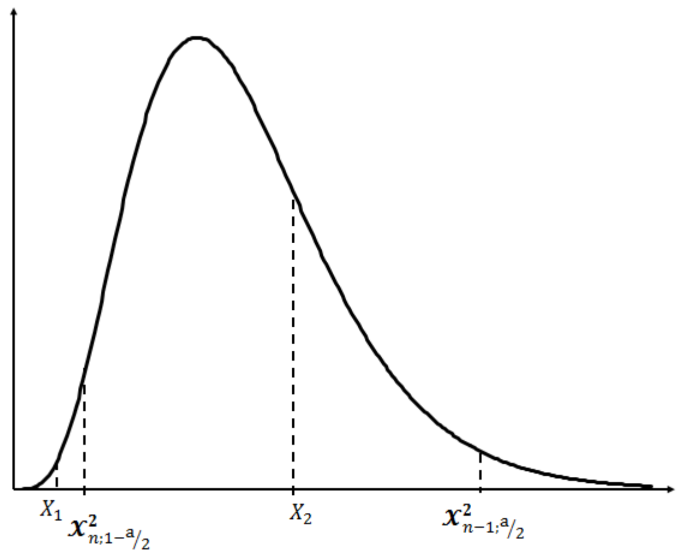
Αν $\sigma_0^2 > \sigma^2$, τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6,



Σχήμα 5.7 *Ισχύς ελέγχου υποθέσεων H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη και $\sigma_0^2 > \sigma^2$.*

ισχύει ότι $\gamma > a$.

Αν $\sigma_0^2 < \sigma^2$, τότε, από το σχήμα 5.7,



Σχήμα 5.8 *Ισχύς ελέγχου υποθέσεων H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, όταν η μέση τιμή είναι άγνωστη και $\sigma_0^2 < \sigma^2$.*

συνεπάγεται επίσης ότι $\gamma > \mathrm{a}$. Επομένως, ο έλεγχος είναι αμερόληπτος.

Παράδειγμα 5.6

Είναι γνωστό ότι διάρκεια ζωής των λαμπτήρων μιας συγκεκριμένης μάρκας ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(800, 18^2)$. Από τον έλεγχο ποιότητας που πραγματοποιήθηκε σε τυχαίο δείγμα 35 λαμπτήρων βρέθηκε ότι η μέση τιμή τους είναι 835 και η τυπική απόκλιση 16.5. Να σημειωθεί ότι στον έλεγχο ποιότητας πρέπει να δίνεται μεγάλη προσοχή τόσο στο γεγονός ότι ο μέσος όρος πρέπει να διατηρείται σταθερός, όσο και στο ότι η διασπορά πρέπει να είναι, όσο το δυνατό, μικρότερη. Να ελεγχθεί, σε στάθμη σημαντικότητας $\mathrm{a} = 0.01$ η υπόθεση ότι η διασπορά της διάρκειας ζωής των λαμπτήρων στο δείγμα είναι μικρότερη απ' ό,τι στον πληθυσμό.

Λύση

Η μηδενική υπόθεση του ελέγχου υποθέσεων είναι $\mathrm{H_0}$: $\sigma^2 = 18^2$ και η εναλλακτική είναι $\mathrm{H_1}$ $\sigma^2 < 18^2$ Τα δεδομένα, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην εκφώνηση του παραδείγματος, ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή γνωστή. Από τον πίνακα 5.9 (σελ. 168), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $R = \left\{\underset{\sim}{\mathrm{x}} : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) < \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n-1;1-\mathrm{a}}\right\}$, όπου $T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$. Προφανώς:

$$T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}\right) = \frac{34 \cdot 16.5^2}{18^2} = 28.569\ .$$

Για $n = 35$ και $\mathrm{a} = 0.01$, από τον πίνακα B3 (σελ. 216) του παραρτήματος B, προκύπτει $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{34;0.99} = 17.7891 < 28.569$. Άρα η μηδενική υπόθεση γίνεται δεκτή και το δείγμα δε δίνει ενδείξεις για μικρότερη διασπορά.

5.6. Σύγκριση διασπορών δύο κανονικών κατανομών

Θεώρημα 5.9

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1' = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})$ τ.δ. από κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $\underset{\sim}{\mathrm{X}}_2' = (X_{21}, X_{22}, \dots, Y_{2m})$ από κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, με μ_1, μ_2 άγνωστα. Να κατασκευαστεί ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο υποθέσεων οι υποθέσεις $\mathrm{H_0}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $\mathrm{H_1}$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Απόδειξη.
Από το θεώρημα 5.3 (σελ. 156), προκύπτει ότι:

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\hat{\mu}_1)^2}{2\hat{\sigma}_1^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\hat{\mu}_2)^2}{2\hat{\sigma}_2^2}\right\} .$$

όπου: $\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2$, $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2$ και $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2$. Επομένως:

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} .$$

Επιπλέον:

$$L(\hat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\hat{\mu}_1)^2}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\hat{\mu}_2)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\} .$$

όπου: $\hat{\mu}_1 = \bar{X}_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}_2$ και $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right]$. Άρα:

$$L(\hat{\omega}) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} .$$

Ο λόγος πιθανοφανειών είναι:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\}}{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_2^2}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\}} = \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{m}{2}} ,$$

ή:

$$\lambda = \left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right]}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}{\frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2\right]}\right)^{\frac{m}{2}} ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \frac{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}+1}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}+1}\right)^{\frac{m}{2}} ,$$

Για $W = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\lambda = \frac{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{W}{W+1}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{W+1}\right)^{\frac{m}{2}} = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \frac{W^{\frac{n}{2}}}{(W+1)^{\frac{n+m}{2}}} .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\frac{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}} \frac{W^{\frac{n}{2}}}{(W+1)^{\frac{n+m}{2}}} < c \Rightarrow \frac{W^{\frac{n}{2}}}{(W+1)^{\frac{n+m}{2}}} < c' \Rightarrow n\ln W - (n+m)\ln(W+1) < c'' .$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(W) = n\ln W - (n+m)\ln(W+1)$, $w > 0$, παρουσιάζει μέγιστο για $W = \frac{n}{m}$ και στρέφει τα κοίλα κάτω, διότι:

$$f'(W) = \frac{n}{W} - \frac{n+m}{W+1} = 0 \Rightarrow W = \frac{n}{m},$$

$$f''(W)\Big|_{W=\frac{n}{m}} = -\frac{n}{W^2} + \frac{n+m}{(W+1)^2} = -\frac{m^2}{n} + \frac{n+m}{\left(\frac{n}{m}+1\right)^2} = -\frac{m^2}{n} + \frac{m^2}{n+m} = -\frac{m^3}{n(n+m)} < 0 .$$

Άρα η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$W < c_1 , \qquad W > c_2 .$$

Οι τιμές των κρίσιμων σημείων c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{X}}_2 | \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{P}(W < c_1 | \mathrm{H}_0) + \mathrm{P}(W > c_2 | \mathrm{H}_0) \ .$$

Για να υπολογισθούν οι παραπάνω πιθανότητες, αρκεί να βρεθεί η κατανομή του στατιστικού W. Από το θεώρημα 1.12 (σελ. 30), είναι γνωστό ότι η τ.μ. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n-1}$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.14 (σελ. 30), κάτω από την υπόθεση H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n-1} \\ \dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{m-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{n-1}}{\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\bar{X}_2)^2}{m-1}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n-1,m-1} \ ,$$

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(W < c_1 | \mathrm{H}_0) + \mathrm{P}(W > c_2 | \mathrm{H}_0) = \mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S_1^2}{(m-1)S_2^2} < c_1\right) + \mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S_1^2}{(m-1)S_2^2} > c_2\right),$$

δηλαδή:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{m-1}{n-1}c_1\right) + \mathrm{P}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > \frac{m-1}{n-1}c_2\right) \ .$$

Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{m-1}{n-1}c_1\right) = \mathrm{P}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > \frac{m-1}{n-1}c_2\right) = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

και προκύπτει ότι:

$$\frac{m-1}{n-1}c_1 = F_{n-1,m-1;1-\mathrm{a}/2} \ , \qquad \frac{m-1}{n-1}c_2 = F_{n-1,m-1;\mathrm{a}/2} \ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n-1,m-1;1-\mathrm{a}/2} \text{ ή } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n-1,m-1;\mathrm{a}/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \ . \tag{5.35}$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται οι ελεγχοσυναρτήσεις για τους ελέγχους των μονόπλευρων υποθέσεων. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απορριπτικές περιοχές όλων των ελέγχων υποθέσεων για τις διασπορές δύο κανονικών κατανομών, όταν οι μέσες τιμές είναι άγνωστες.

H_0	H_1	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) < F_{n-1,m-1;1-\mathrm{a}}\right\}$	$T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) : T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) > F_{n-1,m-1;\mathrm{a}}\right\}$	
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) : T\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2\right) < F_{n-1,m-1;1-\mathrm{a}/2} \text{ ή } T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}_1, \underset{\sim}{\mathrm{x}}_2) > F_{n-1,m-1;\mathrm{a}/2}\right\}$	

Πίνακας 5.11 *Έλεγχοι υποθέσεων για τις διασπορές δύο κανονικών κατανομών, όταν οι μέσες τιμές τους είναι άγνωστες.*

Θεώρημα 5.10

Έστωσαν δύο πληθυσμοί από κανονική κατανομή, ο X_1 από την κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και ο X_2 από την κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, με μ_1 και μ_2 γνωστά. Από τους δύο πληθυσμούς λαμβάνονται δύο δείγματα, μεγέθους n και m, αντίστοιχα. Να κατασκευαστεί ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο υποθέσεων H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Απόδειξη.

Ισχύει ότι:

$$\Omega = \{(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \qquad \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

και:

$$\omega = \{\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2, \qquad \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\} \ .$$

Οι Ε.Μ.Π. των σ_1^2, σ_2^2 και σ^2 είναι, $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2$ και $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2\right]$. Ο λόγος λ είναι:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{m}{2}} = \frac{\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2}{n}\right]^{\frac{n}{2}}\left[\frac{\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2}{m}\right]^{\frac{m}{2}}}{\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2}{n+m}\right]^{\frac{n+m}{2}}} \ . \tag{5.36}$$

Μετά από πράξεις, ο λόγος λ, μπορεί να γραφεί ως:

$$\lambda = \frac{(n+m)^{\frac{n+m}{2}} F^{\frac{n}{2}}}{(n)^{\frac{n}{2}}(m)^{\frac{m}{2}}(1+F)^{\frac{n+m}{2}}} \ , \tag{5.37}$$

όπου η τ.μ. F δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(X_{2j}-\mu_2)^2} \ . \tag{5.38}$$

Σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν στο θεώρημα 5.8 (σελ. 168), η τ.μ. $\frac{m}{n}F$ ακολουθεί την F-κατανομή με n και m βαθμούς ελευθερίας, όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής. Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \frac{m\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2}{n\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2} < F_{n,m;1-a/2} \text{ ή } \frac{m\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2}{n\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2} > F_{n,m;a/2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \ . \tag{5.39}$$

Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ή $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, τότε η κρίσιμη περιοχή είναι ένα μόνο από αυτά τα δύο διαστήματα.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απορριπτικές περιοχές όλων των ελέγχων υποθέσεων για τις διασπορές δύο κανονικών κατανομών, όταν οι μέσες τιμές είναι γνωστές.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	**Απορριπτική περιοχή**	**Στατιστικό**
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) < F_{n,m;1-a}\right\}$	$T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = \frac{m\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\mu_1)^2}{n\sum_{j=1}^{m}(x_{2j}-\mu_2)^2}$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) > F_{n,m;a}\right\}$	
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$R = \left\{\begin{matrix}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) < F_{n,m;1-a/2} \\ \text{ή } T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) > F_{n,m;a/2}\end{matrix}\right\}$	

Πίνακας 5.12 *Έλεγχοι υποθέσεων για τις διασπορές δύο κανονικών κατανομών, όταν οι μέσες τιμές τους είναι γνωστές.*

Παράδειγμα 5.7

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί των μαθητών και των μαθητριών του τμήματος Γ7 του Ε.Π.Λ. Πτολεμαΐδας, που αποφοίτησαν το 1992, στις πανελλήνιες εξετάσεις, στο μάθημα των μαθηματικών Α΄ δέσμης. Να ελεγχθεί, σε στάθμη σημαντικότητας $\mathbf{a = 0.10}$, αν η μέση βαθμολογία των μαθητών διαφέρει σε σχέση με το φύλο, υποθέτοντας ότι τα δεδομένα προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν κανονική κατανομή.

Κορίτσι	**Αγόρι**
112	**145**
121	**132**
135	**125**
143	**128**
157	**118**
148	**154**
136	**139**
119	**142**
	120
	104
	132
	135
	141
	158
	129
	113
	123
	122

Πίνακας 5.13 *Πίνακας δεδομένων παραδείγματος 5.7.*

Λύση

Τα δείγματα είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσες τιμές και διασπορές άγνωστες. Η λύση του παραδείγματος θα βασιστεί σε όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 5.3. Για να πραγματοποιηθεί ο κατάλληλος έλεγχος, για τους μέσους όρους της βαθμολογίας των αγοριών και των κοριτσιών πρέπει πρώτα να ελεγχθεί αν οι διασπορές είναι ίσες ή όχι. Ο έλεγχος υποθέσεων για την ισότητα των διασπορών είναι: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ με εναλλακτική H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Από τον πίνακα 5.11 (σελ. 173), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης δίνεται από τη σχέση:

$$R = \left\{ (\underset{\sim}{\mathrm{x}_1}, \underset{\sim}{\mathrm{x}_2}) : \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n-1,m-1;1-{}^{\mathrm{a}}/_2} \text{ ή } \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n-1,m-1;{}^{\mathrm{a}}/_2} \right\}.$$

Ο παρακάτω πίνακας βοηθά στην εύρεση των μέσων τιμών και των διασπορών των δύο δειγμάτων.

Κορίτσι X_{1i}	X_{1i}^2	**Αγόρι X_{2i}**	X_{2i}^2
112	12544	145	21025
121	14641	132	17424
135	18225	125	15625
143	20449	128	16384
157	24649	118	13924
148	21904	154	23716
136	18496	139	19321
119	14161	142	20164
1071	**145069**	120	14400
		104	10816
		132	17424
		135	18225
		141	19881
		158	24964
		129	16641
		113	12769
		123	15129

		122	14884
		2360	**312716**

Πίνακας 5.14 *Πίνακας πράξεων παραδείγματος 5.7.*

Ο αριθμός των κοριτσιών είναι $n = 8$ και των αγοριών είναι $m = 18$. Από τον πίνακα 5.14 προκύπτει ότι: $\sum_{i=1}^{8} X_{1i} = 1071$, $\sum_{i=1}^{8} X_{1i}^{8} = 145069$ και $\sum_{j=1}^{18} X_{2j} = 2360$, $\sum_{j=1}^{18} X_{2j}^{2} = 312716$,. Επομένως:

$$\bar{X}_1 = \frac{1071}{8} = 133.875 \ , \qquad S_1 = \sqrt{\frac{145069 - 8 \cdot 133.875^2}{7}} = 15.533$$

και:

$$\bar{X}_2 = \frac{2360}{18} = 131.111 \ , \qquad S_2 = \sqrt{\frac{312716 - 18 \cdot 131.111^2}{17}} = 13.919 \ ,$$

με συνέπεια:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{15.533^2}{13.919^2} = 1.245 \ .$$

Για a $= 0.10$ προκύπτει ότι $F_{7,17;0.05} = 2.61$ (παράρτημα Β, πίνακας Β5, σελ. 219). Επομένως, $\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{7,17;0.05}$ και η μηδενική υπόθεση της ισότητας των διασπορών γίνεται δεκτή.

Για τον έλεγχο της υπόθεσης αν υπάρχει διαφορά στον μέσο βαθμό των μαθηματικών ως προς το φύλο, δηλαδή, H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα 5.3 (σελ. 156), γιατί οι διασπορές είναι ίσες, αλλά άγνωστες. Από τον πίνακα 5.3 (σελ. 159), η απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης είναι $R = \left\{(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) : \left|T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)\right| > t_{n+m-2;\frac{a}{2}}\right\}$, όπου $T(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$ και $s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$. Ισχύει ότι:

$$s^2 = \frac{7 \cdot 15.533^2 + 17 \cdot 13.919^2}{8 + 18 - 2} = 207.611, \qquad s = 14.409$$

και:

$$T\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2\right) = \frac{|133.875 - 131.111|}{14.409\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{18}}} = \frac{2.764}{6.123} = 0.451 \ .$$

Επιπλέον, από τον πίνακα Β2 (σελ. 215) του παραρτήματος Β, ισχύει ότι $t_{n+m-2;\frac{a}{2}} = t_{24;0.05} = 1.711 > T = 0.451$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση δε μπορεί να απορριφθεί, με συνέπεια η μέση βαθμολογία στο μάθημα των μαθηματικών να μη διαφέρει σε σχέση με το φύλο.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Berry, D. A. & Lindgren, B. W. (1995). *Statistics: Theory and Methods*. Duxbury Press.

Behrens, W. U. (1929). "Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen. *Landwirtschaftliche Jahrbücher*, 68, 807–37.

Casella , G. & Berger, J. O. (2001). *Statistical Inference, 2nd Edition*. Brooks Cole.

De Groot, M. H. (2001). *Probability and Statistics, 3rd edition*. Addison-Wesley.

Fisher, R. A. (1935)."The fiducial argument in statistical inference". *Annals of Eugenics*, 8, 391–398.

Mendenhall, W., Scheaffer, R. L. & Wackerly, D. D.(2002). *Mathematical Statistics with Applications*, 6th Edition. Duxbury Press.

Rice, J. A. (1994). *Mathematical Statistics and Data Analysis, 2nd edition*. Duxbury Press.

Snedecor, G. W. & Cochran, W. G. (1989). *Statistical Methods, 8th edition*. Iowa State University Press.

Κεφάλαιο 6 Επιλεγμένα Θέματα

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνονται θέματα που σχετίζονται με το αντικείμενο του βιβλίου, όμως ξεφεύγουν από τα πλαίσια ενός μαθήματος που διδάσκεται σε προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών. Σε ορισμένα από τα θέματα που αναφέρονται μπορεί να υπάρχει και άλλος τρόπος απόδειξης, όμως στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται ως εφαρμογές του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Τα θέματα που αναλύονται στο 6ο κεφάλαιο του βιβλίου είναι η σχέση μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης και της περιοχής αποδοχής των δίπλευρων ελέγχων υποθέσεων της μορφής $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$, η σύγκριση των αναλογιών δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων, οι έλεγχοι υποθέσεων που αφορούν στις παραμέτρους του γενικού γραμμικού μοντέλου και ο έλεγχος υποθέσεων για τις μέσες τιμές στην ανάλυση διασποράς με έναν παράγοντα. Η θεωρία συμπληρώνεται με εφαρμογές και παραδείγματα.

Προαπαιτούμενη γνώση
Για την κατανόηση όσων αποδεικνύονται στο 6ο κεφάλαιο είναι απαραίτητη η γνώση κάποιων κεφαλαίων από τα βιβλία «Εφαρμοσμένη Στατιστική» των Ε. Μπόρα-Σέντα και Χ. Μωυσιάδη (σελ. 193) και «Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική» της Φ. Κολυβά-Μαχαίρα (σελ. 193). Επιπλέον, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τα βιβλία: «Introduction to the Theory of Statistics» του F. A. Graybill (σελ. 193), «Mathematical Statistics and Data Analysis, 2nd edition» του J. A. Rice (σελ. 193), Introduction to Probability and Statistical Inference» του G. Roussa (σελ. 193) και «Statistical Methods, 8th edition» του J. C. Watkins (σελ. 193).

6.1. Σχέση μεταξύ Ελέγχων Υποθέσεων και Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

Θεώρημα 6.1
Η περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_0$ έναντι της εναλλακτικής H_0: $\underset{\sim}{\theta} \neq \underset{\sim}{\theta}_0$ σε στάθμη σημαντικότητας a, συμπίπτει με ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$ με συντελεστή εμπιστοσύνης ίσο με $1 - \mathrm{a}$.
Απόδειξη.
Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή $f(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta})$, $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$ και $\underset{\sim}{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ οι παρατηρούμενες τιμές του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$. Έστω, επίσης, το πρόβλημα ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_0$ σε σ.σ. a και $R(\underset{\sim}{\theta})$ η περιοχή αποδοχής της H_0. Για κάθε $\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^n$, ορίζεται στον Ω η περιοχή $C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ ως:

$$C(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \left\{ \underset{\sim}{\theta} \in \Omega : \underset{\sim}{\mathrm{x}} \in R\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \right\} .$$

Επομένως, η $C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ αποτελείται από όλες τις τιμές της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$ για τις οποίες, δεδομένου του $\underset{\sim}{\mathrm{x}}$, η μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται δεκτή. Από όσα έχουν γραφεί για την περιοχή $C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$, γίνεται κατανοητό ότι: $\underset{\sim}{\theta} \in C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ αν και μόνο αν $\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in R(\underset{\sim}{\theta})$. Συνεπώς:

$$\mathrm{P}_{\underset{\sim}{\theta}}\left(\underset{\sim}{\theta} \in C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})\right) = P_{\underset{\sim}{\theta}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}} \in R(\underset{\sim}{\theta})\right) = 1 - \mathrm{a} \ .$$

Άρα η περιοχή $C(\underset{\sim}{\mathrm{x}})$ είναι το διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) (confidence interval) για την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}$ και η τιμή $1 - \mathrm{a}$ είναι ο συντελεστής εμπιστοσύνης (confidence coefficient).

Τα δ.ε για την παράμετρο θ υπολογίζονται με τη βοήθεια αντιστρεπτών συναρτήσεων $g(T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}), \underset{\sim}{\theta})$ ως εξής [Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*, Κεφάλαιο 4ο (σελ. 68)]. Αν η αντιστρεπτή συνάρτηση $g(T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}), \underset{\sim}{\theta})$ είναι μονότονη ως προς $\underset{\sim}{\theta}$, τότε το $100(1 - \mathrm{a})\%$ δ.ε. δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}\left(a \leq g\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}), \underset{\sim}{\theta}\right) \leq \beta\right) = 1 - \mathrm{a} \ .$$

Λύνοντας ως προς $\underset{\sim}{\theta}$ υπολογίζεται το ζητούμενο δ.ε.

Παράδειγμα 6.1

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}'$ τυχαίο δείγμα που ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\theta \in \Omega = \mathbb{R}^{+}$. Να υπολογιστεί το $100(1-\mathrm{a})\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ και να συγκριθεί με την περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\theta \neq \theta_0$.

Λύση

Σύμφωνα με την άσκηση 4.2 (σελ. 121), η μηδενική υπόθεση γίνεται δεκτή στο διάστημα:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \leq 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ .$$

Επίσης, στην ίδια άσκηση αποδείχτηκε ότι η τ.μ. $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n}$, η οποία είναι ανεξάρτητη παραμέτρων, δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $g\left(T(\underset{\sim}{\mathrm{x}}), \theta\right) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι αντιστρεπτή και αύξουσα συνάρτηση ως προς θ. Συνεπώς, το $100(1-\mathrm{a})\%$ δ.ε. δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}\left(a \leq 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \beta\right) = 1 - \mathrm{a} \ .$$

Αν τα άκρα a, β του δ.ε. επιλεγούν έτσι ώστε:

$$\mathrm{P}\left(2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i < a\right) = \mathrm{P}\left(2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i > \beta\right) = \frac{\mathrm{a}}{2} \ ,$$

τότε, ισχύει ότι:

$$a = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;1-\frac{\mathrm{a}}{2}} \ , \qquad \beta = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2n;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ .$$

Από όλα τα παραπάνω είναι φανερό ότι το $100(1-\mathrm{a})\%$ δ.ε. για την παράμετρο θ συμπίπτει με την περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης H_0: $\theta = \theta_0$ σε σ.σ. a.

6.2. Έλεγχοι Υποθέσεων για τις παραμέτρους του Μοντέλου Παλινδρόμησης

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται κάποια θεωρήματα, χωρίς να αναφέρεται η απόδειξη τους, και τα οποία είναι χρήσιμα για την επίλυση των παραδειγμάτων και των ασκήσεων του 6$^{\text{ου}}$ κεφαλαίου.

Θεώρημα 6.2

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = \left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right)$ μια πολυδιάστατη τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ και $\boldsymbol{A}$ ένας συμμετρικός πίνακας μη αρνητικά ορισμένος. Η τετραγωνική μορφή $\boldsymbol{Z} = \underset{\sim}{\mathrm{X}}'\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ ακολουθεί κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_r$, $r \leq p$, όταν, και μόνο όταν, ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ταυτοδύναμος (idepontent), δηλαδή αν ισχύει $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Προφανώς, η τ.μ. $\boldsymbol{Z} = \underset{\sim}{\mathrm{X}}'\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_p$, διότι $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{I}$.

Θεώρημα 6.3

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{X}}' = \left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right)$ μια πολυδιάστατη τ.μ., που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ δύο συμμετρικοί πίνακες μη αρνητικά ορισμένοι. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι οι τ.μ. $\boldsymbol{Z} = \underset{\sim}{\mathrm{X}}'\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\boldsymbol{W} = \underset{\sim}{\mathrm{X}}'\boldsymbol{B}\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ ανεξάρτητες, είναι $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$.

Θεώρημα 6.4 [Cochran (σελ. 193)]

Έστω $\underset{\sim}{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια πολυδιάστατη τ.μ., που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$. Η τ.μ. $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$. Ας υποτεθεί, επίσης, ότι $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X} = \sum_{j=1}^{n} Q_j$, $Q_j = \underset{\sim}{X}'\boldsymbol{A}_j\underset{\sim}{X}$, όπου $\boldsymbol{A}_j$ είναι συμμετρικοί, μη αρνητικά ορισμένοι πίνακες τάξης r_j, $j = 1,2,\dots,k$. Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. $n = \sum_{j=1}^{k} r_j$.
2. Η τετραγωνική μορφή Q_j ακολουθεί την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{r_j}^2$, $j = 1,2,\dots,k$
3. Οι τ.μ. Q_j, $j = 1,2,\dots,k$ είναι ανεξάρτητες.

Ας υποτεθεί ότι το αποτέλεσμα y ενός πειράματος εξαρτάται από πολλές ελεγχόμενες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$. Η απλούστερη σχέση που συνδέει την εξαρτημένη μεταβλητή Y με τις ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι η γραμμική ως προς τις παραμέτρους, δηλαδή:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + e \ .$$

Τα μοντέλα αυτής της μορφής ονομάζονται **γενικά γραμμικά μοντέλα** (general linear models).

Για ένα δείγμα μεγέθους n το μοντέλο γράφεται ως:

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_k x_{1k} + e_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_k x_{2k} + e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_k x_{nk} + e_n \end{cases} ,$$

όπου τα σφάλματα e_i, $i = 1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Χρησιμοποιώντας πίνακες το μοντέλο παίρνει τη μορφή:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e} \ ,$$

όπου:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} .$$

Ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} ,$$

δηλαδή:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \begin{bmatrix} n & n\bar{X}_1 & n\bar{X}_2 & \cdots & n\bar{X}_k \\ n\bar{X}_1 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} \\ n\bar{X}_2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\bar{X}_k & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} .$$

Επιπλέον,

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\bar{Y} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα 6.2

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}' = (\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \dots, \boldsymbol{Y_n})$ τυχαίο δείγμα τέτοιο ώστε:

$$\boldsymbol{Y_i} = \sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{\beta_j X_{ij}} + \boldsymbol{e_i} \ , \qquad \boldsymbol{e_i} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma^2}), \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n} \ .$$

Να βρεθεί η ελεγχοσυνάρτηση των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\beta_0} = \boldsymbol{\beta_1} = \cdots = \boldsymbol{\beta_k} = \boldsymbol{0}$, H_1: $\boldsymbol{\beta_j} \neq \boldsymbol{0}$ για κάποιο $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{k}$.

Λύση

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως οι τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ακολουθούν την κανονική κατανομή $N\left(\sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{ij}, \sigma^2\right)$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=0}^{k}\beta_j x_{ij}\right)^2\right\} ,$$

δηλαδή:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})\right\} .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) .$$

Έστω $f(\underset{\sim}{\mathrm{x}}) = (\underset{\sim}{\alpha} - \boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{x}})'(\underset{\sim}{\alpha} - \boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{x}})$. Τότε, σύμφωνα με τους Mood et. al. (σελ. 193):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\underset{\sim}{\mathrm{x}})}{\partial \underset{\sim}{\mathrm{x}}} = 2(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \boldsymbol{A}'\underset{\sim}{\alpha}) \\ \dfrac{\partial^2 f(\underset{\sim}{\mathrm{x}})}{\partial \underset{\sim}{\mathrm{x}}^2} = 2\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} \end{cases} .$$

Επομένως:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2\right)}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} .$$

Επίσης:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}; \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2\right)}{\partial \underset{\sim}{\beta}^2} = -\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) < 0 \ ,.$$

διότι ο πίνακας $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ είναι μη αρνητικά ορισμένος.

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι οι Ε.Μ.Π. των συντελεστών παλινδρόμησης είναι:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} .$$

Επιπλέον:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right)}{\partial\, \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}) = 0\ .$$

δηλαδή:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\right)'\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\right) = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}\ ,$$

διότι ο πίνακας $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ είναι ταυτοδύναμος, επειδή:

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)^{\boldsymbol{2}}\ .$$

Επίσης:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right)}{\partial\, (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{2}{2(\sigma^2)^3}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}) = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} < 0\ .$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2 είναι:

$$\hat{\sigma}^2_{\Omega} = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}\ .$$

Άρα:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(2\pi\hat{\sigma}^2_{\Omega}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}\ .$$

Αν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0: $\underset{\sim}{\beta} = 0$, η πιθανοφάνεια γράφεται ως:

$$L\left(\underset{\sim}{y};\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}\right\}\ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{y};\sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}\ .$$

Άρα:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\sigma^2\right)}{\partial\, \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}\ .$$

Επίσης:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\sigma^2\right)}{\partial\, (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{2}{2(\sigma^2)^3}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} < 0\ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2 στον ω, είναι:

$$\hat{\sigma}^2_{\omega} = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}\ .$$

Συνεπώς:

$$L(\widehat{\omega}) = (2\pi\hat{\sigma}^2_{\omega})^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}\ .$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών γράφεται:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{L\left(\underset{\sim}{y};\hat{\sigma}^2_{\omega}\right)}{L\left(\underset{\sim}{y};\underset{\sim}{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2_{\Omega}\right)} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_{\Omega}}{\hat{\sigma}^2_{\omega}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Ισχύει ότι:

$$\lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}} = \frac{\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{1+\dfrac{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}}}\ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $\lambda < c$, ή ισοδύναμα όταν $\lambda^{\frac{2}{n}} < c^{\frac{2}{n}}$, ή ισοδύναμα όταν:

$$\frac{\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}} > c'\ .$$

Οι πίνακες $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ και $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ είναι ταυτοδύναμοι και ισχύει ότι:

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{0}\ .$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση ισχύει ότι $Y_j \sim N(0,\sigma^2)$. Άρα σύμφωνα με τα θεωρήματα 6.2 (σελ. 179) και 6.3 (σελ. 179), οι τ.μ. $Z=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}$ και $W=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν τις κατανομές $\boldsymbol{\mathcal{X}}_r^2$ και $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-r}^2$, αντίστοιχα, όπου r είναι η τάξη του πίνακα $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$. Ο πίνακας $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ είναι ταυτοδύναμος, με συνέπεια η τάξη του να ισούται με το ίχνος του. Ισχύει ότι:

$$r=\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)=\mathrm{Tr}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{I}_{k+1})=k+1\ .$$

Συνεπώς, για τις τ.μ. Z και W ισχύει ότι:

$$Z\sim\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1}^2\ ,\qquad W\sim\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-(k+1)}^2\ .$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση:

$$F=\frac{n-(k+1)}{k+1}\frac{Z}{W}\sim F_{k+1,n-(k+1)}\ .$$

Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν:

$$\frac{Z}{W}>c' \Leftrightarrow \frac{n-(k+1)}{k+1}\frac{Z}{W}>c''\ ,$$

όπου η σταθερά c'' υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}\left(\frac{n-(k+1)}{k+1}\frac{Z}{W}>c''\middle|\underset{\sim}{\beta}=0\right)=\mathrm{a}\Rightarrow c''=F_{k+1,n-(k+1);\mathrm{a}}\ .$$

Τελικά, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } \dfrac{n-(k+1)}{k+1}\dfrac{\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{Y}}>F_{k+1,n-(k+1);\mathrm{a}}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\ .$$

Παράδειγμα 6.3

Έστω $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}'=(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\dots,\boldsymbol{Y}_n)$ τυχαίο δείγμα τέτοιο ώστε:

$$\boldsymbol{Y}_i=\sum_{j=0}^{k}\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{X}_{ij}+\boldsymbol{e}_i\ ,\qquad \boldsymbol{e}_i\sim\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\sigma}^2),\qquad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\dots,\boldsymbol{n}\ .$$

Να βρεθεί η ελεγχοσυνάρτηση των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\beta}_1=\cdots=\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{0}$, H_1: $\boldsymbol{\beta}_j\neq\boldsymbol{0}$ για κάποιο $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\dots,\boldsymbol{k}$.

Λύση

Ακολουθώντας την απόδειξη του παραδείγματος 6.2 (σελ. 181), ισχύει ότι:

$$L(\widehat{\Omega})=\left(2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}\ ,\qquad \hat{\sigma}_\Omega^2=\frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}\ .$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_k=0$, η πιθανοφάνεια γράφεται ως:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\beta_0,\sigma^2\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}-\beta_0\boldsymbol{1})'(\boldsymbol{Y}-\beta_0\boldsymbol{1})\right\}\ ,$$

όπου $\boldsymbol{1}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία ίσα με ένα. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\beta_0,\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2\ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς β_0, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\beta_0,\sigma^2\right)}{\partial\,\beta_0}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)=0\Rightarrow\beta_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=\bar{Y}\ .$$

Επίσης:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\beta_0,\sigma^2\right)}{\partial\,(\beta_0)^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0\ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου β_0 είναι:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}\ .$$

Επιπλέον:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\beta_0,\sigma^2\right)}{\partial\,\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2}{n}$$

και:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\beta_0,\sigma^2\right)}{\partial\,(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2 < 0 \ \text{ για }\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2}{n}\ .$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου σ^2 είναι:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2}{n} = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{Y'11'Y}$$

και ισχύει ότι:

$$L(\hat{\omega}) = (2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

Αν $\boldsymbol{J}$ είναι ένας πίνακας κατάλληλης διάστασης με όλα τα στοιχεία του ίσα με ένα, τότε οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων β_0 και σ^2 σε μορφή πινάκων, γράφονται ως:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'1} \\ \hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'Y} - \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'1}\frac{1}{n}\boldsymbol{1'Y} = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y} \end{cases}.$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\ .$$

Άρα:

$$\lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{\boldsymbol{Y'}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\big)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}} = \frac{\boldsymbol{Y'}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\big)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}}\ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'})\boldsymbol{Y}}}$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$\lambda < c \Leftrightarrow \lambda^{\frac{2}{n}} < c^{\frac{2}{n}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'})\boldsymbol{Y}} > c'\ ,$$

όπου η σταθερά c' υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}\left(\frac{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'})\boldsymbol{Y}} > c' \middle| \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{P}(F > c' | \mathrm{H}_0)\ .$$

Στο παράδειγμα 6.2 (σελ. 181), αναφέρθηκε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}$ είναι ταυτοδύναμος τάξης $n-(k+1)$. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο πίνακας $\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}$ είναι ταυτοδύναμος με τάξη $n-1$, διότι $\boldsymbol{J'J} = n\boldsymbol{J}$ και $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{J}) = n = \mathrm{rank}(\boldsymbol{J})$.

Επιπλέον, κάτω από τη μηδενική υπόθεση οι τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(\beta_0, \sigma^2)$ με συνέπεια οι τ.μ. $Z_i = \frac{Y_i - \beta_0}{\sigma}$, $i = 1,2,\dots,n$ να ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,1)$ και η τ.μ. $\boldsymbol{Z'Z}$ να ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_n^2$. Η τετραγωνική μορφή $\boldsymbol{Z'Z}$ αναλύεται σε άθροισμα τριών τετραγωνικών μορφών ως εξής:

$$\boldsymbol{Z'Z} = \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_3 \ , \qquad \boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{Z'A}_i\boldsymbol{Z} \ , \qquad i = 1,2,3 \ ,$$

όπου:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1}{n}\boldsymbol{J} \ , \qquad \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J} \ , \quad \boldsymbol{A}_3 = \mathbf{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} \ .$$

Οι πίνακες $\boldsymbol{A}_i, i = 1,2,3$ είναι συμμετρικοί και μη αρνητικά ορισμένοι, τάξης $r_1 = 1$, $r_2 = k$, $r_3 = n - (k + 1)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι $n = r_1 + r_2 + r_3$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Cochran (θεώρημα 6.4, σελ. 180), οι τ.μ. $\boldsymbol{Q}_i$, $i = 1,2,3$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομές $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{r_i}^2$, $i = 1,2,3$. Από το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), συμπεραίνεται ότι:

$$\frac{\boldsymbol{Q}_2/r_2}{\boldsymbol{Q}_3/r_3} \sim F_{r_2,r_3} \ .$$

Μετά από κάποια στοιχειώδη, αλλά επίπονη άλγεβρα πράξεων πινάκων και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'1} = \boldsymbol{1}$ και $\boldsymbol{1'X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{1'}$ [Μπόρα-Σέντα, Ε. και Μωυσιάδης, Χ. (1990) «*Εφαρμοσμένη Στατιστική*» (σελ. 20), σελ. 193], αποδεικνύεται ότι οι τ.μ. $R = \boldsymbol{Z'A}_2\boldsymbol{Z}$ και $V = \boldsymbol{Z'A}_3\boldsymbol{Z}$ που δίνονται από τις σχέσεις:

$$R = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y} \ , \qquad V = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y'}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\big)\boldsymbol{Y}$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομές:

$$R \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_k^2 \ , \qquad V \sim \boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-(k+1)}^2 \ .$$

Από το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), προκύπτει ότι:

$$\frac{n-(k+1)}{k}\frac{R}{V} \sim F_{k,n-(k+1)} \ .$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της σταθεράς c' ισχύει ότι:

$$\mathrm{P}\left(\frac{n-(k+1)}{k}\frac{R}{V} > c' \middle| \mathrm{H}_0\right) = \mathrm{a} \Rightarrow c' = F_{k,n-(k+1);\mathrm{a}}$$

και η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{n-(k+1)}{k}\dfrac{\boldsymbol{Y'}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y'}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'})\boldsymbol{Y}} > F_{k,n-(k+1);\mathrm{a}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \ .$$

Έστω το μοντέλο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης:

$$y_i = a + \beta x + e_i \ , \qquad i = 1,2,\dots,n \ ,$$

όπου τα σφάλματα e_i να είναι ανεξάρτητα και να ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,\sigma^2)$. Έστω:

$$\mathrm{SS}_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2, \qquad \mathrm{SS}_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2, \qquad \mathrm{SS}_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) \ .$$

Αν SST είναι η συνολική μεταβλητότητα του μοντέλου, SSR η μεταβλητότητα που οφείλεται στην παλινδρόμηση και SSE η μεταβλητότητα που οφείλεται στα σφάλματα, τότε ισχύει:

$$\mathrm{SST} = \mathrm{SS}_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2 = \mathrm{SSR} + SSE \ ,$$

$$\mathrm{SSR} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{Y})^2 = \frac{\mathrm{SS}_{xy}^2}{\mathrm{SS}_x}, \qquad \mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \mathrm{SS}_y - \frac{\mathrm{SS}_{xy}^2}{\mathrm{SS}_x} \ .$$

Τότε:

1. ο αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου σ^2 είναι ο $\frac{\mathrm{SSE}}{n-2}$,
2. η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση $\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^2}$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-2}^2$ κατανομή,
3. η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση $\frac{(\mathrm{SS}_{xy})^2/\mathrm{SS}_x}{\sigma^2}$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^2$ κατανομή,
4. οι τ.μ. SSE και SS_{xy} είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 6.4

Έστω $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}' = (\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_2}, \dots, \boldsymbol{Y_n})$ τυχαίο δείγμα τέτοιο ώστε:

$$\boldsymbol{Y_i = \alpha + \beta x + e_i} \ , \qquad \boldsymbol{e_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)}, \qquad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n} \ .$$

Να βρεθεί η ελεγχοσυνάρτηση των υποθέσεων:

$$\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\beta = 0} \ ,$$
$$\mathbf{H_1}: \boldsymbol{\beta \neq 0} \ .$$

Λύση

Η σ.π.π. δίνεται από τη σχέση:

$$f\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2\right\} \ ,$$

με συνέπεια η πιθανοφάνεια να δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2\right\} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} \ .$$

Για τον υπολογισμό των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων α, β και σ^2 θα υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι 1[ης] τάξης, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \alpha} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)}{\sigma^2} \\ \frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i}{\sigma^2} \\ \frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^4} \end{aligned} \ .$$

Από το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y}; \alpha, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i = 0 \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n\alpha + n\beta\bar{X} = n\bar{Y} \\ n\alpha\bar{X} + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \end{cases} ,$$

προκύπτει, στην 1[η] εξίσωση ότι:

$$\alpha = \bar{Y} - \beta\bar{X} \ .$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του α στην 2[η] εξίσωση του παραπάνω συστήματος παίρνει τη μορφή:

$$n\bar{X}(\bar{Y} - \beta\bar{X}) + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow n\bar{X}\bar{Y} - n\beta\bar{X}^2 + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{X}^2,\ \ \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{X}\bar{Y}\ ,$$

συνεπάγεται ότι:

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}\ .$$

Επιπλέον, αν υποτεθεί ότι:

$$\hat{y}_i=\alpha+\beta x_i\ ,$$

τότε από την 3η εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι:

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n}\ .$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\alpha^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}<0$$

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\beta^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}<0$$

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial(\sigma^2)^2}=\frac{n}{2\sigma^4}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sigma^6}=-\frac{n}{2\sigma^4}<0,\ \ \text{για}\ \ \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n}$$

και:

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\beta\,\partial\alpha}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\alpha\,\partial\sigma^2}=\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\beta\,\partial\sigma^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)}{2\sigma^4}=0\ .$$

$$\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2\,\partial\alpha}=\frac{\partial^2\ln L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2\,\partial\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)}{2\sigma^4}=0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο πίνακας των 2ων παραγώγων στα σημεία που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι (εσσιανή) είναι αρνητικά ορισμένος. Επομένως, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων α, β και σ^2 είναι:

$$\hat{\alpha}_\Omega=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}$$

$$\hat{\beta}_\Omega=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})(x_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}\ .$$

$$\hat{\sigma}_\Omega^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n}$$

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega})=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\alpha}_\Omega-\hat{\beta}_\Omega x_i)^2}{2\hat{\sigma}_\Omega^2}\right\}=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}=\left(2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}\ ,$$

διότι $\hat{\sigma}_\Omega^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n}$.

Για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\beta=0$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\beta\neq 0$, προφανώς, ισχύει ότι:

$$L(\widehat{\omega})=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\alpha}_\omega)^2}{2\hat{\sigma}_\omega^2}\right\}\ .$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων α_ω και σ_ω^2 είναι:

$$\hat{\alpha}_\omega=\bar{Y}$$

$$\hat{\sigma}_\omega^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2}{n}\ .$$

Συνεπώς:

$$L(\hat{\omega})=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{2\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{n}}\right\}=(2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

και ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών γράφεται ως:

$$\lambda=\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}=\frac{(2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}=\left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}} .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda<c$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}<c\Rightarrow\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}<c'\Rightarrow\frac{\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{n}}<c'\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)^2}>c''\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)^2}-1>c''-1 .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση ότι $\hat{y}_i=\hat{\alpha}_\Omega+\hat{\beta}x_i$, με $\hat{\alpha}_\Omega=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}$ προκύπτει ότι:

$$W=\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n\left(y_i-\hat{\alpha}_\Omega-\hat{\beta}x_i\right)^2}-1=\frac{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{Y})^2-\sum_{i=1}^n\left[(y_i-\bar{Y})-\hat{\beta}(x_i-\bar{X})\right]^2}{\sum_{i=1}^n\left(y_i-\hat{\alpha}_\Omega-\hat{\beta}x_i\right)^2} ,$$

δηλαδή:

$$W=\frac{2\hat{\beta}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})-\hat{\beta}^2\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n\left(y_i-\hat{\alpha}_\Omega-\hat{\beta}x_i\right)^2} .$$

Αντικαθιστώντας, την τιμή του $\hat{\beta}$ στην παραπάνω σχέση, συνεπάγεται ότι

$$(n-2)W=(n-2)\frac{\frac{\left[\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})\right]^2}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{X})^2}}{\hat{\sigma}_\Omega^2}=(n-2)\frac{\hat{\beta}^2\mathrm{SS}_x}{\hat{\sigma}_\Omega^2} .$$

Συνεπώς, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$(n-2)\frac{\hat{\beta}^2\mathrm{SS}_x}{\hat{\sigma}_\Omega^2}>c'' .$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, πριν την εκφώνηση του παραδείγματος 6.4 (σελ. 186), ισχύει ότι:

$$\frac{(\mathrm{SS}_{xy})^2/\mathrm{SS}_x}{\sigma^2}=\frac{\hat{\beta}^2\mathrm{SS}_x}{\sigma^2}\sim\ \boldsymbol{\chi}_1^2,\qquad\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\sigma^2}=\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^2}\ \sim\ \boldsymbol{\chi}_{n-2}^2 .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση:

$$F=\frac{\frac{\hat{\beta}^2\mathrm{SS}_x}{\sigma^2}/1}{\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^2}/(n-2)}=\frac{\hat{\beta}^2}{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}\ \sim\ F_{1,n-2} .$$

Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η διασπορά του Ε.Μ.Π. της παραμέτρου β δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{\mathrm{SS}_x} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα προηγούμενα προκύπτει τελικά, ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν:

$$F=\frac{\hat{\beta}^2}{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}>c^* ,$$

με τη σταθερά c^* να υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{a}=E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}}\right)=\mathrm{P}_{\mathrm{H}_0}(F>c^*)\Rightarrow c^*=F_{1,n-2;\mathrm{a}} .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{y}})=\begin{cases}1, & \text{αν } F=\dfrac{\hat{\beta}^2}{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}>F_{1,n-2;\mathrm{a}}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} .$$

Συνήθως χρησιμοποιείται το στατιστικό $\frac{|\hat{\beta}|}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}}$, το οποίο ακολουθεί την t_{n-2} κατανομή. Στην περίπτωση αυτή η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{|\hat{\beta}|}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}} > t_{n-2;\frac{a}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

6.3. Έλεγχοι Υποθέσεων για τις παραμέτρους του Μοντέλου της Ανάλυσης Διασποράς με έναν Παράγοντα

Έστω το μοντέλο:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \ ,$$

όπου μ είναι ο γενικός μέσος, α_i είναι η κύρια επίδραση (main effect) του παράγοντα στο i επίπεδο, $1 \leq i \leq k$, και e_{ij} είναι το σφάλμα της j παρατήρησης στο i επίπεδο, $1 \leq j \leq n_i$, n_i είναι το πλήθος των παρατηρήσεων στο i επίπεδο με $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, με τα σφάλματα e_{ij} να είναι ανεξάρτητα και να ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Το παραπάνω μοντέλο με τη μορφή πινάκων γράφεται ως: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e}$, όπου $\boldsymbol{e} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$ και:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ \vdots \\ y_{k_1} \\ \vdots \\ y_{kn_k} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{n_1} & \boldsymbol{1}_{n_1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1}_{n_2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_{n_2} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{1}_{n_k} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_{n_k} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{1n_1} \\ \vdots \\ e_{k_1} \\ \vdots \\ e_{kn_k} \end{bmatrix},$$

όπου $\boldsymbol{0}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν. Για να ελεγχθεί αν οι παράγοντες α_i, $1 \leq i \leq k$ επιδρούν στο αποτέλεσμα y ή ισοδύναμα ότι είναι σημαντικοί για το μοντέλο, αρκεί να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_k = 0$, η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται, όπως στο παράδειγμα 6.3 (σελ. 183) για τον ειδικό πίνακα $\boldsymbol{X}$, που αναφέρεται παραπάνω.

Η ανάλυση διασποράς είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον έλεγχο των επιδράσεων των παραγόντων και, επειδή η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται όπως στο παράδειγμα 6.5, είναι δυσνόητη για τους μη εξοικειωμένους με τη θεωρία πινάκων, το πρόβλημα λύνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί. Για την κατανόηση όσων θα αναφερθούν στο παράδειγμα 6.5 και τη σύνδεση με το παράδειγμα 6.3 (σελ. 183) είναι απαραίτητοι οι παρακάτω συμβολισμοί.

Έστω:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \ ,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n} \ .$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\mathrm{Var}Y = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2}{n-1} \ .$$

Έστω $\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$. Ισχύει ότι:

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad ,$$

δηλαδή:

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \ ,$$

ή:

$$\text{SST}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2 \ .$$

Θέτοντας $\text{SSW}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2$ και $\text{SSB}=\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2$ προκύπτει ότι SST = SSW + SSB, όπου SST είναι η συνολική μεταβολή, SSB είναι η μεταβολή των μέσων τιμών των ομάδων (groups) από τη συνολική μέση τιμή (between groups variation), δηλαδή μεταξύ των ομάδων και SSW είναι η μεταβολή των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή των ομάδων στα οποία αντιστοιχούν (within groups variation), δηλαδή μέσα στις ομάδες. Αν τα παραπάνω αθροίσματα τετραγώνων διαιρεθούν με τους βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι αντιστοιχούν σ' αυτά, δηλαδή το SSB με $k-1$ και το SSW με το $n-k$ προκύπτουν οι ποσότητες:

$$\text{MSB}=\frac{\text{SSB}}{k-1}\ , \qquad \text{MSW}=\frac{\text{SSW}}{n-k}\ ,$$

όπου MSB είναι το μέτρο μεταβλητότητας των μέσων τιμών των ομάδων και υποδεικνύει το μέγεθος της συνολικής μεταβλητότητας, που οφείλεται στις διαφορές των μέσων τιμών των ομάδων. Επίσης, MSW είναι το μέτρο μεταβλητότητας μέσα σε κάθε ομάδα γύρω από τη μέση τιμή του και υποδεικνύει το μέγεθος της συνολικής μεταβλητότητας, που οφείλεται στο τυχαίο σφάλμα. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\text{SST}=\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}\ ,$$
$$\text{SSW}=\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right)\boldsymbol{Y}\ ,$$
$$\text{SSB}=\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'-\frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}\ .$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 6.3 (σελ. 183), ισχύει ότι:

1. η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση $\frac{\text{SSW}}{\sigma^2}$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{n-k}^2$ κατανομή,
2. η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση $\frac{\text{SSB}}{\sigma^2}$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1}^2$ κατανομή,
3. οι τ.μ. SSB και SSW είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 6.5

Ας υποτεθεί ότι σε μια μελέτη υπάρχει μια εξαρτημένη μεταβλητή $\boldsymbol{Y}$ με $\boldsymbol{n}$ παρατηρήσεις η οποία επηρεάζεται από έναν παράγοντα. Οι τιμές του παράγοντα ονομάζονται επίπεδα (levels) και έστω ότι είναι $\boldsymbol{k}$ το πλήθος. Το μοντέλο στη συγκεκριμένη περίπτωση, που ονομάζεται ανάλυση διασποράς με έναν παράγοντα, δίνεται από τη σχέση: $\boldsymbol{y_{ij}=\mu+\alpha_i+e_{ij}}$, όπου $\boldsymbol{\mu}$ είναι ο γενικός μέσος, $\boldsymbol{\alpha_i}$ είναι η κύρια επίδραση (main effect) του παράγοντα στο $\boldsymbol{i}$ επίπεδο, $\boldsymbol{1\le i\le k}$, $\boldsymbol{e_{ij}}$ είναι το σφάλμα της $\boldsymbol{j}$ παρατήρησης στο $\boldsymbol{i}$ επίπεδο, $\boldsymbol{1\le j\le n_i}$, $\boldsymbol{n_i}$ είναι το πλήθος των παρατηρήσεων στο $\boldsymbol{i}$ επίπεδο με $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{k}n_i=n}$. Να σημειωθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\boldsymbol{Y_{ij}}$ είναι ανεξάρτητες, ακολουθούν την κανονική κατανομή και $\boldsymbol{E(Y_{ij})=\mu_i}$. Να ελεγχθούν οι υποθέσεις $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{a_i=0}$, $\boldsymbol{1\le i\le k}$ ή ισοδύναμα $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k=\mu+\alpha_i}$, $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\mu_i\neq\mu_j}$ για ένα τουλάχιστον ζεύγος των $\boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{1\le i,j\le k}$.

Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος άσκησης είναι χρήσιμο να αναφερθούν οι παρακάτω συμβολισμοί. Έστω $\bar{y}_i$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων του επιπέδου i, $1\le i\le k$ και $\bar{y}$ ο γενικός μέσος όλων των παρατηρήσεων, δηλαδή:

Για τον $\Omega=\{(\mu_i,\sigma^2),\ -\infty<\mu_i<+\infty,\ \sigma^2>0, 1\le i\le k\}$ η πιθανοφάνεια να δίνεται από τη σχέση:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}};\mu_i,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_{ij}-\mu_i\right)^2\right\}=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu_i\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Για να είναι εφικτός ο έλεγχος των υποθέσεων, πρέπει πρώτα να υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. των παραμέτρων μ_i και σ^2. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu_i\right)^2}{2\sigma^2}.$$

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς μ_i είναι:

$$\frac{\partial \ln L(\mu_i,\sigma^2)}{\partial \mu_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu_i)}{\sigma^2} \ .$$

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς σ^2 είναι:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu_i\right)^2}{2\sigma^4} \ .$$

Επιλύοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial \mu_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu_i) = 0 \\ n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu_i)^2 \end{cases} ,$$

δηλαδή:

$$\mu_i = \bar{y}_i \ ,$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n} \ .$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial (\mu_i)^2} = -\frac{n_i}{2\sigma^2} < 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu_i\right)^2}{\sigma^6} = -\frac{n}{2\sigma^4} < 0, \ \text{για} \ \ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2}{n} \ ,$$

και:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial \mu_i\,\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu_i,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2\,\partial \mu_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu_i\right)}{\sigma^4} = 0 \ .$$

Από τα παραπάνω, εύκολα, αποδεικνύεται ότι ο πίνακας των 2[ων] παραγώγων στα σημεία που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι (εσσιανή) είναι αρνητικά ορισμένος. Επομένως, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων μ_i και σ^2 είναι:

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i \ ,$$

$$\hat{\sigma}^2_{\Omega} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n} \ .$$

Τελικά, για τον Ω η πιθανοφάνεια είναι:

$$L\left(\widehat{\Omega}\right) = \left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2_{\Omega}}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{2\hat{\sigma}^2_{\Omega}}\right\} = \left(2\pi\hat{\sigma}^2_{\Omega}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} ,$$

διότι $\hat{\sigma}^2_{\Omega} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, $\omega = \{(\mu,\sigma^2), \ -\infty < \mu < +\infty, \ \sigma^2 > 0\}$ η πιθανοφάνεια παίρνει τη μορφή:

$$L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}.$$

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς μ είναι:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \mu}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu)}{\sigma^2} \ .$$

Η μερική παράγωγος πρώτης τάξης ως προς σ^2 είναι:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu\right)^2}{2\sigma^4} \ .$$

Θέτοντας τις παραπάνω σχέσεις ίσες με το μηδέν, συνεπάγεται ότι:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \mu}=0\\[2ex] \dfrac{\partial \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu)=0\\ n\sigma^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu)^2\end{cases},$$

δηλαδή:

$$\begin{gathered}\mu=\bar{y}\\ \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{n}\end{gathered} \ .$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial (\mu)^2}=-\frac{kn_i}{2\sigma^2}<0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial (\sigma^2)^2}=\frac{n}{2\sigma^4}-\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\mu)^2}{\sigma^6}=-\frac{n}{2\sigma^4}<0, \quad \text{για} \quad \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{n},$$

και:

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \mu\,\partial \sigma^2}=\frac{\partial^2 \ln L\left(\underset{\sim}{y};\mu,\sigma^2\right)}{\partial \sigma^2\,\partial \mu}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\mu\right)}{\sigma^4}=0 \ .$$

Άρα οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων μ και σ^2 είναι:

$$\begin{gathered}\hat{\mu}_i=\bar{y}\\ \hat{\sigma}_\omega^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{n}\end{gathered} \ .$$

Επομένως, το supremum της πιθανοφάνειας κάτω από τη μηδενική υπόθεση έχει τη μορφή:

$$L(\hat{\omega})=\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{2\hat{\sigma}_\omega^2}\right\}=(2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} \ .$$

διότι $\hat{\sigma}_\omega^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{n}$.

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda=\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}=\frac{(2\pi\hat{\sigma}_\omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}_\Omega^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}=\left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $\lambda<c$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}<c\Rightarrow\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}<c'\Rightarrow\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}{n}}<c'\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2}<c'.$$

Αλλά, έχει αποδειχτεί ότι:

$$\mathrm{SST}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2=\mathrm{SSW}+\mathrm{SSB} \ ,$$

με συνέπεια η μηδενική υπόθεση να απορρίπτεται, όταν:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}>c'' \Rightarrow 1+\frac{k-1}{n-k}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n-k}}>c'' \ ,$$

δηλαδή:

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{n-k}}>c''' \ .$$

Στην αρχή της παραγράφου αναφέρθηκε ότι:

$$\frac{\mathrm{SSB}}{\sigma^2}\sim \boldsymbol{\chi}_{k-1}^2,\qquad \frac{\mathrm{SSW}}{\sigma^2}\sim \boldsymbol{\chi}_{n-k}^2 \ .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.9 (σελ. 25), η τ.μ. που δίνεται από τη σχέση:

$$F=\frac{\frac{\frac{\mathrm{SSB}}{\sigma^2}}{k-1}}{\frac{\frac{\mathrm{SSW}}{\sigma^2}}{n-k}}=\frac{\frac{\mathrm{SSB}}{k-1}}{\frac{\mathrm{SSW}}{n-k}}=\frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSW}}\ \sim\ F_{k-1,n-k} \ .$$

Άρα η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$F>c^* \ ,$$

όπου η σταθερά c^* υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a}=E\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}}\right)=\mathrm{P}_{\mathrm{H}_0}(F>c^*)\Rightarrow c^*=F_{k-1,n-k;\mathrm{a}} \ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{y}})=\begin{cases}1, & \text{αν } F=\frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSW}}>F_{k-1,n-k;\mathrm{a}}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} \ .$$

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Αγγουριδάκης, Β. (1979). *Μετεωρολογικές Παρατηρήσεις της Θεσσαλονίκης το 1977*. Εκδόσεις του Ινστιτούτου Μετεωρολογίας & Κλιματολογίας, Α.Π.Θ., ν. 46.

Graybill, F. A. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edition*. McGraw Hill.

Κολυβά-Μαχαίρα, Φ. (1985). *Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Mood, A., Graybill, F. & Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edition*. McGraw Hill.

Μπόρα-Σέντα, Ε. & Μωυσιάδης, Χ. (1990). *Εφαρμοσμένη Στατιστική*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Rice, J. A.(1994). *Mathematical Statistics and Data Analysis, 2nd edition*. Duxbury Press.

Roussas, G. (2003). *An Introduction to Probability and Statistical Inference*. Academic Press. An imprint of Elsevier Science.

Snedecor, G. W. & Cochran, W. G.(1989). *Statistical Methods, 8th edition*. Iowa State University Press.

Watkins, J. C. (1989). *Statistical Methods, 8th edition*. Iowa State University Press.

Λυμένες Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

Άσκηση 6.1

Δίνεται τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{\mathbf{X}}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f\left(x; \underset{\sim}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}$, $x \geq \theta_1$, $\theta_2 > 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση $\mathrm{H_0}$: $\theta_2 = \theta_0$, έναντι της εναλλακτικής $\mathrm{H_1}$: $\theta_2 \neq \theta_0$ με τη χρήση ελεγχοσυνάρτησης γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών.

Λύση

Η πιθανοφάνεια του τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ είναι:

$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2} \mathrm{I}_{(\theta_1,\infty)}(x_i) \exp\left\{-\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2}\right\} = \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)\right\} \mathrm{I}_{(\theta_1,\infty)}(x_{(1)}) \ .$$

Η πιθανοφάνεια γίνεται μέγιστη ως προς θ_1, όταν η τιμή της παραμέτρου θ_1 γίνεται μέγιστη. Από τη σχέση $\theta_1 \leq x_i$, $i = 1,2,\dots,n$ προκύπτει ότι $\theta_1 \leq x_{(1)}$, δηλαδή η μέγιστη τιμή της παραμέτρου θ_1 είναι $x_{(1)}$. Επομένως, $\hat{\theta}_1 = x_{(1)}$. Συνεπώς:

$$L_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right) = \max_{\theta_1} L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right) = \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)\right\} \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\ln L_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right) = -n\ln\theta_2 - \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right) \ .$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ_2 και θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \ln L_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right)}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right) = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)}{n} \ .$$

Επιπλέον,

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L_1\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}}; \underset{\sim}{\theta}\right)}{\partial \theta_2^2}\right|_{\theta_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)}{n}} = \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(-\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)\right) = \frac{n}{\theta_2^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)}{\theta_2^3} = -\frac{n}{\theta_2^2} < 0 \ .$$

Συνεπώς, ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ_2 είναι $\hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)}{n}$.

Επομένως:

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{1}{\hat{\theta}_2}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\hat{\theta}_2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)\right\} = \hat{\theta}_2^{-n}\exp\{-n\} \ ,$$

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{1}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{(1)}\right)\right\} = \hat{\theta}_0^{-n}\exp\left\{-\frac{n\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right\}$$

και:

$$\lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\hat{\theta}_0^{-n}\exp\left\{-\frac{n\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right\}}{\hat{\theta}_2^{-n}\exp\{-n\}} = \left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{n - \frac{n\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right\} \ ,$$

δηλαδή:

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{\frac{n\left(\theta_0 - \hat{\theta}_2\right)}{\theta_0}\right\} \ .$$

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c$, δηλαδή:

$$\left(\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{\frac{n\left(\theta_0 - \hat{\theta}_2\right)}{\theta_0}\right\} < c \Rightarrow n\ln\hat{\theta}_2 - n\ln\theta_0 + \frac{n\left(\theta_0 - \hat{\theta}_2\right)}{\theta_0} < c' \Rightarrow \ln\frac{\hat{\theta}_2}{\theta_0} - \frac{\hat{\theta}_2}{\theta_0} < c'' \ .$$

Έστω η συνάρτηση $f(w) = \ln w - \ln k - \frac{w}{k}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(w)$ παρουσιάζει μέγιστο για $w = k$, διότι:

$$f'(w) = \frac{1}{w} - \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow w = k\,,$$
$$f''(w) = -\frac{1}{w^2} < 0\,.$$
Άρα η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται, όταν $\hat{\theta}_2 < c_1$ ή όταν $\hat{\theta}_2 > c_2$. Τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 υπολογίζονται από τη σχέση:
$$\mathrm{a} = E_{\theta_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\hat{\theta}_2 < c_1\right) + \mathrm{P}_{\theta_0}\left(\hat{\theta}_2 > c_2\right).$$
Για την επίλυση της άσκησης είναι απαραίτητο να αποδειχθεί ότι οι στ.σ. $T_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X_{(1)}\right)$ και $T_2 = nX_{(1)}$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομές $G(n-1,\frac{1}{\theta_2})$ και $\frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-n\theta_1}{\theta_2}\right\}$, αντίστοιχα. Προφανώς, ισχύει ότι:
$$T_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{(i)} - X_{(1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} - nX_{(1)}\ .$$
Έστω $Y_i = X_{(i)}$. Η από κοινού κατανομή του διατεταγμένου δείγματος $\underset{\sim}{\mathrm{Y}} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ είναι:
$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{Y}}}\left(\underset{\sim}{y}\right) = n!\,f_{\underset{\sim}{\mathrm{X}}}\left(\underset{\sim}{y}\right) = n!\frac{1}{\theta_2^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_1)\right\}\ , \qquad y_i > \theta_1\ , \qquad i = 1,2,\dots,n\ .$$
Έστω ο μετασχηματισμός $\underset{\sim}{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{A}\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$, τέτοιος ώστε:
$$\left.\begin{array}{c} Z_1 = nY_1 \\ Z_2 = (n-1)(Y_2 - Y_1) \\ Z_3 = (n-2)(Y_3 - Y_2) \\ \vdots \\ Z_n = (Y_n - Y_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\ .$$
Ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι:
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(n-1) & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-2) & n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = n!\ .$$
Η από κοινού κατανομή της τ.μ. $\underset{\sim}{\mathrm{Z}} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ δίνεται από τη σχέση:
$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{Z}}}(\underset{\sim}{z}) = f_{\underset{\sim}{\mathrm{Y}}}(\underset{\sim}{z})\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\theta_2^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \theta_1)\right\}\ ,$$
δηλαδή:
$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{Z}}}\left(\underset{\sim}{z}\right) = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{z_1 - n\theta_1}{\theta_2}\right\}\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{z_i}{\theta_2}\right\}\ , \qquad z_1 \geq n\theta_1\ , \qquad z_i \geq 0\ , \qquad i = 2,3,\dots,n\ .$$
Οι κατανομές των τ.μ. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ υπολογίζονται ως εξής:
$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{z_1 - n\theta_1}{\theta_2}\right\}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta_2^{n-1}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=2}^{n} z_i}{\theta_2}\right\}dz_2\cdots dz_n = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{z_1 - n\theta_1}{\theta_2}\right\}\ ,\ \ z_1 \geq n\theta_1$$
και:
$$f_{Z_i}(z_i) = \int_{n\theta_1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} f_{\underset{\sim}{\mathrm{Z}}}\left(\underset{\sim}{\mathrm{z}}\right)dz_1\cdots dz_{i-1}dz_{i+1}\cdots dz_n = \frac{1}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{z_i}{\theta_2}\right\}\ , \qquad z_i \geq 0\ , \qquad i = 2,3,\dots,n\ .$$
Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι τ.μ. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ είναι ανεξάρτητες, γιατί:
$$f_{\underset{\sim}{\mathrm{Z}}}(\underset{\sim}{z}) = \prod_{i=1}^{n} f_{Z_i}(z_i)\ .$$
Η κατανομή των τ.μ. $Z_2, \dots, Z_n$ είναι η $G\left(1, \frac{1}{\theta_2}\right)$. Επομένως, η τ.μ. $\sum_{i=2}^{n} Z_i$ ακολουθεί την κατανομή $G\left(n-1, \frac{1}{\theta_2}\right)$ (βλέπε άσκηση 1.1, σελ. 45). Αλλά:

$$\sum_{i=2}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i - Z_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i - nY_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} - nX_{(1)} = T_1$$

και:

$$Z_1 = nY_1 = nX_{(1)} = T_2 \ .$$

Επομένως, η στ.σ. T_2 είναι συνάρτηση της τ.μ. Z_1 και η στ.σ. T_1 είναι συνάρτηση των τ.μ. $Z_2, \dots, Z_n$. Άρα οι στ. σ. T_1 και T_2 είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, η T_1 ακολουθεί την κατανομή $G\left(n-1, \frac{1}{\theta_2}\right)$ και η T_2 ακολουθεί εκθετική κατανομή με σ.π.π. $f(z_1, \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{\theta_2} \exp\left\{-\frac{z_1 - n\theta_1}{\theta_2}\right\}, \frac{1}{\theta_2}, z_1 \geq n\theta_1$.

Απ' όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως προκύπτει ότι η κατανομή της στ.σ. $n\widehat{\theta}_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{(1)})$ είναι η $G(n-1, \frac{1}{\theta_2})$. Επιπλέον, στην άσκηση 1.2 (σελ. 46) έχει αποδειχθεί ότι, αν η τ.μ. T_1 ακολουθεί την κατανομή $G(n-1, \frac{1}{\theta_2})$, τότε η τ.μ. $\frac{2}{\theta} T_1$ ακολουθεί την $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1)}$ κατανομή. Άρα:

$$\text{a} = \text{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) < nc_1\right) + \text{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) > nc_2\right) ,$$

δηλαδή:

$$\text{a} = \text{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) < \frac{2}{\theta_0} nc_1\right) + \text{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) > \frac{2}{\theta_0} nc_2\right) ,$$

με τις τιμές των c_1 και c_2 να υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \ln\dfrac{c_1}{\theta_0} - \dfrac{c_1}{\theta_0} = \ln\dfrac{c_2}{\theta_0} - \dfrac{c_2}{\theta_0} \\ \displaystyle\int_{\frac{2}{\theta_0} nc_1}^{\frac{2}{\theta_0} nc_2} g_{2(n-1)}(x) dx = 1 - \text{a} \end{cases} ,$$

όπου $g_{2(n-1)}(x)$ είναι η σ.π.π. της κατανομής $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1)}$.

Το παραπάνω σύστημα είναι δύσκολο να επιλυθεί. Οι τιμές των c_1 και c_2 επιλέγεται να υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$\frac{\text{a}}{2} = \text{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) < \frac{2}{\theta_0} nc_1\right) = \text{P}\left(\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) > \frac{2}{\theta_0} nc_2\right) .$$

Σύμφωνα με όσα ισχύουν για την κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{n;\text{a}}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{2}{\theta_0} nc_1 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1);1-\frac{\text{a}}{2}}, \qquad \frac{2}{\theta_0} nc_2 = \boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1);\frac{\text{a}}{2}} \ .$$

Τελικά, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\text{x}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) < \frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1);1-\frac{\text{a}}{2}} \text{ ή } \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) > \frac{\theta_0}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{2(n-1);\frac{\text{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 6.2

Έστωσαν $\underset{\sim}{\text{X}}$ και $\underset{\sim}{\text{Y}}$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{m}$ από κατανομή Bernoulli με παραμέτρους $\boldsymbol{\theta_1}$ και $\boldsymbol{\theta_2}$, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{0 < \theta_1, \theta_2 < 1}$. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος των υποθέσεων H_0: $\boldsymbol{\theta_1 = \theta_2}$, έναντι της εναλλακτικής H_1: $\boldsymbol{\theta_1 \neq \theta_2}$ σε στάθμη σημαντικότητας a.

Λύση

Για τον έλεγχο της παραπάνω υπόθεσης θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Η σ.π. της κατανομής $B(1, \theta)$ είναι:

$$f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x},\qquad x=0,1,\qquad 0<\theta<1\ .$$
Η πιθανοφάνεια είναι:
$$L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}};\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\ .$$
Επειδή τα τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι ανεξάρτητα, η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ είναι:
$$L(\Omega)=L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\underset{\sim}{\mathrm{y}},\theta_1,\theta_2\right)=L\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\theta_1\right)L\left(\underset{\sim}{\mathrm{y}},\theta_2\right)=\theta_1^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\theta_2^{\sum_{j=1}^{m}y_j}(1-\theta_2)^{m-\sum_{j=1}^{m}y_j}\ .$$
Για την εύρεση των Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 παίρνουμε το λογάριθμο της παραπάνω σχέσης και προκύπτει:
$$\ln L(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(\theta_1)+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-\theta_1)+\sum_{j=1}^{m}y_j\ln(\theta_2)+\left(m-\sum_{j=1}^{m}y_j\right)\ln(1-\theta_2)\ .$$
Επιπλέον,
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta_1}-\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\theta_1}=0\Rightarrow\theta_1=\bar{X}\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}y_j}{\theta_2}-\dfrac{m-\sum_{i=1}^{m}y_j}{1-\theta_2}=0\Rightarrow\theta_2=\bar{Y}\end{cases}.$$
Επιπλέον,
$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1^2}\right|_{\theta_1=\bar{X}}=\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta_1}-\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\theta_1}\right)=-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta_1^2}-\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta_1)^2}=-\dfrac{n}{\theta_1(1-\theta_1)}<0\\[2ex]\left.\dfrac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2^2}\right|_{\theta_2=\bar{Y}}=\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{m}y_j}{\theta_2}-\dfrac{m-\sum_{i=1}^{m}y_j}{1-\theta_2}\right)=-\dfrac{\sum_{i=1}^{m}y_j}{\theta_2^2}-\dfrac{m-\sum_{i=1}^{m}y_j}{(1-\theta_2)^2}=-\dfrac{m}{\theta_2(1-\theta_2)}<0\end{cases}.$$
Λόγω της ανεξαρτησίας των τ.δ. $\underset{\sim}{\mathrm{X}}$ και $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}$ ισχύει ότι: $\frac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2}=\frac{\partial^2\ln L(\Omega)}{\partial\theta_2\,\partial\theta_1}=0$. Συνεπώς, οι Ε.Μ.Π. των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1=\bar{X}$ και $\hat{\theta}_2=\bar{Y}$.

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $\theta_1=\theta_2=\theta$ η πιθανοφάνεια γίνεται:
$$L(\omega)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}(1-\theta)^{n+m-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{j=1}^{m}y_j}\ ,$$
με συνέπεια:
$$\ln L(\omega)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j\right)\ln\theta+\left(n+m-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{j=1}^{m}y_j\right)\ln(1-\theta)$$
και:
$$\frac{\partial\ln L(\omega)}{\partial\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{\theta}-\frac{n+m-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{j=1}^{m}y_j}{1-\theta}=0\Rightarrow\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{n+m}\ ,$$
ενώ:
$$\left.\frac{\partial^2\ln L(\omega)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{n+m}}=-\frac{n+m}{\theta(1-\theta)}<0\ .$$
Άρα ο Ε.Μ.Π. της παραμέτρου θ είναι:
$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{n+m}=\frac{n\hat{\theta}_1+m\hat{\theta}_2}{n+m}\ .$$
Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών δίνεται από τη σχέση:
$$\lambda=\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}=\frac{\hat{\theta}^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}\left(1-\hat{\theta}\right)^{n+m-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{j=1}^{m}y_j}}{\hat{\theta}_1^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(1-\hat{\theta}_1\right)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\hat{\theta}_2^{\sum_{j=1}^{m}y_j}\left(1-\hat{\theta}_2\right)^{m-\sum_{j=1}^{m}y_j}},$$
Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\theta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ και $\hat{\theta}_2=\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{m}$ προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{\hat{\theta}^{n\hat{\theta}_1}\left(1-\hat{\theta}\right)^{n(1-\hat{\theta}_1)}\hat{\theta}^{m\hat{\theta}_2}\left(1-\hat{\theta}\right)^{m(1-\hat{\theta}_2)}}{\hat{\theta}_1^{n\hat{\theta}_1}\left(1-\hat{\theta}_1\right)^{n(1-\hat{\theta}_1)}\hat{\theta}_2^{m\hat{\theta}_2}\left(1-\hat{\theta}_2\right)^{m(1-\hat{\theta}_2)}} \ .$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\ln\lambda = -n\hat{\theta}_1\left(\ln\hat{\theta}_1 - \ln\hat{\theta}\right) - n\left(1-\hat{\theta}_1\right)\left[\ln\left(1-\hat{\theta}_1\right) - \ln\left(1-\hat{\theta}\right)\right] - m\hat{\theta}_2\left(\ln\hat{\theta}_2 - \ln\hat{\theta}\right) \\ - m\left(1-\hat{\theta}_2\right)\left[\ln\left(1-\hat{\theta}_2\right) - \ln\left(1-\hat{\theta}\right)\right] \ .\end{aligned}$$

Για την επίλυση της άσκησης είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν οι προσεγγιστικές τιμές των λογαρίθμων. Το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ δίνεται από τη σχέση:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \dots$$

Αναπτύσσοντας την ποσότητα $\ln\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}}$ σε σειρά Taylor, με δεδομένο ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, προκύπτει ότι $\hat{\theta}_1 \approx \hat{\theta}_2 \approx \hat{\theta}$. Προφανώς, $\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}} \approx 1$ και $\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}} \approx 1$ με συνέπεια οι όροι τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του δύο να είναι αμελητέοι. Επομένως:

$$\left\{\begin{array}{c}\ln\hat{\theta}_1 - \ln\hat{\theta} = \ln\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}} \approx \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}} - 1 = \frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} \\ \ln\hat{\theta}_2 - \ln\hat{\theta} \approx \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} \\ \ln\left(1-\hat{\theta}_1\right) - \ln\left(1-\hat{\theta}\right) = \ln\frac{1-\hat{\theta}_1}{1-\hat{\theta}} \approx \frac{1-\hat{\theta}_1}{1-\hat{\theta}} - 1 = -\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} \\ \ln\left(1-\hat{\theta}_2\right) - \ln\left(1-\hat{\theta}\right) \approx -\frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}}{1-\hat{\theta}}\end{array}\right. .$$

Συνεπώς:

$$\ln\lambda \approx -n\hat{\theta}_1\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} + n\left(1-\hat{\theta}_1\right)\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} - m\hat{\theta}_2\frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} + m\left(1-\hat{\theta}_2\right)\frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} \ ,$$

δηλαδή:

$$\ln\lambda \approx n(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})\left(\frac{1-\hat{\theta}_1}{1-\hat{\theta}} - \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}}\right) + m(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})\left(\frac{1-\hat{\theta}_2}{1-\hat{\theta}} - \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}}\right) \ ,$$

ή:

$$\ln\lambda \approx -\frac{n\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)^2}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)} - \frac{m\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)^2}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)} = -\frac{n\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)^2 + m\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)^2}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)} \ .$$

Από τη σχέση $\hat{\theta} = \frac{n\hat{\theta}_1 + m\hat{\theta}_2}{n+m}$ συνεπάγεται ότι:

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\theta}_1 - \hat{\theta} = \hat{\theta}_1 - \frac{n\hat{\theta}_1 + m\hat{\theta}_2}{n+m} = \frac{m(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)}{n+m} \\ \hat{\theta}_2 - \hat{\theta} = \hat{\theta}_2 - \frac{n\hat{\theta}_1 + m\hat{\theta}_2}{n+m} = -\frac{n(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)}{n+m}\end{array}\right. .$$

Άρα:

$$n\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)^2 + m\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)^2 = n\frac{m^2\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2}{(n+m)^2} + m\frac{n^2\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2}{(n+m)^2} = \frac{nm\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2}{n+m}$$

και:

$$-\ln\lambda \approx \frac{\frac{nm\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2}{n+m}}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)} = \frac{\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\right)^2}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} \ .$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1 (σελ. 110), η ποσότητα $-2\ln\lambda$ ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή $\boldsymbol{X}_1^2$ Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $\lambda < c \Rightarrow \ln\lambda < \ln c \Rightarrow -2\ln\lambda > c'$, δηλαδή:

$$\frac{2\left(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right)^2}{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} > c' \Rightarrow \frac{\left|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right|}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} > c'' .$$

Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση είναι:

$$\varphi(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\underset{\sim}{\mathrm{y}}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{\left|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right|}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} > c'' \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} ,$$

όπου η σταθερά c υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{a} = E_{\mathrm{H}_0}\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}},\underset{\sim}{\mathrm{Y}}\right) = \mathrm{P}_{\mathrm{H}_0}\left(\frac{\left|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right|}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} > c''\right) \Rightarrow 1-\mathrm{a} = \mathrm{P}_{\mathrm{H}_0}\left(-c'' \leq \frac{\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \leq c''\right).$$

Το στατιστικό $Z = \frac{\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν:

$$\Phi(c'') - \Phi(-c'') = 1-\mathrm{a} \Rightarrow 2\Phi(c'') = 2-\mathrm{a} \Rightarrow c'' = z_{\frac{\mathrm{a}}{2}} .$$

Τελικά, η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\varphi\left(\underset{\sim}{\mathrm{x}},\underset{\sim}{\mathrm{y}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \dfrac{\left|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right|}{\sqrt{\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} > z_{\frac{\mathrm{a}}{2}} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Άσκηση 6.3

Ο λογιστής μιας εταιρείας προκειμένου να ελέγξει αν υπάρχει διαφορά στις μέσες τιμές των μισθών των υπαλλήλων σε σχέση με το επίπεδο εκπαίδευσής, τους έλαβε δείγματα 5 υπαλλήλων από κάθε επίπεδο εκπαίδευσης και κατέγραψε το μηνιαίο μισθό τους (σε εκατοντάδες €). Τα δεδομένα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δημοτικό	**Γυμνάσιο**	**Λύκειο**	**ΑΕΙ / ΤΕΙ**
10	**7**	**13**	**15**
11	**8**	**14**	**16**
9	**7**	**15**	**10**
10	**11**	**14**	**16**
10	**12**	**14**	**18**

Πίνακας 6.1 *Πίνακας δεδομένων άσκησης 6.3.*

Υπάρχει διαφορά του μέσου μισθού ανάλογα με το επίπεδο εκπαίδευσης των υπαλλήλων; Δίνεται $\mathbf{a = 0.05}$.

Λύση

Το μοντέλο της ανάλυσης διασποράς στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται από τη σχέση:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} ,$$

όπου $1 \leq i \leq 4$ και $1 \leq j \leq 5$. Αναλυτικότερα:

Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο	ΑΕΙ / ΤΕΙ
$y_{11} = 10 = \mu + \alpha_1 + e_{11}$	$y_{21} = 7 = \mu + \alpha_2 + e_{21}$	$y_{31} = 13 = \mu + \alpha_3 + e_{31}$	$y_{41} = 15 = \mu + \alpha_4 + e_{41}$
$y_{12} = 11 = \mu + \alpha_1 + e_{12}$	$y_{22} = 8 = \mu + \alpha_2 + e_{22}$	$y_{32} = 14 = \mu + \alpha_3 + e_{32}$	$y_{42} = 16 = \mu + \alpha_4 + e_{42}$
$y_{13} = 9 = \mu + \alpha_1 + e_{13}$	$y_{23} = 7 = \mu + \alpha_2 + e_{23}$	$y_{33} = 15 = \mu + \alpha_3 + e_{33}$	$y_{43} = 10 = \mu + \alpha_4 + e_{43}$
$y_{14} = 10 = \mu + \alpha_1 + e_{14}$	$y_{24} = 11 = \mu + \alpha_2 + e_{24}$	$y_{34} = 14 = \mu + \alpha_3 + e_{34}$	$y_{44} = 16 = \mu + \alpha_4 + e_{44}$
$y_{15} = 10 = \mu + \alpha_1 + e_{15}$	$y_{25} = 12 = \mu + \alpha_2 + e_{25}$	$y_{35} = 14 = \mu + \alpha_3 + e_{35}$	$y_{45} = 18 = \mu + \alpha_4 + e_{45}$

Πίνακας 6.2 *Πίνακας άσκησης 6.3.*

Διαπιστώνεται ότι:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5, \qquad n = 20 \ .$$

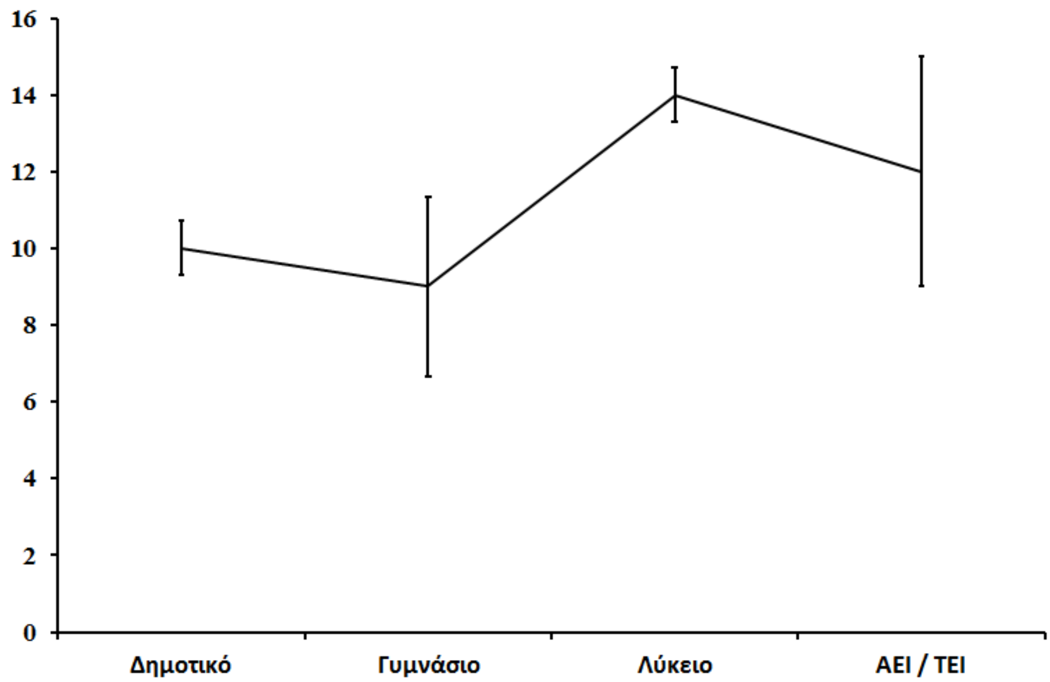
Επιπλέον, εύκολα υπολογίζεται ότι:

$$\bar{y}_1 = 10, \qquad \bar{y}_2 = 9, \qquad \bar{y}_3 = 14, \qquad \bar{y}_4 = 15, \qquad \bar{y} = 12,$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(y_{1j} - 10)^2} = 0.707, \qquad S_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(y_{2j} - 9)^2} = 2.342,$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(y_{3j} - 14)^2} = 0.707, \qquad S_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(y_{4j} - 15)^2} = 3.000.$$

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των μισθών των υπαλλήλων, ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης τους. Το διάγραμμα αυτό βοηθά τον αναγνώστη, ώστε να έχει μια εποπτική εικόνα των δεδομένων του παραδείγματος.



Σχήμα 6.1 *Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις δεδομένων της άσκησης 6.3.*

Τα τυπικά σφάλματα $SE_i = \frac{S_i}{\sqrt{n_i}}$, τα οποία βοηθούν στην κατασκευή των διαστημάτων εμπιστοσύνης των μέσων τιμών είναι:

$$SE_1 = 0.316, \qquad SE_2 = 1.049, \qquad SE_3 = 0.316, \qquad SE_4 = 1.342.$$

Τα $(1-\mathrm{a})\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές δίνονται από τη σχέση:

$$\bar{y}_i \pm SE_i t_{n_i-1;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ ,$$

όπου τιμή $t_{n_i-1;\frac{\mathrm{a}}{2}} = t_{4;0,025} = 2.776$ υπολογίζεται από τον πίνακα Β2 (σελ. 215). Επομένως, τα 95% δ.ε. για τις μέσες τιμές μ_1, μ_2, μ_3 και μ_4 είναι, αντίστοιχα:

$$(9.123{,}10.887), \quad (6.088{,}11.912), \quad (13.123{,}14.877), \quad (11.275{,}18.725).$$

Διαπιστώνεται ότι κατά τον υπολογισμό των δ.ε. για τις μέσες τιμές το τυπικό σφάλμα δίνεται από τη σχέση $SE_i = \frac{S_i}{\sqrt{n_i}}$, όπου S_i^2 είναι οι εκτιμητές των θεωρητικών διασπορών σ_i^2, $1 \leq i \leq 4$. Στην περίπτωση της ανάλυσης διασποράς ο εκτιμητής της διασποράς είναι η ποσότητα MSW, εφόσον οι διασπορές των ομάδων είναι ίσες. Στην περίπτωση αυτή τα $(1-\mathrm{a})\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές δίνονται από τη σχέση:

$$\bar{y}_i \pm \sqrt{\frac{\mathrm{MSW}}{n_i}} t_{n_i-1;\frac{\mathrm{a}}{2}} \ ,$$

Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης: H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ έναντι της εναλλακτικής H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ για ένα τουλάχιστον ζεύγος των i και j απαραίτητοι είναι οι υπολογισμοί των SST, SSB και SSW. Για το παράδειγμα, μετά από πράξεις, διαπιστώνεται ότι:

$$\mathrm{SSB} = \sum_{i=1}^{4} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = 5(4+9+4+9) = 130 \ ,$$

$$\mathrm{SSW} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = 2 + 22 + 2 + 36 = 62$$

και:

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} (y_{ij} - \bar{y})^2 = 22 + 67 + 22 + 81 = 192 = \mathrm{SSB} + \mathrm{SSW} \ .$$

Επιπλέον:

$$\mathrm{MSB} = \frac{\mathrm{SSB}}{k-1} = \frac{130}{3} = 43.333, \qquad \mathrm{MSW} = \frac{\mathrm{SSW}}{n-k} = \frac{62}{16} = 3.875 \ .$$

Διορθώνοντας, τώρα, όσα είχαν αναφερθεί, για τα δ.ε. προκύπτει ότι τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές μ_1, μ_2, μ_3 και μ_4 είναι αντίστοιχα:

$$(8.134{,}11.866), \quad (7.134{,}10.866), \quad (12.134{,}15.866), \quad (13.134{,}16.866).$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 6.5 (σελ. 190), η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, όταν $F = \frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSW}} > F_{k-1,n-k;\mathrm{a}}$. Προφανώς:

$$F = \frac{43.333}{3.875} = 11.183$$

και από τον πίνακα Β4 (σελ. 217) του παραρτήματος Β ισχύει ότι $F_{k-1,n-k;\mathrm{a}} = F_{3,16;0.05} = 3.24$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, δηλαδή υπάρχει διαφορά του μέσου μισθού ανάλογα με το επίπεδο εκπαίδευσης των υπαλλήλων.

Συνοπτικά οι υπολογισμοί που έγιναν, κατά την επίλυση του παραδείγματος, παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα, οποίος ονομάζεται πίνακας διασποράς:

Πηγή Μεταβολής	**Αθρ. Τετρ. (SS)**	**β.ε.**	**MS**	**Στατιστικό F**
between groups	SSB = 130	3	MSB = 43.333	$F = 11.183$
within groups	SSW = 62	16	MSW = 3.875	
Σύνολο	SST = 192	19		

Πίνακας 6.3 *Πίνακας ανάλυσης διασποράς της άσκησης 6.3.*

Οι εκτιμήσεις των επιδράσεων των επιπέδων δίνονται από τη σχέση:

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}$$

Επομένως:

$$\hat{\alpha}_1 = 10 - 12 = -2, \qquad \hat{\alpha}_2 = 9 - 12 = -3, \qquad \hat{\alpha}_3 = 14 - 12 = 2, \qquad \hat{\alpha}_4 = 15 - 12 = 3 \ .$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\sum_{j=1}^{5} n_i \hat{\alpha}_i = 5(-2 - 3 + 2 + 3) = 0 \ .$$

Τα υπόλοιπα δίνονται από τη σχέση: $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i$, δηλαδή:

Δημοτικό	**Γυμνάσιο**	**Λύκειο**	**ΑΕΙ / ΤΕΙ**
0	-2	-1	0
1	-1	0	1
-1	-2	1	-5
0	2	0	1
0	3	0	3

Πίνακας 6.4 *Πίνακας με τα υπόλοιπα της άσκησης 6.3.*

Αποδεικνύεται ότι:

$$\sum_{j=1}^{5} e_{1j} = \sum_{j=1}^{5} e_{2j} = \sum_{j=1}^{5} e_{3j} = \sum_{j=1}^{5} e_{4j} = 0 \ .$$

Τα τυποποιημένα υπόλοιπα (standardized residuals) θα υπολογιστούν με τη βοήθεια της σχέσης:

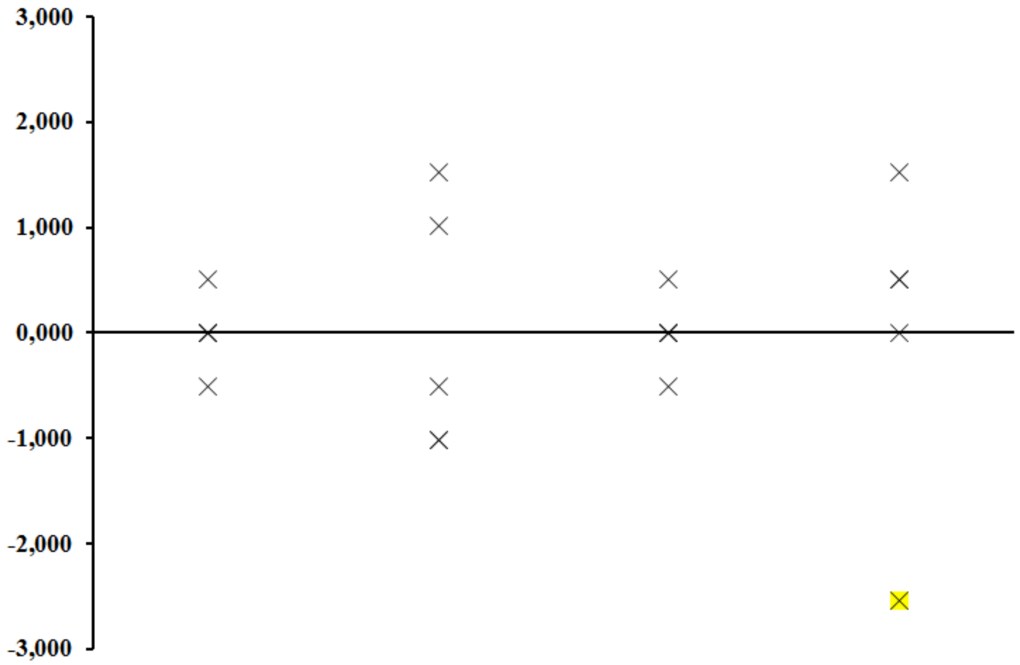
$$\tilde{e}_{ij} = \frac{y_{ij} - \bar{y}_i}{\sqrt{\mathrm{MSW}}}$$

και δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δημοτικό	**Γυμνάσιο**	**Λύκειο**	**ΑΕΙ / ΤΕΙ**
0.000	-1.016	-0.508	0.000
0.508	-0.508	0.000	0.508
-0.508	-1.016	0.508	-2.540
0.000	1.016	0.000	0.508
0.000	-1.524	0.000	1.524

Πίνακας 6.5 *Πίνακας με τα τυποποιημένα υπόλοιπα της άσκησης 6.3.*

Στο διάγραμμα 6.2 δίνονται οι τιμές των τυποποιημένων υπολοίπων.



Σχήμα 6.2 *Γραφική παράσταση τυποποιημένων υπολοίπων δεδομένων της άσκησης 6.3.*

Ισχύει ότι $|\tilde{e}_{43}| > 2.5$ με συνέπεια η παρατήρηση $y_{43} = 10$ να θεωρείται παράτυπο σημείο.

Αξίζει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι ως μέτρο σημαντικότητας του παράγοντα επίπεδο εκπαίδευσης υπαλλήλων ορίζεται ο συντελεστής $\eta^2 = \frac{\text{SSB}}{\text{SST}} = \frac{130}{192} = 0.677$ και υποδεικνύει ότι το ποσοστό της διασποράς που εξηγείται από τον παράγοντα επίπεδο εκπαίδευσης είναι 67.7%. Επίσης, ορίζεται και ο συντελεστής $\omega^2 = \frac{\text{SSB}-(k-1)\text{MSW}}{\text{SST}+\text{MSW}} = \frac{130-3\cdot 3.875}{192+3.875} = 0.604$ ως ένα εναλλακτικό μέτρο που διορθώνει την υπερεκτίμηση που υπολογίζεται από τον συντελεστή η^2.

Άσκηση 6.4

Να μελετηθεί η σχέση που συνδέει την ημερήσια εξάτμιση (σε mm) με τη μέση ημερήσια θερμοκρασία (σε ^{o}C) τη μέση ημερήσια σχετική υγρασία (%) και τη μέση ημερήσια ταχύτητα ανέμου (km/h) για το μήνα Ιούλιο του 1977. Χρησιμοποιούνται τα δεδομένα από το μετεωρολογικό σταθμό του Α.Π.Θ. (σελ. 193) και τα οποία δίνονται παρακάτω. Για τη μέτρηση της εξάτμισης χρησιμοποιήθηκε το εξατμισίμετρο Pishe εντός κλωβού.

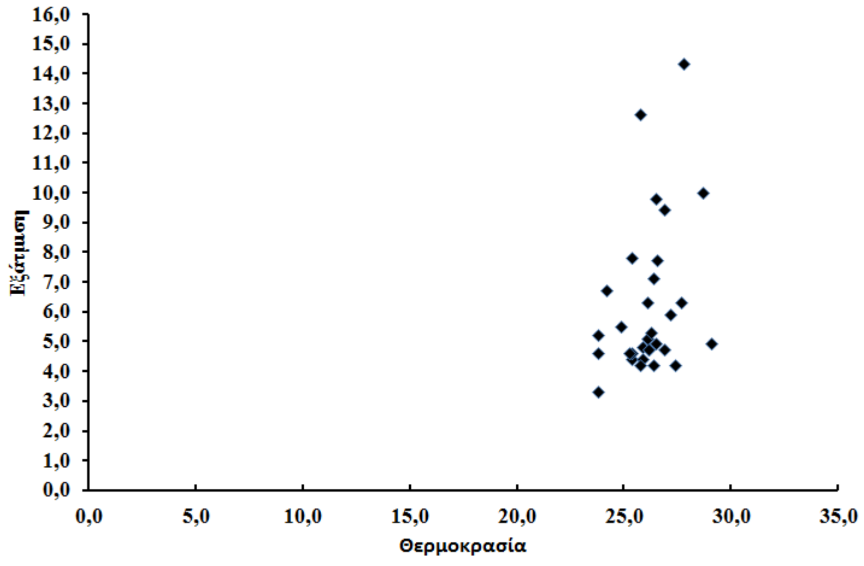
Εξάτμιση	Θερμοκρασία	Ταχύτητα Ανέμου	Σχετική Υγρασία
4.6	23.8	6.0	63.7
6.7	24.2	11.6	53.1
9.4	26.9	11.9	45.8
7.7	26.6	4.5	55.7
4.8	25.9	3.2	65.8
4.4	25.4	6.4	65.5
9.8	26.5	12.1	46.7
5.1	26.1	2.5	63.5
4.7	26.2	2.2	65.1
4.9	29.1	1.2	57.6
14.3	27.8	17.9	37.6
12.6	25.8	16.1	38.7

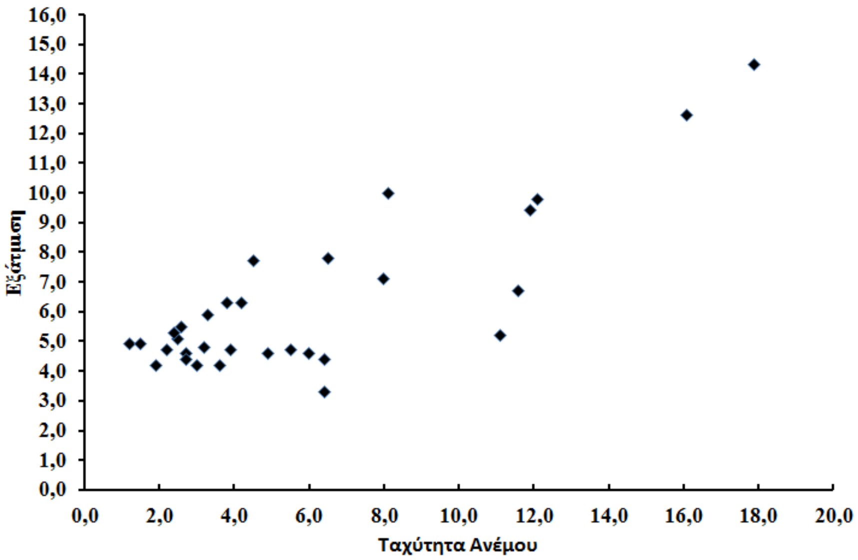
7.8	**25.4**	**6.5**	**43.2**
5.5	**24.9**	**2.6**	**61.5**
4.6	**25.4**	**2.7**	**66.3**
10.0	**28.7**	**8.1**	**51.3**
4.7	**26.2**	**5.5**	**67.2**
7.1	**26.4**	**8.0**	**55.2**
4.6	**25.3**	**4.9**	**65.5**
4.4	**25.9**	**2.7**	**68.7**
4.2	**26.4**	**3.0**	**71.2**
4.2	**25.8**	**3.6**	**69.0**
3.3	**23.8**	**6.4**	**72.2**
5.2	**23.8**	**11.1**	**63.4**
6.3	**26.1**	**4.2**	**55.2**
5.3	**26.3**	**2.4**	**58.0**
4.9	**26.5**	**1.5**	**63.8**
6.3	**27.7**	**3.8**	**63.3**
4.2	**27.4**	**1.9**	**69.2**
4.7	**26.9**	**3.9**	**66.7**
5.9	**27.2**	**3.3**	**60.1**

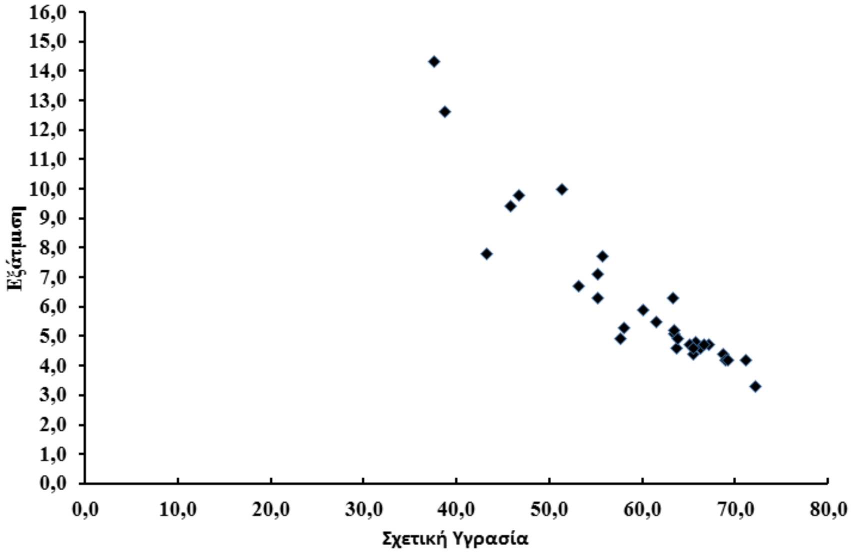
Πίνακας 6.6 *Πίνακας δεδομένων άσκησης 6.4.*

Λύση

Για να υπάρχει μία εποπτική εικόνα των δεδομένων, δημιουργήθηκαν τα παρακάτω τρία διαγράμματα διασποράς της εξαρτημένης μεταβλητής «εξάτμιση» με τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές «θερμοκρασία», «ταχύτητα ανέμου» και «σχετική υγρασία».







Σχήμα 6.3 *Διαγράμματα διασποράς των δεδομένων της άσκησης 6.4.*

Από τα παραπάνω διαγράμματα διασποράς είναι φανερό ότι υπάρχει γραμμική σχέση και μάλιστα, θετική της «εξάτμισης» με την «ταχύτητα του ανέμου», υπάρχει αρνητική γραμμική σχέση της «εξάτμισης» με τη «σχετική υγρασία», ενώ δε φαίνεται να υπάρχει γραμμική σχέση της «εξάτμισης» με τη «θερμοκρασία».

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο παράδειγμα 6.2 (σελ. 181), το μοντέλο σε μορφή πινάκων είναι:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e} \ ,$$

όπου $\boldsymbol{Y}$ είναι το 31×1 διάνυσμα με στοιχεία τα δεδομένα της $1^{ης}$ στήλης του πίνακα 6.6 (σελ. 204), που αντιστοιχεί στην εξαρτημένη μεταβλητή «εξάτμιση», $\boldsymbol{X}$ είναι ο 31×4 πίνακας με τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης να είναι όλα ίσα με 1, ενώ τα στοιχεία των τριών τελευταίων στηλών είναι τα δεδομένα των στηλών 2, 3 και 4 του πίνακα 6.6 (σελ. 204), που αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες μεταβλητές «θερμοκρασία» X_1, «ταχύτητα ανέμου» X_2 και «σχετική υγρασία» X_3, $\boldsymbol{\beta}$ είναι το 4×1 διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων β_0, β_1, β_2 και β_3 και $\boldsymbol{e}$ είναι το 31×1 διάνυσμα των σφαλμάτων. Για να μελετηθεί εάν η εξάτμιση επηρεάζεται από τις υπόλοιπες τρεις μεταβλητές, θα πραγματοποιηθεί ο έλεγχος υποθέσεων H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, H_1: $\beta_1 \neq 0$ ή $\beta_2 \neq 0$ ή $\beta_3 \neq 0$. Μετά από πράξεις, προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{31} x_{i1} = 810.4, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i2} = 181.7, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i3} = 1849.8 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{31} x_{i1}^2 = 21234.860, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i2}^2 = 1625.57, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i3}^2 = 113027.12 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{31} x_{i1}x_{i2} = 4733.38, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i1}x_{i3} = 48264.84, \quad \sum_{i=1}^{31} x_{i2}x_{i3} = 9933.78 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{31} y_i = 192.2, \quad \sum_{i=1}^{31} y_i x_{i1} = 5058.08, \quad \sum_{i=1}^{31} y_i x_{i2} = 1400.03, \quad \sum_{i=1}^{31} y_i x_{i3} = 10793.86$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 31 & 810.4 & 181.7 & 1849.8 \\ 810.4 & 21234.86 & 4733.38 & 48264.84 \\ 181.7 & 4733.38 & 1625.57 & 9933.78 \\ 1849.8 & 48264.84 & 9933.78 & 113027.12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 192.2 \\ 5058.08 \\ 1400.03 \\ 10793.86 \end{bmatrix}$$

και:

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 34.3632 & -0.9056 & -0.2818 & -0.1509 \\ -0.9056 & -0.0272 & 0.0053 & 0.0028 \\ -0.2818 & 0.0053 & 0.0050 & 0.0019 \\ -0.1509 & 0.0028 & 0.0019 & 0.0011 \end{bmatrix}$$

με συνέπεια:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.519 \\ 0.423 \\ 0.264 \\ -0.147 \end{bmatrix}.$$

Άρα το μοντέλο για την πρόβλεψη της εξάτμισης γράφεται ως:

$$\hat{Y} = 0.519 + 0.423X_1 + 0.264X_2 - 0.147X_3$$

Για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, σύμφωνα με την ελεγχοσυνάρτηση του παραδείγματος 6.3 (σελ. 183) πρέπει να υπολογισθούν οι πίνακες $\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}' - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y}$ και $\boldsymbol{Y}'\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\big)\boldsymbol{Y}$. Ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}' - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{Y} = 188.082\,, \qquad \boldsymbol{Y}'\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\big)\boldsymbol{Y} = 12.278$$

με συνέπεια:

$$F = \frac{n-(k+1)}{k}\frac{\boldsymbol{Y}'\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\big)\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\big)\boldsymbol{Y}} = \frac{31-4}{3}\frac{188.082}{12.278} = 137.867\ ,$$

ενώ, από τον πίνακα Β4 (σελ. 217) του παραρτήματος Β, ισχύει ότι:

$$F_{k;n-(k+1);\mathrm{a}} = F_{3;27;0.05} = 2.96\ .$$

Άρα $F > F_{3;27;0.05}$ και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται. Επομένως, μια τουλάχιστον από τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές πρέπει να χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο. Στη συνέχεια πρέπει να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητοι έλεγχοι υποθέσεων για τις παραμέτρους β_1, β_2 και β_3, για να εντοπιστούν ποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο. Το συγκεκριμένο θέμα δεν αναλύεται περισσότερο, διότι δεν αποτελεί αντικείμενο αυτού του βιβλίου.

Άσκηση 6.5

Να απαντηθούν οι παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντηση στην περίπτωση που η απάντηση είναι λάθος.

1. **Η στάθμη σημαντικότητας a ενός έλεγχου υποθέσεων είναι ίση με την πιθανότητα η μηδενική υπόθεση να είναι αληθής.**
2. **Αν η στάθμη σημαντικότητας a ενός έλεγχου υποθέσεων μειωθεί, τότε η ισχύς του ελέγχου αυξάνεται.**
3. **Αν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί σε στάθμη σημαντικότητας a, τότε η πιθανότητα η μηδενική υπόθεση να είναι σωστή είναι ίση με a.**
4. **Η πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, ενώ δεν είναι αληθής, είναι η ισχύς του ελέγχου.**

5. **Το σφάλμα τύπου I σημαίνει ότι το στατιστικό που χρησιμοποιείται παίρνει τιμές στην απορριπτική περιοχή του ελέγχου.**
6. **Το σφάλμα τύπου II είναι περισσότερο σημαντικό από το σφάλμα τύπου I.**
7. **Η ισχύς ενός ελέγχου καθορίζεται από τη μηδενική υπόθεση για το στατιστικό που χρησιμοποιείται.**
8. **Ο λόγος πιθανοφανειών είναι τυχαία μεταβλητή.**

Λύση

1. (Λ). Η στάθμη σημαντικότητας a ενός ελέγχου υποθέσεων είναι ίση με την πιθανότητα η μηδενική υπόθεση να απορριφθεί, ενώ είναι σωστή.
2. (Λ). Αν η στάθμη σημαντικότητας a ενός ελέγχου υποθέσεων μειωθεί, τότε και η ισχύς του ελέγχου μειώνεται.
3. (Λ). Βλέπε το 1.
4. (Σ). Η πιθανότητα η μηδενική υπόθεση να απορριφθεί, ενώ είναι σωστή η εναλλακτική υπόθεση, είναι ίση με την ισχύ του ελέγχου.
5. (Λ). Το σφάλμα τύπου I σημαίνει ότι το στατιστικό που χρησιμοποιείται παίρνει τιμές στην απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης, ενώ αυτή είναι σωστή.
6. (Λ). Δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.
7. (Λ). Η ισχύς του ελέγχου καθορίζεται από την εναλλακτική υπόθεση του στατιστικού.
8. (Σ).

Λίστα μαθησιακών αντικειμένων

Λεξικό ελληνο-αγγλικών όρων

αμερόληπτη ελεγχοσυνάρτηση	unbiased test statistic
αμερόληπτος εκτιμητής	unbiased estimator
αμερόληπτος εκτιμητής ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς	minimum variance unbiased estimator
απλή υπόθεση	simple hypothesis
απλό γεγονός ή ενδεχόμενο	simple event
αποδοτικός ή αποτελεσματικός εκτιμητής	efficient estimator
αρχική ή μηδενική υπόθεση	null hypothesis
ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα	disjoint events
ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα ή αποδοτικότητα	asymptotic efficiency
ασυμπτωτική κανονικότητα	asymptotic normality
ασυμπωτικά αμερόληπτος εκτιμητής	asymptotically unbiased estimator
βαθμοί ελευθερίας	degrees of freedom
γενικό γραμμικό μοντέλο	general linear model
γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών	generalized likelihood ratio
γνήσια ή μη τυχαιοποιημένη ελεγχοσυνάρτηση	nonrandomized test statistic
δεσμευμένη πιθανότητα	conditional probability
δειγματοχώρος	sample space
διακριτή ή απαριθμητή μεταβλητή	discrete variable
διάμεσος	median
διασπορά ή διακύμανση	variance
διάστημα εμπιστοσύνης	confidence interval
εκατοστημόρια	percentiles
εκθετική οικογένεια	exponential family
εκτιμητής	estimator
εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας	maximum likelihood estimator
έλεγχος υποθέσεων	hypothesis tests
ελεγχοσυνάρτηση	test statistic
εναλλακτική υπόθεση	alternative hypothesis
ενοχλητική παράμετρος	nuisance parameter
επαρκής	sufficient
ζευγαρωτές παρατηρήσεις	paired samples
ισχύς ελέγχου	power
κρίσιμη περιοχή	critical area
κρίσιμο σημείο ή σημείο αποκοπής	critical value
κύρια επίδραση	main effect

λόγος πιθανοφανειών	likelihood ratio
μεροληψία	bias
μέση τιμή	mean or expected value
μη παραμετρικός	nonparametric
μονότονος λόγος πιθανοφανειών	monotone likelihood ratio
ομοιόμορφα ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση	uniformly most powerful test statistic
παραμετρικός	parametric
περιοχή αποδοχής	accepted area
πιθανότητα	probability
πιθανοφάνεια	likelihood
ροπογεννήτρια	moment generating function
σημαντικότητα	significance
στάθμη σημαντικότητας	significance level
στατιστική συνάρτηση	statistical function
στοχαστικά ανεξάρτητα	stochastically independent
συνάρτηση κατανομής	probability function
συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	probability density function
συνδιασπορά	covariance
συνέπεια	consistency
συνεχής μεταβλητή	continuous variable
σύνθετη υπόθεση	composite hypothesis
συνθήκες ομαλότητας	smoothness conditions
συντελεστής εμπιστοσύνης	confidence coefficient
σφάλμα δευτέρου είδους	type II error
σφάλμα πρώτου είδους	type I error
σχετική αποτελεσματικότητα	relative efficiency
ταυτοδύναμος	idepontent
τεταρτημόρια	quartiles
τυπική απόκλιση	standard deviation
τυχαία μεταβλητή	random variable
τυχαίο δείγμα	random sample
τυχαιοποιημένη ή μικτή ελεγχοσυνάρτηση	randomized or mixed test statistic

Παράρτημα Α. Κατανομές

Κατανομή	Συνάρτηση Πιθανότητας	Παραμετρικός χώρος	Μέση Τιμή EX	Διακύμανση Var$X$	Ροπογεννήτρια
Bernoulli $\boldsymbol{B(1,p)}$	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0{,}1$	$0 \leq p \leq 1$	p	$p(1-p)$	$(1-p+pe^t)$
Διωνυμική $\boldsymbol{B(n,p)}$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0{,}1, \dots, n$	$0 \leq p \leq 1$, $n = 1{,}2, \dots$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^t)^n$
Γεωμετρική (Pascal)	$p(1-p)^{x-1}$, $x = 1{,}2, \dots$	$0 < p \leq 1$,	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t(1-p)}{1-(1-p)e^t}$, $t < -\log(1-p)$
Αρνητική Διωνυμική (Polya)	$\binom{x-1}{n-1} p^n(1-p)^{x-n}$, $x = n, n+1, \dots$	$0 \leq p < 1$, $n > 0$,	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\frac{p^k e^{tk}}{[1-(1-p)e^t]^k}$, $t < -\log(1-p)$
Poisson $\boldsymbol{P(\lambda)}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$	$\lambda > 0$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Υπεργεωμετρική	$\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x = 0, 1, \dots, n, 0 \leq k \leq N$, $1 \leq n \leq N$	$N = 1{,}2, \dots$, $n = 1{,}2, \dots$	$\frac{nk}{N}$	$n\frac{k}{N}\frac{N-k}{N}\frac{N-n}{N-1}$	
Πολυωνυμική	$\frac{n!}{x_1!\,x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$, $\quad x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$, $\quad x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, $\quad p_1, p_2, \dots, p_k > 0$, $\quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$				
Κανονική Διδιάστατη	$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} \exp\left\{-\frac{q}{2}\right\}$, $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\quad \sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\quad -1 < \rho < 1$ $q = \frac{1}{1-p^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2p\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$				

Πίνακας Α1. *Διακριτές κατανομές και πολυδιάστατες κατανομές.*

Κατανομή	*Συνάρτηση Πιθανότητας*	*Παραμετρικός χώρος*	*Μέση Τιμή* EX	*Διακύμανση* $VarX$	*Ροπογεννήτρια*
Ομοιόμορφη $U(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\beta-\alpha}$, $\alpha \le x \le \beta$	$-\infty < \alpha < b + \infty$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)t}$
Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$
Εκθετική $E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t < \lambda$
Γάμμα $G(\alpha,\beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-a}$, $t < \beta$
Βήτα $\beta(\alpha,\beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0 < x < 1$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	
Χι-τετράγωνο $\mathcal{X}_n^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$	$n = 1,2,\dots$	n	$2n$	$(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, $t < 1/2$
Cauchy	$\frac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}$, $x > 0$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$	δεν υπάρχει	δεν υπάρχει	δεν υπάρχει για $t \neq 0$
Weibull	$\frac{c}{a} x^{c-1} e^{-\frac{x^c}{a}}$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $c > 0$	$a^{\frac{1}{c}}\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$	$a^{\frac{2}{c}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)^2\right]$	δεν υπάρχει
Pareto	$\frac{a}{c}\left(\frac{c}{x}\right)^{a+1}$, $x > c$	$\alpha > 0$, $c > 0$	$c\left(1+\frac{1}{a-1}\right)$, $a > 1$	$\frac{ac^2}{(a-1)(a-2)}$, $a > 2$	δεν υπάρχει
Laplace	$\frac{1}{2a}\exp\left\{-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\sigma}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	μ	$2\sigma^2$	$\frac{e^{t\mu}}{1-\sigma^2 t^2}$

Πίνακας Α2. *Συνεχείς κατανομές*

Παράρτημα Β. Πίνακες

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Πίνακας Β1. *Πίνακας πιθανοτήτων* $P(0 < Z < z)$ *για την τυποποιημένη κανονική κατανομή* N (0, 1).

β.ε.	a=0.10	a=0.05	a=0.025	a=0.010	a=0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
37	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Πίνακας Β2. *Πίνακας t-κατανομής. Τιμές για τις οποίες* $P(t > t_{v;a}) = a$.

β.ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4118	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.1558	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2997
13	3.5650	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8193
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3194
15	4.6009	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780	32.8015
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999	34.2671
17	5.6973	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7184
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052	37.1564
19	6.8439	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5821
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663	39.9969
21	8.0336	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4009
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383	44.1814
24	9.8862	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5584
25	10.5196	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140	46.9280
26	11.1602	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416	48.2898
27	11.8077	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628	49.6450
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782	50.9936
29	13.1211	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878	52.3355
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6719
31	14.4577	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0025
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1942	49.4804	53.4857	56.3280
33	15.8152	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7754	57.6483
34	16.5013	17.7891	19.8062	21.6643	23.9522	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9637
35	17.1917	18.5089	20.5694	22.4650	24.7966	46.0588	49.8018	53.2033	57.3420	60.2746
36	17.8868	19.2326	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5811
37	18.5859	19.9603	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8926	62.8832
38	19.2888	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1620	64.1812
39	19.9958	21.4261	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4753
40	20.7066	22.1642	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908	66.7660
41	21.4208	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	52.9485	56.9424	60.5606	64.9500	68.0526
42	22.1384	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	54.0902	58.1240	61.7767	66.2063	69.3360
43	22.8596	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	55.2302	59.3035	62.9903	67.4593	70.6157
44	23.5836	25.1480	27.5745	29.7875	32.4871	56.3685	60.4809	64.2014	68.7096	71.8923
45	24.3110	25.9012	28.3662	30.6123	33.3504	57.5053	61.6562	65.4101	69.9569	73.1660
50	27.9908	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538	79.4898

Πίνακας Β3. *Πίνακας X^2-κατανομής. Τιμές για τις οποίες $P(X^2 > X^2_{n;a}) = a$.*

v_1 / v_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.91
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	2.15	2.11	2.08
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18	2.13	2.09	2.06
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03
37	4.11	3.25	2.86	2.63	2.47	2.36	2.27	2.20	2.14	2.10	2.06	2.02
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02
39	4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13	2.08	2.04	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88
100	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86

Πίνακας Β4. *Πίνακας F-κατανομής. Τιμές για τις οποίες* $P(F > F_{v1,v2;a})$ = a= 0.05.

v_2 \ v_1	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**
1	244.69	245.36	245.95	246.46	246.92	247.32	247.69	248.01	250.10	251.14	251.77	253.04
2	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55
4	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66
5	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41
6	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71
7	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27
8	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97
9	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76
10	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59
11	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46
12	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35
13	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26
14	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19
15	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12
16	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07
17	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02
18	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98
19	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94
20	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91
21	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	2.01	1.96	1.94	1.88
22	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85
23	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	1.96	1.91	1.88	1.82
24	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80
25	2.14	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.92	1.87	1.84	1.78
26	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76
27	2.10	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.88	1.84	1.81	1.74
28	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73
29	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.85	1.81	1.77	1.71
30	2.06	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70
31	2.05	2.03	2.00	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.83	1.78	1.75	1.68
32	2.04	2.01	1.99	1.97	1.95	1.94	1.92	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67
33	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.93	1.91	1.90	1.81	1.76	1.72	1.66
34	2.02	1.99	1.97	1.95	1.93	1.92	1.90	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65
35	2.01	1.99	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.88	1.79	1.74	1.70	1.63
36	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	1.90	1.88	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62
37	2.00	1.97	1.95	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.77	1.72	1.68	1.62
38	1.99	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88	1.87	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61
39	1.98	1.95	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.75	1.70	1.67	1.60
40	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59
50	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52
60	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48
70	1.86	1.84	1.81	1.79	1.77	1.75	1.74	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45
80	1.84	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43
100	1.83	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41

Πίνακας Β4 (Συνέχεια). *Πίνακας F-κατανομής. Τιμές για τις οποίες* $P(F > F_{v1,v2;a})$ = a= 0.05.

v_1 / v_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	973.0	976.7
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41
31	5.55	4.16	3.57	3.23	3.01	2.85	2.73	2.64	2.56	2.50	2.44	2.40
32	5.53	4.15	3.56	3.22	3.00	2.84	2.71	2.62	2.54	2.48	2.43	2.38
33	5.51	4.13	3.54	3.20	2.98	2.82	2.70	2.61	2.53	2.47	2.41	2.37
34	5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.40	2.35
35	5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44	2.39	2.34
36	5.47	4.09	3.50	3.17	2.94	2.78	2.66	2.57	2.49	2.43	2.37	2.33
37	5.46	4.08	3.49	3.16	2.93	2.77	2.65	2.56	2.48	2.42	2.36	2.32
38	5.45	4.07	3.48	3.15	2.92	2.76	2.64	2.55	2.47	2.41	2.35	2.31
39	5.43	4.06	3.47	3.14	2.91	2.75	2.63	2.54	2.46	2.40	2.34	2.30
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17
70	5.25	3.89	3.31	2.97	2.75	2.59	2.47	2.38	2.30	2.24	2.18	2.14
80	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21	2.16	2.11
100	5.20	3.84	3.26	2.93	2.71	2.55	2.43	2.34	2.26	2.19	2.14	2.09

Πίνακας Β5. *Πίνακας F-κατανομής. Τιμές για τις οποίες* $P(F > F_{v1,v2;a})$ = a= 0.01.

v_2 \ v_1	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**
1	979.8	982.5	984.9	986.9	988.7	990.3	991.8	993.1	1001.4	1005.6	1008.1	1013.2
2	39.42	39.43	39.43	39.44	39.44	39.44	39.45	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49
3	14.30	14.28	14.25	14.23	14.21	14.20	14.18	14.17	14.08	14.04	14.01	13.96
4	8.71	8.68	8.66	8.63	8.61	8.59	8.58	8.56	8.46	8.41	8.38	8.32
5	6.49	6.46	6.43	6.40	6.38	6.36	6.34	6.33	6.23	6.18	6.14	6.08
6	5.33	5.30	5.27	5.24	5.22	5.20	5.18	5.17	5.07	5.01	4.98	4.92
7	4.63	4.60	4.57	4.54	4.52	4.50	4.48	4.47	4.36	4.31	4.28	4.21
8	4.16	4.13	4.10	4.08	4.05	4.03	4.02	4.00	3.89	3.84	3.81	3.74
9	3.83	3.80	3.77	3.74	3.72	3.70	3.68	3.67	3.56	3.51	3.47	3.40
10	3.58	3.55	3.52	3.50	3.47	3.45	3.44	3.42	3.31	3.26	3.22	3.15
11	3.39	3.36	3.33	3.30	3.28	3.26	3.24	3.23	3.12	3.06	3.03	2.96
12	3.24	3.21	3.18	3.15	3.13	3.11	3.09	3.07	2.96	2.91	2.87	2.80
13	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.95	2.84	2.78	2.74	2.67
14	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.84	2.73	2.67	2.64	2.56
15	2.92	2.89	2.86	2.84	2.81	2.79	2.77	2.76	2.64	2.59	2.55	2.47
16	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.68	2.57	2.51	2.47	2.40
17	2.79	2.75	2.72	2.70	2.67	2.65	2.63	2.62	2.50	2.44	2.41	2.33
18	2.73	2.70	2.67	2.64	2.62	2.60	2.58	2.56	2.44	2.38	2.35	2.27
19	2.68	2.65	2.62	2.59	2.57	2.55	2.53	2.51	2.39	2.33	2.30	2.22
20	2.64	2.60	2.57	2.55	2.52	2.50	2.48	2.46	2.35	2.29	2.25	2.17
21	2.60	2.56	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.42	2.31	2.25	2.21	2.13
22	2.56	2.53	2.50	2.47	2.45	2.43	2.41	2.39	2.27	2.21	2.17	2.09
23	2.53	2.50	2.47	2.44	2.42	2.39	2.37	2.36	2.24	2.18	2.14	2.06
24	2.50	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.35	2.33	2.21	2.15	2.11	2.02
25	2.48	2.44	2.41	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30	2.18	2.12	2.08	2.00
26	2.45	2.42	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.28	2.16	2.09	2.05	1.97
27	2.43	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.13	2.07	2.03	1.94
28	2.41	2.37	2.34	2.32	2.29	2.27	2.25	2.23	2.11	2.05	2.01	1.92
29	2.39	2.36	2.32	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.09	2.03	1.99	1.90
30	2.37	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.07	2.01	1.97	1.88
31	2.36	2.32	2.29	2.26	2.24	2.22	2.20	2.18	2.06	1.99	1.95	1.86
32	2.34	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.04	1.98	1.93	1.85
33	2.33	2.29	2.26	2.23	2.21	2.19	2.17	2.15	2.03	1.96	1.92	1.83
34	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.17	2.15	2.13	2.01	1.95	1.90	1.82
35	2.30	2.27	2.23	2.21	2.18	2.16	2.14	2.12	2.00	1.93	1.89	1.80
36	2.29	2.25	2.22	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	1.99	1.92	1.88	1.79
37	2.28	2.24	2.21	2.18	2.16	2.14	2.12	2.10	1.97	1.91	1.87	1.77
38	2.27	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.09	1.96	1.90	1.85	1.76
39	2.26	2.22	2.19	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08	1.95	1.89	1.84	1.75
40	2.25	2.21	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	1.94	1.88	1.83	1.74
50	2.18	2.14	2.11	2.08	2.06	2.03	2.01	1.99	1.87	1.80	1.75	1.66
60	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.98	1.96	1.94	1.82	1.74	1.70	1.60
70	2.10	2.06	2.03	2.00	1.97	1.95	1.93	1.91	1.78	1.71	1.66	1.56
80	2.07	2.03	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.88	1.75	1.68	1.63	1.53
100	2.05	2.02	1.98	1.95	1.93	1.91	1.88	1.86	1.73	1.66	1.61	1.50

Πίνακας Β5 (Συνέχεια). *Πίνακας F-κατανομής. Τιμές για τις οποίες* $P(F > F_{v1,v2;a})$ = a= 0.01.

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
1	**0**	0.950	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050
1	**1**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	**0**	0.903	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.003
2	**1**	0.998	0.990	0.960	0.910	0.840	0.750	0.640	0.510	0.360	0.190	0.098
2	**2**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	**0**	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	0.000
3	**1**	0.993	0.972	0.896	0.784	0.648	0.500	0.352	0.216	0.104	0.028	0.007
3	**2**	1.000	0.999	0.992	0.973	0.936	0.875	0.784	0.657	0.488	0.271	0.143
3	**3**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	**0**	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.002	0.000	0.000
4	**1**	0.986	0.948	0.819	0.652	0.475	0.313	0.179	0.084	0.027	0.004	0.000
4	**2**	1.000	0.996	0.973	0.916	0.821	0.688	0.525	0.348	0.181	0.052	0.014
4	**3**	1.000	1.000	0.998	0.992	0.974	0.938	0.870	0.760	0.590	0.344	0.185
4	**4**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	**0**	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000
5	**1**	0.977	0.919	0.737	0.528	0.337	0.188	0.087	0.031	0.007	0.000	0.000
5	**2**	0.999	0.991	0.942	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.058	0.009	0.001
5	**3**	1.000	1.000	0.993	0.969	0.913	0.813	0.663	0.472	0.263	0.081	0.023
5	**4**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.672	0.410	0.226
5	**5**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	**0**	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
6	**1**	0.967	0.886	0.655	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000	0.000
6	**2**	0.998	0.984	0.901	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001	0.000
6	**3**	1.000	0.999	0.983	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016	0.002
6	**4**	1.000	1.000	0.998	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.345	0.114	0.033
6	**5**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.738	0.469	0.265
6	**6**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	**0**	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
7	**1**	0.956	0.850	0.577	0.329	0.159	0.063	0.019	0.004	0.000	0.000	0.000
7	**2**	0.996	0.974	0.852	0.647	0.420	0.227	0.096	0.029	0.005	0.000	0.000
7	**3**	1.000	0.997	0.967	0.874	0.710	0.500	0.290	0.126	0.033	0.003	0.000
7	**4**	1.000	1.000	0.995	0.971	0.904	0.773	0.580	0.353	0.148	0.026	0.004
7	**5**	1.000	1.000	1.000	0.996	0.981	0.938	0.841	0.671	0.423	0.150	0.044
7	**6**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.972	0.918	0.790	0.522	0.302
7	**7**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	**0**	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
8	**1**	0.943	0.813	0.503	0.255	0.106	0.035	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000
8	**2**	0.994	0.962	0.797	0.552	0.315	0.145	0.050	0.011	0.001	0.000	0.000
8	**3**	1.000	0.995	0.944	0.806	0.594	0.363	0.174	0.058	0.010	0.000	0.000

Πίνακας Β6. *Διωνυμική κατανομή B(n, p). Για τις τιμές των n, p, c δίνεται η* $P(X \leq c)$.

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
8	**4**	1.000	1.000	0.990	0.942	0.826	0.637	0.406	0.194	0.056	0.005	0.000
8	**5**	1.000	1.000	0.999	0.989	0.950	0.855	0.685	0.448	0.203	0.038	0.006
8	**6**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.965	0.894	0.745	0.497	0.187	0.057
8	**7**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.942	0.832	0.570	0.337
8	**8**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	**0**	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	**1**	0.929	0.775	0.436	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
9	**2**	0.992	0.947	0.738	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.000	0.000	0.000
9	**3**	0.999	0.992	0.914	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.003	0.000	0.000
9	**4**	1.000	0.999	0.980	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.020	0.001	0.000
9	**5**	1.000	1.000	0.997	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.086	0.008	0.001
9	**6**	1.000	1.000	1.000	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.262	0.053	0.008
9	**7**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.564	0.225	0.071
9	**8**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.866	0.613	0.370
9	**9**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	**0**	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	**1**	0.914	0.736	0.376	0.149	0.046	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
10	**2**	0.988	0.930	0.678	0.383	0.167	0.055	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000
10	**3**	0.999	0.987	0.879	0.650	0.382	0.172	0.055	0.011	0.001	0.000	0.000
10	**4**	1.000	0.998	0.967	0.850	0.633	0.377	0.166	0.047	0.006	0.000	0.000
10	**5**	1.000	1.000	0.994	0.953	0.834	0.623	0.367	0.150	0.033	0.002	0.000
10	**6**	1.000	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.013	0.001
10	**7**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	0.833	0.617	0.322	0.070	0.012
10	**8**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.954	0.851	0.624	0.264	0.086
10	**9**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.972	0.893	0.651	0.401
10	**10**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	**0**	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	**1**	0.898	0.697	0.322	0.113	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
11	**2**	0.985	0.910	0.617	0.313	0.119	0.033	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
11	**3**	0.998	0.981	0.839	0.570	0.296	0.113	0.029	0.004	0.000	0.000	0.000
11	**4**	1.000	0.997	0.950	0.790	0.533	0.274	0.099	0.022	0.002	0.000	0.000
11	**5**	1.000	1.000	0.988	0.922	0.753	0.500	0.247	0.078	0.012	0.000	0.000
11	**6**	1.000	1.000	0.998	0.978	0.901	0.726	0.467	0.210	0.050	0.003	0.000
11	**7**	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.887	0.704	0.430	0.161	0.019	0.002
11	**8**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.967	0.881	0.687	0.383	0.090	0.015
11	**9**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.970	0.887	0.678	0.303	0.102
11	**10**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.914	0.686	0.431
11	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	**0**	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	**1**	0.882	0.659	0.275	0.085	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	**2**	0.980	0.889	0.558	0.253	0.083	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
12	**3**	0.998	0.974	0.795	0.493	0.225	0.073	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000
12	**4**	1.000	0.996	0.927	0.724	0.438	0.194	0.057	0.009	0.001	0.000	0.000
12	**5**	1.000	0.999	0.981	0.882	0.665	0.387	0.158	0.039	0.004	0.000	0.000
12	**6**	1.000	1.000	0.996	0.961	0.842	0.613	0.335	0.118	0.019	0.001	0.000
12	**7**	1.000	1.000	0.999	0.991	0.943	0.806	0.562	0.276	0.073	0.004	0.000

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
12	**8**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.985	0.927	0.775	0.507	0.205	0.026	0.002
12	**9**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.981	0.917	0.747	0.442	0.111	0.020
12	**10**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.980	0.915	0.725	0.341	0.118
12	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.986	0.931	0.718	0.460
12	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	**0**	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	**1**	0.865	0.621	0.234	0.064	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	**2**	0.975	0.866	0.502	0.202	0.058	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
13	**3**	0.997	0.966	0.747	0.421	0.169	0.046	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000
13	**4**	1.000	0.994	0.901	0.654	0.353	0.133	0.032	0.004	0.000	0.000	0.000
13	**5**	1.000	0.999	0.970	0.835	0.574	0.291	0.098	0.018	0.001	0.000	0.000
13	**6**	1.000	1.000	0.993	0.938	0.771	0.500	0.229	0.062	0.007	0.000	0.000
13	**7**	1.000	1.000	0.999	0.982	0.902	0.709	0.426	0.165	0.030	0.001	0.000
13	**8**	1.000	1.000	1.000	0.996	0.968	0.867	0.647	0.346	0.099	0.006	0.000
13	**9**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.954	0.831	0.579	0.253	0.034	0.003
13	**10**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.942	0.798	0.498	0.134	0.025
13	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.987	0.936	0.766	0.379	0.135
13	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.945	0.746	0.487
13	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	**0**	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	**1**	0.847	0.585	0.198	0.047	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	**2**	0.970	0.842	0.448	0.161	0.040	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
14	**3**	0.996	0.956	0.698	0.355	0.124	0.029	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
14	**4**	1.000	0.991	0.870	0.584	0.279	0.090	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000
14	**5**	1.000	0.999	0.956	0.781	0.486	0.212	0.058	0.008	0.000	0.000	0.000
14	**6**	1.000	1.000	0.988	0.907	0.692	0.395	0.150	0.031	0.002	0.000	0.000
14	**7**	1.000	1.000	0.998	0.969	0.850	0.605	0.308	0.093	0.012	0.000	0.000
14	**8**	1.000	1.000	1.000	0.992	0.942	0.788	0.514	0.219	0.044	0.001	0.000
14	**9**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.910	0.721	0.416	0.130	0.009	0.000
14	**10**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.876	0.645	0.302	0.044	0.004
14	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.960	0.839	0.552	0.158	0.030
14	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.953	0.802	0.415	0.153
14	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.956	0.771	0.512
14	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
15	**0**	0.463	0.206	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	**1**	0.829	0.549	0.167	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	**2**	0.964	0.816	0.398	0.127	0.027	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	**3**	0.995	0.944	0.648	0.297	0.091	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
15	**4**	0.999	0.987	0.836	0.515	0.217	0.059	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000
15	**5**	1.000	0.998	0.939	0.722	0.403	0.151	0.034	0.004	0.000	0.000	0.000
15	**6**	1.000	1.000	0.982	0.869	0.610	0.304	0.095	0.015	0.001	0.000	0.000
15	**7**	1.000	1.000	0.996	0.950	0.787	0.500	0.213	0.050	0.004	0.000	0.000
15	**8**	1.000	1.000	0.999	0.985	0.905	0.696	0.390	0.131	0.018	0.000	0.000
15	**9**	1.000	1.000	1.000	0.996	0.966	0.849	0.597	0.278	0.061	0.002	0.000
15	**10**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.941	0.783	0.485	0.164	0.013	0.001
15	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.909	0.703	0.352	0.056	0.005
15	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.973	0.873	0.602	0.184	0.036

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
15	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.833	0.451	0.171
15	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.794	0.537
15	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

16	**0**	0.440	0.185	0.028	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	**1**	0.811	0.515	0.141	0.026	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	**2**	0.957	0.789	0.352	0.099	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	**3**	0.993	0.932	0.598	0.246	0.065	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
16	**4**	0.999	0.983	0.798	0.450	0.167	0.038	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
16	**5**	1.000	0.997	0.918	0.660	0.329	0.105	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000
16	**6**	1.000	0.999	0.973	0.825	0.527	0.227	0.058	0.007	0.000	0.000	0.000
16	**7**	1.000	1.000	0.993	0.926	0.716	0.402	0.142	0.026	0.001	0.000	0.000
16	**8**	1.000	1.000	0.999	0.974	0.858	0.598	0.284	0.074	0.007	0.000	0.000
16	**9**	1.000	1.000	1.000	0.993	0.942	0.773	0.473	0.175	0.027	0.001	0.000
16	**10**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.895	0.671	0.340	0.082	0.003	0.000
16	**11**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.962	0.833	0.550	0.202	0.017	0.001
16	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.935	0.754	0.402	0.068	0.007
16	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.901	0.648	0.211	0.043
16	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.974	0.859	0.485	0.189
16	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.972	0.815	0.560
16	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

17	**0**	0.418	0.167	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
17	**1**	0.792	0.482	0.118	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
17	**2**	0.950	0.762	0.310	0.077	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
17	**3**	0.991	0.917	0.549	0.202	0.046	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
17	**4**	0.999	0.978	0.758	0.389	0.126	0.025	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
17	**5**	1.000	0.995	0.894	0.597	0.264	0.072	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
17	**6**	1.000	0.999	0.962	0.775	0.448	0.166	0.035	0.003	0.000	0.000	0.000
17	**7**	1.000	1.000	0.989	0.895	0.641	0.315	0.092	0.013	0.000	0.000	0.000
17	**8**	1.000	1.000	0.997	0.960	0.801	0.500	0.199	0.040	0.003	0.000	0.000
17	**9**	1.000	1.000	1.000	0.987	0.908	0.685	0.359	0.105	0.011	0.000	0.000
17	**10**	1.000	1.000	1.000	0.997	0.965	0.834	0.552	0.225	0.038	0.001	0.000
17	**11**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.928	0.736	0.403	0.106	0.005	0.000
17	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.975	0.874	0.611	0.242	0.022	0.001
17	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.954	0.798	0.451	0.083	0.009
17	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.923	0.690	0.238	0.050
17	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.882	0.518	0.208
17	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.833	0.582
17	**17**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

18	**0**	0.397	0.150	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**1**	0.774	0.450	0.099	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**2**	0.942	0.734	0.271	0.060	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**3**	0.989	0.902	0.501	0.165	0.033	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**4**	0.998	0.972	0.716	0.333	0.094	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**5**	1.000	0.994	0.867	0.534	0.209	0.048	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
18	**6**	1.000	0.999	0.949	0.722	0.374	0.119	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000
18	**7**	1.000	1.000	0.984	0.859	0.563	0.240	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000
18	**8**	1.000	1.000	0.996	0.940	0.737	0.407	0.135	0.021	0.001	0.000	0.000

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
18	**9**	1.000	1.000	0.999	0.979	0.865	0.593	0.263	0.060	0.004	0.000	0.000
18	**10**	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.760	0.437	0.141	0.016	0.000	0.000
18	**11**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.980	0.881	0.626	0.278	0.051	0.001	0.000
18	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.952	0.791	0.466	0.133	0.006	0.000
18	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.985	0.906	0.667	0.284	0.028	0.002
18	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.967	0.835	0.499	0.098	0.011
18	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.940	0.729	0.266	0.058
18	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.901	0.550	0.226
18	**17**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.850	0.603
18	**18**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

19	**0**	0.377	0.135	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**1**	0.755	0.420	0.083	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**2**	0.933	0.705	0.237	0.046	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**3**	0.987	0.885	0.455	0.133	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**4**	0.998	0.965	0.673	0.282	0.070	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**5**	1.000	0.991	0.837	0.474	0.163	0.032	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
19	**6**	1.000	0.998	0.932	0.666	0.308	0.084	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000
19	**7**	1.000	1.000	0.977	0.818	0.488	0.180	0.035	0.003	0.000	0.000	0.000
19	**8**	1.000	1.000	0.993	0.916	0.667	0.324	0.088	0.011	0.000	0.000	0.000
19	**9**	1.000	1.000	0.998	0.967	0.814	0.500	0.186	0.033	0.002	0.000	0.000
19	**10**	1.000	1.000	1.000	0.989	0.912	0.676	0.333	0.084	0.007	0.000	0.000
19	**11**	1.000	1.000	1.000	0.997	0.965	0.820	0.512	0.182	0.023	0.000	0.000
19	**12**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.916	0.692	0.334	0.068	0.002	0.000
19	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.968	0.837	0.526	0.163	0.009	0.000
19	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.930	0.718	0.327	0.035	0.002
19	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.867	0.545	0.115	0.013
19	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.954	0.763	0.295	0.067
19	**17**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.917	0.580	0.245
19	**18**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.865	0.623
19	**19**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

20	**0**	0.358	0.122	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**1**	0.736	0.392	0.069	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**2**	0.925	0.677	0.206	0.035	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**3**	0.984	0.867	0.411	0.107	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**4**	0.997	0.957	0.630	0.238	0.051	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**5**	1.000	0.989	0.804	0.416	0.126	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**6**	1.000	0.998	0.913	0.608	0.250	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
20	**7**	1.000	1.000	0.968	0.772	0.416	0.132	0.021	0.001	0.000	0.000	0.000
20	**8**	1.000	1.000	0.990	0.887	0.596	0.252	0.057	0.005	0.000	0.000	0.000
20	**9**	1.000	1.000	0.997	0.952	0.755	0.412	0.128	0.017	0.001	0.000	0.000
20	**10**	1.000	1.000	0.999	0.983	0.872	0.588	0.245	0.048	0.003	0.000	0.000
20	**11**	1.000	1.000	1.000	0.995	0.943	0.748	0.404	0.113	0.010	0.000	0.000
20	**12**	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	0.584	0.228	0.032	0.000	0.000
20	**13**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.750	0.392	0.087	0.002	0.000
20	**14**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.874	0.584	0.196	0.011	0.000
20	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.370	0.043	0.003
20	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.589	0.133	0.016
20	**17**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.794	0.323	0.075

		p										
n	***c***	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
20	**18**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.931	0.608	0.264
20	**19**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.878	0.642
20	**20**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
25	**0**	0.277	0.072	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**1**	0.642	0.271	0.027	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**2**	0.873	0.537	0.098	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**3**	0.966	0.764	0.234	0.033	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**4**	0.993	0.902	0.421	0.090	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**5**	0.999	0.967	0.617	0.193	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**6**	1.000	0.991	0.780	0.341	0.074	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**7**	1.000	0.998	0.891	0.512	0.154	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**8**	1.000	1.000	0.953	0.677	0.274	0.054	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**9**	1.000	1.000	0.983	0.811	0.425	0.115	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000
25	**10**	1.000	1.000	0.994	0.902	0.586	0.212	0.034	0.002	0.000	0.000	0.000
25	**11**	1.000	1.000	0.998	0.956	0.732	0.345	0.078	0.006	0.000	0.000	0.000
25	**12**	1.000	1.000	1.000	0.983	0.846	0.500	0.154	0.017	0.000	0.000	0.000
25	**13**	1.000	1.000	1.000	0.994	0.922	0.655	0.268	0.044	0.002	0.000	0.000
25	**14**	1.000	1.000	1.000	0.998	0.966	0.788	0.414	0.098	0.006	0.000	0.000
25	**15**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.987	0.885	0.575	0.189	0.017	0.000	0.000
25	**16**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.946	0.726	0.323	0.047	0.000	0.000
25	**17**	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.978	0.846	0.488	0.109	0.002	0.000
25	**18**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.926	0.659	0.220	0.009	0.000
25	**19**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.971	0.807	0.383	0.033	0.001
25	**20**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.910	0.579	0.098	0.007
25	**21**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.967	0.766	0.236	0.034
25	**22**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.902	0.463	0.127
25	**23**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.973	0.729	0.358
25	**24**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.928	0.723
25	**25**	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Πίνακας Β6 (Συνέχεια). *Διωνυμική κατανομή B(n, p). Για τις τιμές των n, p, c δίνεται η $P(X \leq c)$.*

	λ									
c	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**	**1.00**
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ									
c	**1.10**	**1.20**	**1.30**	**1.40**	**1.50**	**1.60**	**1.70**	**1.80**	**1.90**	**2.00**
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3	0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4	0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ									
c	**2.10**	**2.20**	**2.30**	**2.40**	**2.50**	**2.60**	**2.70**	**2.80**	**2.90**	**3.00**
0	0.122	0.111	0.100	0.091	0.082	0.074	0.067	0.061	0.055	0.050
1	0.380	0.355	0.331	0.308	0.287	0.267	0.249	0.231	0.215	0.199
2	0.650	0.623	0.596	0.570	0.544	0.518	0.494	0.469	0.446	0.423
3	0.839	0.819	0.799	0.779	0.758	0.736	0.714	0.692	0.670	0.647
4	0.938	0.928	0.916	0.904	0.891	0.877	0.863	0.848	0.832	0.815
5	0.980	0.975	0.970	0.964	0.958	0.951	0.943	0.935	0.926	0.916
6	0.994	0.993	0.991	0.988	0.986	0.983	0.979	0.976	0.971	0.966
7	0.999	0.998	0.997	0.997	0.996	0.995	0.993	0.992	0.990	0.988
8	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ									
c	**3.10**	**3.20**	**3.30**	**3.40**	**3.50**	**3.60**	**3.70**	**3.80**	**3.90**	**4.00**
0	0.045	0.041	0.037	0.033	0.030	0.027	0.025	0.022	0.020	0.018
1	0.185	0.171	0.159	0.147	0.136	0.126	0.116	0.107	0.099	0.092
2	0.401	0.380	0.359	0.340	0.321	0.303	0.285	0.269	0.253	0.238
3	0.625	0.603	0.580	0.558	0.537	0.515	0.494	0.473	0.453	0.433
4	0.798	0.781	0.763	0.744	0.725	0.706	0.687	0.668	0.648	0.629
5	0.906	0.895	0.883	0.871	0.858	0.844	0.830	0.816	0.801	0.785

Πίνακας Β7. *Κατανομή Poisson $P(\lambda)$. Για τις τιμές των λ, c δίνεται η $P(X \leq c)$.*

	λ									
c	**3.10**	**3.20**	**3.30**	**3.40**	**3.50**	**3.60**	**3.70**	**3.80**	**3.90**	**4.00**
6	0.961	0.955	0.949	0.942	0.935	0.927	0.918	0.909	0.899	0.889
7	0.986	0.983	0.980	0.977	0.973	0.969	0.965	0.960	0.955	0.949
8	0.995	0.994	0.993	0.992	0.990	0.988	0.986	0.984	0.981	0.979
9	0.999	0.998	0.998	0.997	0.997	0.996	0.995	0.994	0.993	0.992
10	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998	0.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ											
c	**4.50**	**5.00**	**5.50**	**6.00**	**6.50**	**7.00**	**7.50**	**8.00**	**8.50**	**9.00**	**9.50**	**10.00**
0	0.011	0.007	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.061	0.040	0.027	0.017	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
2	0.174	0.125	0.088	0.062	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003
3	0.342	0.265	0.202	0.151	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010
4	0.532	0.440	0.358	0.285	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029
5	0.703	0.616	0.529	0.446	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067
6	0.831	0.762	0.686	0.606	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130
7	0.913	0.867	0.809	0.744	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220
8	0.960	0.932	0.894	0.847	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333
9	0.983	0.968	0.946	0.916	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458
10	0.993	0.986	0.975	0.957	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583
11	0.998	0.995	0.989	0.980	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697
12	0.999	0.998	0.996	0.991	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792
13	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864
14	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917
15	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	λ											
c	**11,00**	**12,00**	**13,00**	**14,00**	**15,00**	**16,00**	**17,00**	**18,00**	**19,00**	**20,00**	**21,00**	**22,00**
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,005	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,015	0,008	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,038	0,020	0,011	0,006	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,079	0,046	0,026	0,014	0,008	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
7	0,143	0,090	0,054	0,032	0,018	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000
8	0,232	0,155	0,100	0,062	0,037	0,022	0,013	0,007	0,004	0,002	0,001	0,001

	λ											
c	**11,00**	**12,00**	**13,00**	**14,00**	**15,00**	**16,00**	**17,00**	**18,00**	**19,00**	**20,00**	**21,00**	**22,00**
9	0,341	0,242	0,166	0,109	0,070	0,043	0,026	0,015	0,009	0,005	0,003	0,002
10	0,460	0,347	0,252	0,176	0,118	0,077	0,049	0,030	0,018	0,011	0,006	0,004
11	0,579	0,462	0,353	0,260	0,185	0,127	0,085	0,055	0,035	0,021	0,013	0,008
12	0,689	0,576	0,463	0,358	0,268	0,193	0,135	0,092	0,061	0,039	0,025	0,015
13	0,781	0,682	0,573	0,464	0,363	0,275	0,201	0,143	0,098	0,066	0,043	0,028
14	0,854	0,772	0,675	0,570	0,466	0,368	0,281	0,208	0,150	0,105	0,072	0,048
15	0,907	0,844	0,764	0,669	0,568	0,467	0,371	0,287	0,215	0,157	0,111	0,077
16	0,944	0,899	0,835	0,756	0,664	0,566	0,468	0,375	0,292	0,221	0,163	0,117
17	0,968	0,937	0,890	0,827	0,749	0,659	0,564	0,469	0,378	0,297	0,227	0,169
18	0,982	0,963	0,930	0,883	0,819	0,742	0,655	0,562	0,469	0,381	0,302	0,232
19	0,991	0,979	0,957	0,923	0,875	0,812	0,736	0,651	0,561	0,470	0,384	0,306
20	0,995	0,988	0,975	0,952	0,917	0,868	0,805	0,731	0,647	0,559	0,471	0,387
21	0,998	0,994	0,986	0,971	0,947	0,911	0,861	0,799	0,725	0,644	0,558	0,472
22	0,999	0,997	0,992	0,983	0,967	0,942	0,905	0,855	0,793	0,721	0,640	0,556
23	1,000	0,999	0,996	0,991	0,981	0,963	0,937	0,899	0,849	0,787	0,716	0,637
24	1,000	0,999	0,998	0,995	0,989	0,978	0,959	0,932	0,893	0,843	0,782	0,712
25	1,000	1,000	0,999	0,997	0,994	0,987	0,975	0,955	0,927	0,888	0,838	0,777
26	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,985	0,972	0,951	0,922	0,883	0,832
27	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,991	0,983	0,969	0,948	0,917	0,877
28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,990	0,980	0,966	0,944	0,913
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,994	0,988	0,978	0,963	0,940
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,997	0,993	0,987	0,976	0,959
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,992	0,985	0,973
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,991	0,983
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,994	0,989
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,997	0,994
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998
37	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999
38	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
39	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
40	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Πίνακας Β7 (Συνέχεια). *Κατανομή Poisson P(λ). Για τις τιμές των λ, c δίνεται η P(X ≤ c).*

	p									
x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500
1	0.048	0.090	0.128	0.160	0.188	0.210	0.228	0.240	0.248	0.250
2	0.043	0.075	0.097	0.113	0.124	0.131	0.136	0.139	0.140	0.141
3	0.038	0.059	0.071	0.079	0.083	0.086	0.088	0.089	0.089	0.089
4	0.032	0.046	0.053	0.057	0.059	0.060	0.061	0.061	0.061	0.061
5	0.027	0.037	0.040	0.042	0.043	0.044	0.044	0.045	0.045	0.045
6	0.023	0.029	0.032	0.033	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
7	0.020	0.024	0.025	0.026	0.026	0.026	0.027	0.027	0.027	0.027
8	0.017	0.020	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021	0.021
9	0.014	0.016	0.017	0.017	0.017	0.018	0.018	0.018	0.018	0.018
10	0.012	0.014	0.014	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015
11	0.011	0.012	0.012	0.012	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013
12	0.010	0.010	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011
13	0.008	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009
14	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008
15	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007
16	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
17	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
18	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
19	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
20	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
21	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
22	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
23	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
24	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
25	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
26	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
27	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
28	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
29	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
30	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
31	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
32	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
33	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
34	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
35	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
36	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
37	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
38	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
39	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
40	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001

Πίνακας Β8. *Γεωμετρική Κατανομή. Για τις τιμές των x, p δίνεται η P(X = x).*

	p								
x	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950
1	0,248	0,240	0,228	0,210	0,188	0,160	0,128	0,090	0,047
2	0,140	0,139	0,136	0,131	0,124	0,113	0,097	0,075	0,043
3	0,089	0,089	0,088	0,086	0,083	0,079	0,071	0,059	0,038
4	0,061	0,061	0,061	0,060	0,059	0,057	0,053	0,046	0,032
5	0,045	0,045	0,044	0,044	0,043	0,042	0,040	0,037	0,027
6	0,034	0,034	0,034	0,034	0,033	0,033	0,032	0,029	0,023
7	0,027	0,027	0,027	0,026	0,026	0,026	0,025	0,024	0,020
8	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,020	0,017
9	0,018	0,018	0,018	0,018	0,017	0,017	0,017	0,016	0,014
10	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,012
11	0,013	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,012	0,011
12	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010
13	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008
14	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007
15	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
16	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006
17	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005
18	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
19	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,004
20	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
21	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
22	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003
23	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
24	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
25	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
26	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
27	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
28	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
29	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
30	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
31	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
32	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
33	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
34	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
35	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
36	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
37	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
38	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
39	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
40	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Πίνακας Β8 (Συνέχεια). *Γεωμετρική Κατανομή. Για τις τιμές των x, p δίνεται η P(X = x).*