Απειροστικος Λογισμος

Προχειρες Σημειωσεις

Σ.Κ. ΠΗΧΩΡΙΔΗΣ

Απειροστικος Λογισμος

Προχειρες Σημειωσεις

Κρήτη 1986 – Αθήνα 1996 – Σάμος 2006

Απειροστικός Λογισμός—Πρόχειρες Σημειώσεις. Σ. Πηχωρίδης

Στοιχειοθεσία LaTeX 2_ε.

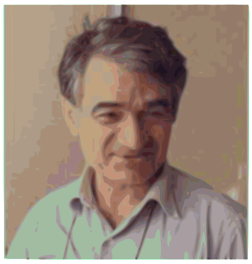
Γραμματοσειρά «Τάλως».

Διαγράμματα με το Dia

Συνεργάστηκαν οι Αγαθοκλέους Ντόλι, Βάππας Κωνσταντίνος, Βασιλειάδης Γιώργος, Γεωργουλάκη Ζαμπία, Γιαννουτάκης Κ., Δασκαλοπούλου Χρ., Διδαγγέλου Νίκη, Δουλάμη Ηλέκτρα, Ιακώβου Μόρφω, Κλεισιάρης Χρ., Λάιος Γιώργος, Λεντούδη Παναγιώτα, Μαράκος Κωνσταντίνος, Παλυόλυρα Ελένη, Παναγιωτάκης Ιωάννης, Πετροπούλου Σταυρούλα, Σαπέρας Νικόλας, Σγουρέλλη Δέσποινα, Σπιτιέρης Ροζάριος, Σπύρου Ελένη, Τζήμα Ευαγγελία, Τζιάτζιος Νικόλας, Τσακουμάγκος Κωνσταντίνος, Τσαντάκης Βασίλης.

Περιεχομενα

Βιογραφικό Σημείωμα



Ο Στυλιανός Κ. Πηχωρίδης γεννήθηκε στην Αθήνα στις 18 Οκτωβρίου 1940. Το 1963 πήρε το δίπλωμα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού από το ΕΜΠ. Από το 1968 μέχρι το 1971 έκανε μεταπτυχιακές σπουδές στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Σικάγου, όπου και εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή με την επίβλεψη του A. Zygmund.

Από το 1972 μέχρι το 1983 εργάστηκε ως ερευνητής στο ΚΠΕ Δημόκριτος.

Από το 1983 και μετά διετέλεσε καθηγητής του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Το 1991 εκλέχτηκε καθηγητής του νεοσύστατου Πανεπιστημίου της Κύπρου, στο οποίο όμως παρέμεινε μόνο κατά το ακαδημαϊκό έτος 1991–1992.

Κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής σταδιοδρομίας του δίδαξε ως επισκέπτης καθηγητής σε διάφορα πανεπιστήμια της Γαλλίας και των ΗΠΑ.

Το κύριο ερευνητικό του έργου αφορά την κλασική αρμονική ανάλυση και ιδιαίτερα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και την συζυγή συνάρτηση.

Το 1980 του απονεμήθηκε το διεθνές μαθηματικό βραβείο «PRIX SALEM».

Πέθανε στις 18 Ιουνίου του 1992 στη Μαδρίτη κατά την διάρκεια διεθνούς συνεδρίου Αρμονικής Ανάλυσης.

Σημείωμα των επιμελητών

Το 2002 στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου δόθηκε το μάθημα LaTeX και Postscript. Μετά από συνεννόηση με την Χρυσάνθη Πηχωρίδου (αδερφή του Στέλιου Πηχωρίδη) επιλέξαμε να δώσουμε στους φοιτητές για εξάσκηση την αντιγραφή των σημειώσεων στον Απειροστικό Λογισμό του Στέλιου Πηχωρίδη. Συνεργάστηκαν πολλοί φοιτητές και γράφτηκε το μεγαλύτερο μέρος του κειμένου.

Από εκείνο το σημείο έπρεπε να γίνουν διάφορα πράγματα:

- να διορθωθεί ο κώδικας που είχαν γράψει οι φοιτητές ο οποίος, όπως ήταν φυσικό, είχε πολλά TEXνικά λάθη,
- να συμπληρωθούν όσα κομμάτια δεν είχαν αντιγραφεί,
- να κατασκευαστούν τα σχήματα σε ηλεκτρονική μορφή,
- να σχεδιαστεί (TEXνικά) η παρούσα έκδοση,
- να κατασκευαστεί η γραμματοσειρά που θα χρησιμοποιούσαμε,
- να γίνει αντιπαραβολή του κειμένου με το πρωτότυπο.

Τα δυο τελευταία αποτελούσαν και το δυσκολότερο μέρος του εγχειρήματος.

Η αντιπαραβολή έγινε γραμμή-γραμμή με το πρωτότυπο κείμενο όπως αυτό εμφανίζεται στην πρώτη χειρόγραφη έκδοση από τις Εκδόσεις *Σύγχρονη Εποχή*. Γλωσσικές αλλαγές δεν έγιναν. Έγιναν όμως αλλαγές που σχετίζονται με την ορθογραφία και το συντακτικό καθώς και αλλαγή των περισσοτέρων συντμήσεων σε πλήρεις εκφράσεις («για παράδειγμα» αντί για «π.χ.», κ.λπ.).

Έγιναν επίσης μερικές (λίγες) επεμβάσεις στο μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου. Συγκεκριμένα όσα (προφανή) λάθη εντοπίσαμε κατά την αντιπαραβολή με το πρωτότυπο τα διορθώσαμε. Για παράδειγμα, στο κεφάλαιο 7 ο ορισμός του πεπερασμένου συνόλου δεν ήταν σωστός. Το πρωτότυπο έγραφε ότι ένα σύνολο είναι πεπερασμένο αν είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών (δες πρωτότυπο).

Όταν ο Στέλιος Πηχωρίδης σταμάτησε τη δακτυλογράφηση των σημειώσεών του, εμφανίστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Κρήτης ο πρώτος ίσως υπολογιστής στην Ελλάδα που έτρεχε το πρόγραμμα TEX με μερική (αλλά σε ικανοποιητικό βαθμό) υποστήριξη για τα ελληνικά. Το μηχάνημα, ένα VMS, ονομαζόταν Τάλως και οι χρήστες εργαζόταν σε αυτό μέσω των λεγόμενων «dummy terminals». Για τα αγγλικά το TEX χρησιμοποιούσε τις γραμματοσειρές του Knuth αλλά για τα ελληνικά είχε μια πολύ ιδιαίτερη γραμματοσειρά. Το μηχάνημα, και η εγκατάσταση του TEX που είχε, ήταν σε χρήση μέχρι το 1998, οπότε και αποσύρθηκε. Σε αυτό το μηχάνημα, με την ιδιαίτερη εκείνη γραμματοσειρά για τα ελληνικά, γράφτηκαν πολλές εργασίες (για παράδειγμα φοιτητών) όπως και σημειώσεις από τους διδάσκοντες. Είμαστε σίγουροι πως πολλοί συνάδελφοι έχουν ακόμα εκτυπώσεις από τον Τάλω.

Για ιστορικούς λόγους λοιπόν αποφασίσαμε τις σημειώσεις του Στέλιου Πηχωρίδη να τις αναπαραγάγουμε με εκείνη τη γραμματοσειρά. Η γραμματοσειρά αυτή έχει χαθεί. Έτσι έπρεπε να επανασχεδιαστεί από την αρχή με βάση εκτυπώσεις από τον Τάλω που είχαμε κρατήσει. Εκτός όμως από την μερική υποστήριξη που παρείχε, της προσθέσαμε διάφορα πράγματα που έλλειπαν, όπως τονισμένα κεφαλαία, πεζοκεφαλαία κ.α.

Οι σημειώσεις του Στέλιου Πηχωρίδη χρησιμοποιήθηκαν για αρκετά χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, για την διδασκαλία του μαθήματος του *Απειροστικού Λογισμού*, και μια ολόκληρη γενιά αποφοίτων του Πανεπιστημίου Κρήτης, είχαν μια πρώτη επαφή με την αυστηρή *Ανάλυση*, μέσα από τις σελίδες αυτών των σημειώσεων.

Σήμερα λοιπόν παρουσιάζουμε αυτό το κείμενο όπως νομίζουμε ότι θα το είχε παρουσιάσει εκείνος αν ζούσε και μετέφερε τα αρχεία του στον Τάλω. Ελπίζουμε ότι εκτός από την, ιδιότυπη ίσως, απόδοση τιμής στη μνήμη του, οι σημειώσεις αυτές στην νέα, και ίσως πιο ελκυστική μορφή τους, θα αποτελέσουν ουσιαστικό βοήθημα για τους νεώτερους μαθηματικούς.

Αριστείδης Κοντογεώργης Αντώνης Τσολομύτης	Καρλόβασι, Σάμος 2006.

Σημείωμα των επιμελητών της πρώτης έκδοσης[1]

Ο Στέλιος Πηχωρίδης (1940–1992) ήλθε στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το 1983. Υπήρξε καθηγητής του Μαθηματικού τμήματος, στο οποίο δίδασκε κάθε εξάμηνο και από ένα διαφορετικό μάθημα.

Για πολλά από αυτά τα μαθήματα (και ιδιαίτερα για τα μαθήματα της Ανάλυσης) έγραψε διδακτικές σημειώσεις, μερικές από τις οποίες χρησιμοποιούνται ακόμη από άλλους διδάσκοντες, αλλά όχι συστηματικά. Εξαίρεση αποτελούν οι «πρόχειρες σημειώσεις» που έγραψε ο Στέλιος την άνοιξη του 1985 για το μάθημα «Απειροστικός Λογισμός Ι» και καθιερώθηκαν από τότε ως ένα από τα βασικά βοηθήματα των πρωτοετών φοιτητών τόσο του Μαθηματικού Τμήματος, όσο και του τμήματος της Επιστήμης των Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Μάλιστα, από όσο γνωρίζουμε, τις ίδιες σημειώσεις χρησιμοποιούν και στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κύπρου.

Ας τονίσουμε, όμως, εδώ ότι και ο ίδιος ο Στέλιος τις σημειώσεις αυτές τις φρόντισε ιδιαίτερα από την αρχή. Μ' αυτό εννοούμε ότι είναι οι μόνες σημειώσεις του, για τις οποίες θέλησε να αντικαταστήσει το αρχικό του χειρόγραφο με ένα πιο ευπαρουσίαστο κείμενο (ο ίδιος δεν θεωρούσε τα γράμματα του ευανάγνωστα και ο αναγνώστης μπορεί να κρίνει μόνος του από μερικές ασκήσεις που, εκ των υστέρων, πρόσθεσε ο Στέλιος σε κάποια κεφάλαια).

Έτσι άρχισε να δακτυλογραφεί μόνος του τα χειρόγραφα, αλλά οι δυσκολίες που συνάντησε τον ανάγκασαν, μετά τις 29 πρώτες σελίδες να σταματήσει.

Το υπόλοιπο κείμενο γράφτηκε από τη Γιάννα Κυρέζη, υποψήφια φοιτήτρια τότε του Μαθηματικού Τμήματος, η οποία αντέγραψε με τον ωραίο γραφικό χαρακτήρα τις ιδιόχειρες σημειώσεις του Στέλιου.

Παρά την επιμέλεια, όμως, και την φροντίδα με την οποία ο Στέλιος ετοίμαζε τις σημειώσεις του, ουδέποτε συμφώνησε να εκδώσει σε βιβλίο κάποιες από αυτές. Η απάντηση του στις προτροπές πολλών συναδέλφων του ήταν πάντοτε η εξής: «Αυτές δεν είναι ούτε καν σημειώσεις. Είναι πρόχειρες σημειώσεις. Είναι γραμμένες αναγκαστικά σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα και ακολουθούν υποχρεωτικά το περιεχόμενο και τους στόχους, που την στιγμή αυτή πρόβλεπε ο Οδηγός Σπουδών μας. Αν κάποτε έχω τον χρόνο και αποφασίσω

[1]Εκδόσεις *Σύγχρονη Εποχή*, 1996

να γράψω ένα βιβλίο για παράδειγμα για τον Απειροστικό Λογισμό, δεν είμαι καθόλου σίγουρος ότι θα μοιάζει και πολύ με τις τωρινές μου σημειώσεις»

Δυστυχώς, η ζωή δεν έδωσε στον Στέλιο την ευκαιρία αυτή. Μας έμειναν μόνο οι «πρόχειρες σημειώσεις» του.

Έτσι, στην Ημερίδα που διοργάνωσε το Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στις 7 Μαΐου 1993, στην μνήμη του Στέλιου, διατυπώθηκε από πολλούς η άποψη να εκδοθούν σε βιβλίο τουλάχιστον οι σημειώσεις του Απειροστικού Λογισμού.

Όλοι συμφώνησαν για μια τέτοια έκδοση και μάλιστα έδωσαν στον Μανόλη Κατσοπρινάκη αρκετές παρατηρήσεις τους, για κάποιες παραλήψεις, αβλεψίες και διευκρινίσεις που κατά την γνώμη τους έπρεπε να μπουν στο κείμενο.

Με αυτό τον τρόπο, όμως, μαζεύτηκαν (εκτός από κάποιες ουσιαστικές διορθώσεις, που έπρεπε να γίνουν και τις περισσότερες από τις οποίες τις γνώριζε ήδη και ο Στέλιος) από την μία αρκετές ακόμα επεξηγήσεις και λεπτομέρειες, και από την άλλη ένας μεγάλος αριθμός ασκήσεων, που η ενσωμάτωσή τους μέσα στο κείμενο θα άλλαζε αρκετά το ύφος του συγγραφέα.

Για τον λόγω αυτό αποφασίσαμε να εκδοθεί τώρα το πρωτότυπο κείμενο, αφού κάναμε μόνο μερικές απαραίτητες διορθώσεις σε αυτό, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να διαβαστεί και ταυτόχρονα να φαίνονται τα σημεία όπου έγιναν οι διορθώσεις. Για διευκόλυνση του αναγνώστη προσθέσαμε περιεχόμενα με βάση τους τίτλους του κειμένου. Έτσι, παραδίνουμε στον καλοπροαίρετο αναγνώστη φωτογραφική μεταφορά του πρωτοτύπου κειμένου, ελπίζοντας να μας συγχωρέσει για όσες άλλες διορθώσεις διαπιστώσει ότι δεν κάναμε. Ο ίδιος ο Στέλιος έβαζε πρώτη άσκηση στους φοιτητές του να του βρουν όσο γίνεται περισσότερα σφάλματα («λάθη», όπως έλεγε) στις σημειώσεις του.

Μια τέτοια έκδοση, χωρίς ιδιαίτερα πολλές μεταβολές και αλλοιώσεις του αρχικού κειμένου, ανταποκρίνεται και σε επιθυμία της αδελφής του Στέλιου, Χρυσάνθης Πηχωρίδου, η οποία και ανέλαβε να την προωθήσει. Ας ευχηθούμε ότι μελλοντικά θα παρουσιαστεί μια έκδοση βελτιωμένη και επιμελημένη, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των συναδέλφων που δίδαξαν αυτές τις σημειώσεις.

Δεκέμβριος 1995
Οι μαθητές του Στέλιου Πηχωρίδη
Μανόλης Κατσοπρινάκης και Σταύρος Παπαδόπουλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός του μέρους του Απειροστικού Λογισμού με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι η μελέτη ορισμένων βασικών ιδιοτήτων των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.

Στους περισσότερους κλάδους των Μαθηματικών αρχίζουμε με τη μελέτη ενός βασικού συνόλου, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις, τις οποίες δεχόμαστε αξιωματικά. Στη συνέχεια προχωρούμε στη μελέτη συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται σε κατάλληλα υποσύνολα του βασικού αυτού συνόλου. Στον Απειροστικό Λογισμό το βασικό σύνολο είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε δύο παρατηρήσεις :

(i) Ιστορικά η ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, καθώς και των περισσοτέρων άλλων κλάδων των Μαθηματικών, δεν έγινε με αυτό τον τρόπο. Αν και η αξιωματική μέθοδος στα Μαθηματικά πρωτοεμφανίστηκε από τους κλασσικούς χρόνους (και παρέμεινε σαν μέθοδος στα Μαθηματικά ουσιαστικά μοναδική),η «αξιωματικοποίηση» του Απειροστικού Λογισμού επιτεύχθηκε μόλις στο τέλος του περασμένου αιώνα.

(ii) Τόσο το βασικό σύνολο όσο και οι κλάσεις συναρτήσεων που μελετάμε στους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών μέχρι σήμερα, έχουν άμεση σχέση τόσο με άλλους κλάδους των Μαθηματικών όσο και με άλλες επιστήμες. Π.χ. τα πρώτα ίχνη του Απειροστικού Λογισμού στην κλασσική εποχή ήταν άμεσα συνδεδεμένα με τη Γεωμετρία (μήκος περιφέρειας, εμβαδά και όγκοι γεωμετρικών σχημάτων κ.λ.π.) Η σημαντική ανάπτυξη που γνώρισε ο κλάδος μετά την Αναγέννηση υπαγορεύτηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό από ανάγκες Φυσικών Επιστημών (Αστρονομία, Μηχανική,...).

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο Απειροστικός Λογισμός αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιστημονικά επιτεύγματα του ανθρώπου. Ξεκινώντας από διαισθητικά απλές και γενικά παραδεκτές αρχές, πετυχαίνει μια σύνθεση που προκαλεί θαυμασμό τόσο για τη λογική ενότητά της όσο και για τον πλούτο των αποτελεσμάτων της. Οι εφαρμογές του και η αλληλεπίδραση με άλλους κλάδους της επιστήμης, σε ολοένα και αυξανόμενο ρυθμό, είναι αναρίθμητες και αναντικατάστατες.

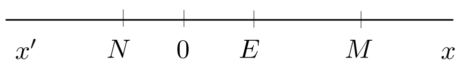
Είναι απολύτως απαραίτητο να κατανοήσει ο νεοεισαγόμενος στο θέμα και τις δύο αυτές όψεις της θεωρίας. Η κάθε μία, όσο σημαντική και ενδιαφέρουσα και να είναι, μόνη της οδηγεί είτε σε ένα όμορφο, αλλά ίσως άχρηστο κομψοτέχνημα, ή σε ένα απέραντο δάσος από λογικά σωστούς, και ίσως αποκρουστικούς, τύπους, που η μόνη σημασία τους θα είναι ότι είναι «αναγκαίο κακό».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι πραγματικοι αριθμοι

1.1 Η γεωμετρική παράσταση

Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία O και E, το E δεξιά του O, πάνω σε μια ευθεία $X'X$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σαν τα σημεία αυτής της ευθείας. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο M της $X'X$ την απόσταση του M από το O, αν το M βρίσκεται δεξιά από το O (Σχήμα 1.1) και πάρουμε το OE για μονάδα.



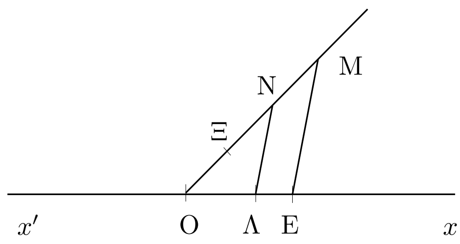
Σχήμα 1.1

Έτσι, για παράδειγμα, το M αντιστοιχεί (προσεγγιστικά) στον αριθμό 2,5 και το N στον $-0{,}5$.

1.2 Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί

Η μελέτη των πραγματικών αριθμών αρχίζει συνήθως *με το σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών* 1, 2, 3, 4, … Το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών είναι πάντοτε ένας φυσικός αριθμός. Αν στους φυσικούς επισυνάψουμε το 0 και τους αντίθετούς τους, παίρνουμε *το σύνολο* $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων αριθμών* 0, ±1, ±2, … Το άθροισμα, το γινόμενο και (κατά αντίθεση προς τους φυσικούς) η διαφορά δύο ακεραίων είναι πάντοτε ένας ακέραιος αριθμός. Αν στους ακεραίους επισυνάψουμε και όλα τα κλάσματα m/n, όπου m, n ακέραιοι και $n \neq 0$, τότε παίρνουμε *το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *των ρητών αριθμών*. Εκτός του αθροίσματος, του γινομένου και της διαφοράς τώρα και το πηλίκο (κατά αντίθεση προς τους ακεραίους) δύο ρητών q/r, όπου r $\neq 0$, είναι πάντοτε ρητός αριθμός.

Απλές γεωμετρικές κατασκευές στο επίπεδο δίνουν τη γεωμετρική παράσταση των ρητών αριθμών. Στο Σχήμα 1.2, για παράδειγμα, βλέπουμε την κατασκευή του ρητού 2/3 (σημείο Λ).



Σχήμα 1.2

1.3 Άρρητοι αριθμοί

Ήδη από την αρχαιότητα ανακαλύφτηκαν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Για παράδειγμα, *το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά 1 δεν είναι ρητός αριθμός*.

Η πολύ ωραία απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι γνωστή από τους κλασσικούς χρόνους και έχει ως εξής :

Αν γράψουμε x για το μήκος της διαγωνίου, τότε θα έχουμε (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι ο x είναι ρητός, δηλαδή $x = m/n$ όπου m, n ακέραιοι με $n \neq 0$. Απλοποιώντας, αν χρειαστεί, το κλάσμα m/n μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι «οι m και n δεν είναι και οι δύο ζυγοί». Θα έχουμε λοιπόν

$$2 = m^2/n^2 \text{ ή } m^2 = 2n^2$$

και επομένως ο m^2, άρα και ο m, είναι ζυγός, δηλαδή $m = 2m_1$ για κάποιο ακέραιο m_1. Τότε όμως

$$2n^2 = 4m_1^2 \text{ ή } n^2 = 2m_1^2$$

και επομένως ο n^2, άρα και ο n, είναι ζυγός. Φτάσαμε λοιπόν σε άτοπο και έτσι συμπεραίνουμε ότι ο x δεν είναι ρητός.

Οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί λέγονται *άρρητοι.*

Το σύνολο όλων των πραγματικών, ρητών και αρρήτων, θα συμβολίζουμε με το γράμμα $\mathbb{R}$. Από τα όσα είπαμε μέχρι τώρα γίνεται φανερό ότι

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

Μόνο η σχέση $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ δεν είναι τετριμμένη. Είναι όμως άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης.

1.4 Ένα αξιωματικό σύστημα για τους πραγματικούς αριθμούς

Ένας τρόπος αυστηρής εισαγωγής των πραγματικών αριθμών θα ήταν να δώσουμε ένα αξιωματικό χαρακτηρισμό των φυσικών αριθμών (για παράδειγμα, με τα λεγόμενα αξιώματα του Peano) και, στη συνέχεια, να δώσουμε μια ακριβή έννοια στις διαδοχικές επισυνάψεις νέων στοιχείων που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να ορίσουμε τους ακεραίους σαν διατεταγμένα ζεύγη φυσικών (m, n) μαζί με κατάλληλους νόμους για ισότητα, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ακεραίων.

Στο μυαλό μας φυσικά θα έχουμε την αντιστοίχηση του (m, n) με τον ακέραιο $m - n$ και επομένως θα ορίζαμε : $(m, n) = (m', n')$ αν και μόνο αν $m + n' = n + m'$, $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$, $(m, n)(m', n') = (mm' + nn', mn' + nm')$.

Δεν θα ακολουθήσουμε αυτήν την «κατασκευαστική» πορεία, παρά το μεγάλο ενδιαφέρον που παρουσιάζει, αλλά *θα θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σαν ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{R}$ με τις εξής χαρακτηριστικές ιδιότητες:*

(α) *Το $\mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο σώμα.*

(β) *Κάθε μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει άνω πέρας (αξίωμα συνέχειας).*

Οφείλουμε βέβαια να επεξηγήσουμε τους όρους που εμφανίζονται στον παραπάνω χαρακτηρισμό των πραγματικών αριθμών.

Διατεταγμένο σώμα. Η ιδιότητα (α) εκφράζει συνοπτικά ότι οι συνήθεις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, ύπαρξη 0, 1, ύπαρξη αντιθέτου και αντιστρόφου) καθώς και η σχέση διατάξεως $\alpha \leqq \beta$ είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και έχουν τις ιδιότητες που περιμένουμε. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με αυτές τις ιδιότητες και γι' αυτό δεν τις επαναλαμβάνουμε εδώ. (βλέπε 7.1)

Αξίωμα συνέχειας. Πρέπει να εξηγήσουμε τους όρους «φραγμένο προς τα πάνω» και «άνω πέρας».

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται φραγμένο προς τα πάνω, αν υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει, $x \leqq \alpha$. Κάθε τέτοιο α λέγεται «άνω φράγμα» του A.

Άνω πέρας ή supremum ενός προς τα πάνω φραγμένου συνόλου A λέγεται ένα άνω φράγμα α του A το οποίο έχει την ιδιότητα : $\alpha \leqq \alpha'$ για κάθε άνω φράγμα α' του A (συμβολισμός: $\alpha = \sup A$).

Είναι φανερό ότι *το άνω πέρας, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.* Πραγματικά αν α, α' είναι άνω πέρατα ενός συνόλου ($A \subseteq \mathbb{R}$) τότε $\alpha \leqq \alpha'$ και $\alpha' \leqq \alpha$ δηλαδή $\alpha = \alpha'$.

Το αξίωμα της συνέχειας λέει, ότι για κάθε φραγμένο προς τα πάνω και μη κενό υποσύνολο των πραγματικών A, το $\sup A$ υπάρχει (στο $\mathbb{R}$). Όπως θα γίνει φανερό από τα παραδείγματα που ακολουθούν η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{Q}$.

Παραδείγματα: Εξετάζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} = \{0, 1, 3\},\\
&\mathrm{B} = \{x : x < 0\}\\
&\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 x^2 < 2\},\\
&\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 x^2 \leq 2\},\\
&\mathrm{E} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ διαιρείται με το } 3\}
\end{aligned}$$

Τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ είναι φραγμένα προς τα πάνω. Για A, B, για παράδειγμα, ο αριθμός 3 είναι ένα φράγμα τους (τετριμμένο). Επίσης τετριμμένο είναι να δούμε ότι $\sup \mathrm{A} = 3$.

Τα Γ και Δ είναι επίσης φραγμένα προς τα πάνω. Επειδή προφανώς $\Gamma \subseteq \Delta$ αρκεί να δείξουμε ότι το Δ είναι φραγμένο προς τα πάνω (και μάλιστα κάθε άνω φράγμα του Δ είναι και άνω φράγμα του Γ· γιατί;) Ισχυρίζομαι πράγματι ότι, για παράδειγμα, το 2 είναι άνω φράγμα του Δ. Έστω πραγματικά $x \in \Delta$ πρέπει να δείξω ότι $x \leq 2$. Αν όμως $x > 2$, τότε $x^2 > 4$ και έτσι αποκλείεται το x να ανήκει στο Δ, διότι τότε $x^2 \leq 2 < 4 < x^2$.

Το αξίωμα της συνέχειας μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τα $\sup \mathrm{A}(= 3)$, $\sup \mathrm{B}$, $\sup \Gamma$, $\sup \Delta$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\sup \mathrm{B} = 0$. Πραγματικά αν $x \in \mathrm{B}$, τότε $x \leq 0$ άρα το 0 είναι άνω φράγμα του B.

Αν a ένα άλλο άνω φράγμα του B, τότε αποκλείεται $a < 0$ (διότι τότε $a/2 < 0$, άρα και $a/2 \in \mathrm{B}$, και θα έπρεπε $a/2 < a$, οπότε (αφού $a < 0$) και $1/2 > 1$, που φυσικά είναι άτοπο) . Συνάγουμε λοιπόν ότι $0 \leq a$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας .

Παρατήρηση 1.4.1 Τα παραδείγματα A, B δείχνουν ότι *το* sup *ενός συνόλου μπορεί να ανήκει* (περίπτωση συνόλου A) *ή να μην ανήκει* (περίπτωση συνόλου B) *στο θεωρούμενο σύνολο.*

Είναι φανερό ότι $\Gamma \neq \emptyset$ (για παράδειγμα, $1 \in \Gamma$) άρα, από το αξίωμα της συνέχειας, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός x ώστε $x = \sup \Gamma$.

Ισχυρισμός: $x^2 = 2$ και $x > 0$.

Ο ισχυρισμός δείχνει ότι υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) η «θετική τετραγωνική ρίζα του 2», ενώ γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι και οι δύο υποθέσεις $x^2 < 2$ και $x^2 > 2$ οδηγούν σε άτοπο. Είναι προφανές ότι $x > 0$.

Έστω πρώτα $x^2 < 2$. Θα δείξω ότι υπάρχει ε με $0 < \varepsilon \leq 1$ ώστε $x + \varepsilon \in \Gamma$, το οποίο προφανώς αντιφάσκει με το ότι το x είναι το $\sup \Gamma$ (και άρα άνω φράγμα του Γ). Αρκεί λοιπόν να διαλέξω το ε ώστε

$$(x+\varepsilon)^2 = x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < 2 \quad \text{και} \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

δηλαδή

$$\varepsilon(2x+\varepsilon) < 2 - x^2 \quad \text{και} \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Αρκεί, για παράδειγμα, να πάρω

$$\varepsilon = \min\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2-x^2}{2x+1}\right\}$$

($\min\{a,b\}$ σημαίνει τον πιο μικρό από τους a, b αν $a \neq b$, και τον a αν $a = b$. Ανάλογα ορίζεται το $\max\{a,b\}$).

Άσκηση: $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$, $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

Πράγματι με αυτή την επιλογή του ε και επειδή υποθέσαμε $x^2 < 2$ θα έχουμε $0 < \varepsilon \leq 1$ και

$$\varepsilon(2x+\varepsilon) \leq \varepsilon(2x+1) \leq \frac{1}{2}\frac{2-x^2}{2x+1}(2x+1) < 2 - x^2.$$

Έστω τώρα $x^2 > 2$. Θα δείξω τώρα, για να φτάσω πάλι σε άτοπο, ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του Γ. Αρκεί λοιπόν να διαλέξουμε το $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $x - \varepsilon > 0$ και $(x-\varepsilon)^2 > 2$, διότι τότε για κάθε $y \in \Gamma$ θα έχουμε $y^2 < 2 < (x-\varepsilon)^2$, δηλαδή $y < x - \varepsilon$.

Θέλω λοιπόν να βρω $\varepsilon > 0$ ώστε $0 < \varepsilon < x$ και $x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 > 2$. Αρκεί, για παράδειγμα, να πάρω $\varepsilon = \frac{x^2-2}{2x}$ (γιατί;).

Όπως και στην περίπτωση Γ το $\sup \Delta$ υπάρχει και μάλιστα $\sup \Gamma \leq \sup \Delta$. Αν τώρα $y \in \Delta$, τότε $y^2 < 2$ ή $y^2 = 2$. Στην πρώτη περίπτωση $y \in \Gamma$ και άρα $y \leq \sup \Gamma$ και στη δεύτερη $y = \sup \Gamma$, δηλαδή $y \leq \sup \Gamma$. Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν συνάγουμε ότι το $\sup \Gamma$ είναι άνω φράγμα του Δ, επομένως $\sup \Delta \leq \sup \Gamma$. Τελικά λοιπόν $\sup \Gamma = \sup \Delta$.

Ας εξετάσουμε τέλος το σύνολο Ε. Είναι διαισθητικά φανερό ότι το Ε δεν είναι φραγμένο προς τα πάνω. Πρέπει να το δείξουμε βασιζόμενοι στα αξιώματα πραγματικών a και b μόνο.

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι $\mathrm{E} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$. Ας υποθέσουμε ότι το Ε είναι φραγμένο. Επειδή το Ε είναι προφανώς μη κενό (για παράδειγμα, $3 \in \mathrm{E}$) θα υπάρχει το $\sup \mathrm{E}$, έστω $b = \sup \mathrm{E}$. Τότε όμως $b - 1 < b$ και άρα θα υπάρχει στοιχείο του Ε που είναι μεγαλύτερο του $b - 1$, δηλαδή θα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $3k > b - 1$. Συνάγουμε ότι $3(k+1) = 3k + 3 > b - 1 + 3 = b + 2 > b$ και $3(k+1) \in \mathrm{E}$, που είναι φυσικά άτοπο (γιατί βρήκαμε στοιχείο του Ε γνήσια μεγαλύτερο από το $\sup \mathrm{E}$).

Παρατήρηση 1.4.2 Για μη κενά σύνολα Α που δεν είναι φραγμένα προς τα πάνω γράφουμε $\sup \mathrm{A} = +\infty$ (Το σύμβολο $+\infty$ διαβάζεται «συν άπειρο». Θα το συναντάμε συχνά στη συνέχεια).

Θα δούμε τώρα μια διαισθητικά φανερή και πολύ σημαντική ιδιότητα των πραγματικών.

Αν ε τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός και a ένας άλλος πραγματικός τότε υπάρχει ένας φυσικός n ώστε $n\varepsilon > a$

Συνήθως εκφράζουμε την ιδιότητα αυτή λέγοντας «το σώμα των πραγματικών $\mathbb{R}$ είναι *Αρχιμήδεια διατεταγμένο*». Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος της συνέχειας και ουσιαστικά τη δώσαμε στο παραπάνω παράδειγμα Ε. Πραγματικά, αν δεν υπάρχει τέτοιο $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $\mathrm{A} = \{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ θα είναι φραγμένο προς τα πάνω και (προφανώς) μη κενό. Θα υπάρχει επομένως το $\sup \mathrm{A}$, έστω $\sup \mathrm{A} = b$. Επειδή $b - \varepsilon < b$, θα υπάρχει ένα στοιχείο $m\varepsilon, m \in \mathbb{N}$, του Α ώστε $b - \varepsilon < m\varepsilon$, δηλαδή $b < (m+1)\varepsilon$. Αλλά $(m+1)\varepsilon \in \mathrm{A}$ και φτάσαμε σε άτοπο.

Παρατήρηση 1.4.3 Μπορεί να δειχτεί ότι υπάρχουν διατεταγμένα σώματα στα οποία δεν ισχύει η ιδιότητα αυτή. Επομένως η ισχύς της στους πραγματικούς αριθμούς εξαρτάται ουσιαστικά από το αξίωμα της συνέχειας (βλέπε 7.1).

Είναι ιστορικά ενδιαφέρον να σημειώσουμε εδώ ότι η παραπάνω πρόταση αναφέρεται με θαυμαστή σαφήνεια από τον Αρχιμήδη στο έργο του «Τετραγωνισμός της ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολής)» όπου και διαβλέπει, σε μια εποχή που κάθε άλλο παρά ξεκαθαρισμένη ήταν η έννοια του πραγματικού αριθμού, την ανάγκη να υποθέσει την ιδιότητα αυτή αξιωματικά. Γράφει μεταξύ άλλων

ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΔΕ ΤΩΝ ΠΡΟΕΙΡΗΜΕΝΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ
ΕΚΑΣΤΟΝ ΜΗΔΕΝΟΣ ΗΣΣΟΝ ΤΩΝ ΑΝΕΥ ΤΟΥΤΟΥ
ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ ΑΠΟΔΕΔΕΙΓΜΕΝΩΝ ΠΕΠΙΣΤΕΥΚΕ
ΝΑΙ ΑΡΚΕΙ ΔΕ ΕΣ ΤΑΝ ΟΜΟΙΑΝ ΠΙΣΤΙΝ ΤΟΥΤΟΙΣ ΑΝΑΓ
ΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΥΦ ΑΜΩΝ ΕΚΔΙΔΟΜΕΝΩΝ

(…πιστεύεται δε ότι έκαστον των ανωτέρω θεωρημάτων δεν υστερεί των θεωρημάτων, τα οποία απεδείχθησαν χωρίς τη βοήθειαν του λήμματος τούτου, μου είναι δε αρκετόν, εάν τα υπ' εμού ευρεθέντα θεωρήματα έχουν τον αυτόν βαθμόν αληθείας, όπως τα ανωτέρω αναφερόμενα… (Ε.Σ. Σταμάτη: Αρχιμήδους τετραγωνισμός παραβολής).)

Τελείως ανάλογα με τον ορισμό των φραγμένων προς τα πάνω συνόλων και του supremum ορίζονται τα φραγμένα προς τα κάτω σύνολα και το infimum (κάτω πέρας), το οποίο συμβολίζουμε inf. Πιο συγκεκριμένα αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in A$, $a \leq x$, τότε το a λέγεται *κάτω φράγμα* του A. Το $\inf A$ είναι ένα κάτω φράγμα μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε άλλο κάτω φράγμα. Αν γράψουμε $-A$ για το σύνολο $\{x : -x \in A\}$, τότε είναι τετριμμένο να δούμε ότι $\inf A = -\sup(-A)$, απ' όπου συνάγουμε άμεσα το θεώρημα (όχι αξίωμα!):

Θεώρημα 1.4.4 *Κάθε μη κενό φραγμένο προς τα κάτω σύνολο έχει κάτω πέρας.*

1.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι για κάθε θετικό αριθμό m υπάρχει ακριβώς μία θετική τετραγωνική ρίζα του, δηλαδή ακριβώς ένας θετικός αριθμός m ώστε $(\sqrt{m})^2 = m$.

2. Είναι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ρητός; Ίδια ερώτηση για τον αριθμό
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Δείξτε ότι μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η σχέση: $|a-b| < \varepsilon$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, είναι να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε: $|a-x| < \varepsilon/2$ και $|b-x| < \varepsilon/2$. Είναι η συνθήκη αυτή αναγκαία; Αν ναι τότε βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη.

4. Δείξτε ότι μεταξύ δύο τυχαίων διαφορετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας άρρητος.

5. Δείξτε ότι κάθε φραγμένο προς τα πάνω υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο. Ισχύει η ίδια ιδιότητα για το $\mathbb{Z}$; για το $\mathbb{Q}$;

6. Δώστε παράδειγμα, ανάλογα με τα παραδείγματα της παραγράφου 1.4, για κάτω φράγματα και μελετήστε τα με τον ίδιο τρόπο.

7. Πραγματευτείτε την ύπαρξη της $\sqrt{2}$ σαν infimum ενός κατάλληλου συνόλου A.

8. Αν $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, και θέσουμε $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$, τότε $\inf A = -\sup(-A)$

9. Δίνεται $A = \{|\alpha\beta| : -2 < \alpha \leq 5, -4 < \beta \leq 3\}$. Βρείτε, αν υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf A$ και εξετάστε αν ανήκουν ή όχι στο A.

10. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και το A δεν είναι φραγμένο προς τα πάνω, τότε ορίζουμε το $\sup A$ να είναι το σύμβολο $+\infty$. Δείξτε ότι: $\sup A = +\infty$ αν και μόνο αν ισχύει «για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > M$». Δώστε ανάλογο ορισμό για το $\inf A = -\infty$.

11. Αν θέλατε να επεκτείνετε τον ορισμό των $\sup A, \inf A$ στην περίπτωση $A = \emptyset$, τι θα προτείνατε; Πάρτε για δεδομένο ότι προτάσεις της μορφής «$\Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$» θεωρούνται αληθείς αν η πρόταση Π_1 είναι ψευδής, ανεξάρτητα από το αν είναι αληθής ή όχι η Π_2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πραγματικές Συναρτήσεις

2.1 Μερικά χρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, το κύριο μέλημα μας θα είναι να μελετήσουμε συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε υποσύνολα των πραγματικών.

Γενικά, με τον όρο συνάρτηση, εννοούμε μια αντιστοίχηση μεταξύ των στοιχείων ενός σύνολου A, το οποίο θα ονομάζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης, και στοιχείων ενός σύνολου B, το οποίο θα ονομάζουμε πεδίο τιμών, ώστε σε κάθε στοιχείο a του A να αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του B. Συχνά χρησιμοποιούμε τα γράμματα $f, g, h, \dots$ για συναρτήσεις και γράφουμε $f(a)$ για το στοιχείο του πεδίου τιμών που αντιστοιχεί στο a. Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα εξετάσουμε μερικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που εμφανίζονται συνήθως σαν πεδία ορισμού. Σχεδόν πάντοτε σάυτό το μάθημα το πεδίο τιμών B θα είναι το $\mathbb{R}$ (τέτοιες συναρτήσεις λέγονται *πραγματικές*).

2.1α' Διαστήματα

Τα πεδία ορισμού των πραγματικών συναρτήσεων θα είναι συνήθως διαστήματα. Με τον όρο αυτό εννοούμε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ της μορφής:

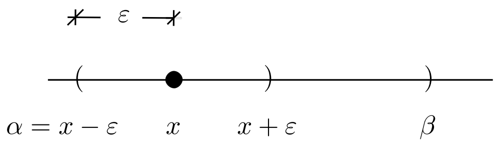
Σύνολο	**Σύμβολο**	**Ονομασία**
$\{x : \alpha < x < \beta\}$	(α, β)	ανοιχτό διάστημα α, β
$\{x : \alpha < x\}$	(α, ∞)	ανοιχτό διάστημα α, ∞
$\{x : \alpha > x\}$	$(-\infty, \alpha)$	ανοιχτό διάστημα $-\infty, \alpha$
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	Πραγματικοί
$\{x : \alpha \leq x \leq \beta\}$	$[\alpha, \beta]$	κλειστό διάστημα α, β
$\{x : \alpha \leq x\}$	$[\alpha, \infty)$	κλειστό διάστημα α, ∞
$\{x : \alpha \geq x\}$	$(-\infty, \alpha]$	κλειστό διάστημα $-\infty, \alpha$
$\{x : \alpha < x \geq \beta\}$	$(\alpha, \beta]$	
$\{x : \alpha \geq x < \beta\}$	$[\alpha, \beta)$	

Το προτελευταίο διάστημα λέγεται ημιανοιχτό (ή ημίκλειστο) ακριβέστερα ανοιχτό αριστερά και κλειστό δεξιά. Ανάλογη ονομασία έχει και το τελευταίο διάστημα. Στα παραπάνω τα α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$. Τα σύμβολα $-\infty, +\infty$, διαβάζονται «μείον άπειρο» και «συν άπειρο» αντίστοιχα.

2.1β' Εσωτερικά σημεία.

Ένα σημείο x ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό* σημείο του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το ανοιχτό διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, που θα το ονομάζουμε και ε-περιοχή του x, να περιέχεται στο $A : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$

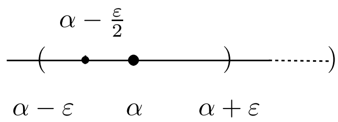
Παρατηρείστε ότι όλα τα σημεία των διαστημάτων της μορφής (α, β), (α, ∞), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, \infty)$ είναι εσωτερικά σημεία . Έστω για παράδειγμα $x \in (\alpha, \beta)$, δηλαδή $\alpha < x < \beta$. Αν γράψουμε $\varepsilon = \min\{x-\alpha, \beta - x\}$, τότε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$ (βλέπε σχήμα 2.1).



$\{x < x + \varepsilon \leq x + \beta - x = \beta\}$

Σχήμα 2.1

Τα σημεία των υπολοίπων διαστημάτων είναι επίσης εσωτερικά με πιθανή εξαίρεση κάποια άκρα. Για παράδειγμα $\alpha \in [\alpha, \infty)$ αλλά οποιαδήποτε ε-περιοχή του α, $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ με $\varepsilon > 0$, περιέχει αριθμούς μικρότερους του α (για παράδειγμα τον $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ και επομένως δεν περιέχεται στο $[\alpha, \infty]$ (σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις η μελέτη μιας πραγματικής συνάρτησης απλουστεύεται στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και το γεγονός αυτό δικαιολογεί την εισαγωγή αυτής της έννοιας.

2.2 Παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων.

2.2α' Ακολουθίες.

Αν μια συνάρτηση a έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς $\mathbb{N}$, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, τότε λέγεται *ακολουθία*. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε συνήθως α_n αντί $(a_n), n = 1, 2, \dots$ και μιλάμε για την ακολουθία $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ αντί για τη συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε επίσης $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ για την ακολουθία $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$

Παραδείγματα: $a_n = 1/n, n = 1, 2, \dots, b_n = n, n = 1, 2, \dots, c_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$.

2.2β' Πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Με τον όρο αυτό εννοούμε φυσικά συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζονται από τύπους της μορφής :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n, x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha_n \neq 0$. Ο αριθμός n λέγεται βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης. Αν $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, δηλαδή αν $f(x) = \alpha_0, x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση λέγεται σταθερά και ο βαθμός της είναι 0 αν $\alpha_0 \neq 0$ ενώ δεν ορίζεται βαθμός αν $\alpha_0 = 0$ (ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν στην περίπτωση αυτή σαν βαθμό το $-\infty$). Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πρώτου βαθμού λέγονται συνήθως γραμμικές.

2.2γ' Ρητές συναρτήσεις.

Με τον όρο αυτό εννοούμε συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ που ορίζονται από τύπους της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

δηλαδή είναι πηλίκα δύο πολυωνύμων. Το A εδώ είναι το σύνολο των πραγματικών x για τους οποίους $Q(x) \neq 0$ και υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Q δεν είναι η σταθερά 0. Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν το πολύ m πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $Q(x) = 0$. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται ρίζες του Q. Η απόδειξη είναι εύκολη με επαγωγή ως προς το βαθμό m του Q. Για $m = 1$, δηλαδή για Q γραμμική, έχουμε ακριβώς μία ρίζα. Έστω τώρα $m > 1$ και α μια ρίζα του Q. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q με $x - \alpha$ θα έχει βαθμό < 1, δηλαδή θα είναι μια σταθερά και επομένως $Q(x) = (x-\alpha)\pi(x)+c$ για κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$. Θέτοντας $x = \alpha$ βλέπουμε ότι $c = 0$ και επομένως $Q(x) = (x - \alpha)\pi(x)$. Το $\pi(x)$ έχει βαθμό $m - 1$ και για κάθε ρίζα β του Q με $\beta \neq \alpha$ θα έχουμε $Q(\beta) = 0 = (\beta - \alpha)\pi(\beta)$, δηλαδή $\pi(\beta) = 0$. Κάνοντας την επαγωγική υπόθεση ότι το $\pi(x)$ έχει το πολύ $m - 1$ ρίζες συνάγουμε ότι το $Q(x)$ έχει πράγματι το πολύ m ρίζες (τις ρίζες του π και την α).

Παρατηρήσεις:

(i) Υπάρχει ένα σοβαρό λογικό κενό σε όσα είπαμε. Η αρχή της επαγωγής ισχύει φυσικά και θα τη χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα και στη συνέχεια. Θα πρέπει όμως να δείξουμε ότι είναι συνέπεια των αξιωμάτων που παραδεχτήκαμε (α και β). Υπάρχει ένα ακόμη σοβαρότερο κενό. Δεν έχουμε ακόμη ορίσει ποιοι από τους πραγματικούς είναι οι Φυσικοί. Θέλουμε βέβαια το σύνολο των Φυσικών να περιέχει τους $1, 1+1(=2), 2+1(=3), \ldots$ και μόνον αυτούς. Πρέπει λοιπόν να είναι ένα σύνολο $\mathbb{N}$ που ικανοποιεί:

(α') $1 \in \mathbb{N}$,

(β') αν $n \in \mathbb{N}$ τότε και $n+1 \in \mathbb{N}$.

Τέτοια όμως σύνολα μπορεί να υπάρχουν πολλά (για παράδειγμα το ίδιο το $\mathbb{R}$, το $\mathbb{Q}$,...) Ορίζουμε λοιπόν το σύνολο των Φυσικών $\mathbb{N}$ να είναι η τομή όλων των υποσυνόλων των πραγματικών που ικανοποιούν τις (ια') και (ιβ'), με άλλα λόγια το $\mathbb{N}$ είναι το «μικρότερο» σύνολο πραγματικών που ικανοποιεί τις (ια') και (ιβ'), (γιατί;).

(ii) Οι ρητές συναρτήσεις $f(x) = P(x)/Q(x)$ που εξετάσαμε, είναι ειδικές περιπτώσεις των λεγόμενων *αλγεβρικών συναρτήσεων*, δηλαδή συναρτήσεων f που ικανοποιούν ταυτοτικά στο πεδίο ορισμού τους μια πολυωνυμική εξίσωση δύο μεταβλητών:

$$a_0(x) + a_1(x)f(x) + \cdots + a_k(x)(f(x))^k = 0$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_k$, πολυωνυμικές συναρτήσεις και η a_k δεν είναι η σταθερή συνάρτηση 0. Η ρητή $f = \frac{P}{Q}$ για παράδειγμα ικανοποιεί την $P(x) + Q(x)f(x) = 0$.

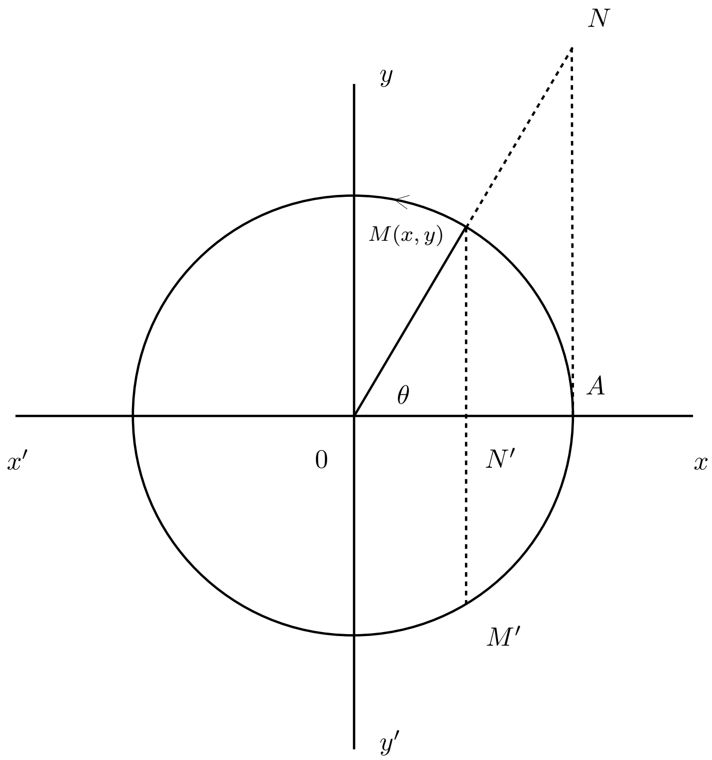
Θα γνωρίσουμε αργότερα και άλλα σημαντικά παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$.

2.2δ' Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $X'OX$, $Y'OY$ στο επίπεδο και θυμόμαστε ότι σε κάθε (διατεταγμένο) ζευγάρι πραγματικών αριθμών (x, y) αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη x και (δηλαδή προσημασμένη προβολή στον άξονα $X'OX$) και τεταγμένη (δηλαδή προσημασμένη προβολή στον άξονα $Y'OY$) y.

Θεωρούμε επίσης μια περιφέρεια με κέντρο 0 και ακτίνα 1 διαγραμμένη με φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι για κάθε πραγματικό ϑ υπάρχει ένα σημείο $M(x, y)$ πάνω στην περιφέρεια ώστε το τόξο $\widehat{AM}$ να είναι ϑ ακτίνια. Φυσικά σε διαφορετικούς αριθμούς ϑ, φ, είναι δυνατόν να αντιστοιχεί το ίδιο σημείο M. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη γι' αυτό είναι: «$\vartheta - \varphi =$ ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π».



Σχήμα 2.3

Οι συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη) ορίζονται τώρα ως εξής:

$$\sin\vartheta = y \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad \cos\vartheta = x \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad \tan\vartheta = \frac{y}{x} \quad \vartheta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Με βάση τους ορισμούς αυτούς μπορούμε εύκολα να βρούμε τις γνωστές σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αυτών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με αυτές.

Υπενθυμίζουμε μόνο την εξής ανισότητα που θα μας χρειαστεί αργότερα.

$$|\sin\vartheta| \leq |\vartheta| \leq |\tan\vartheta| \, , \quad |\vartheta| < \frac{\pi}{2}$$

Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ (γιατί;) και να παρατηρήσουμε ότι (βλέπε σχήμα 2.3)

$$2\sin\vartheta = MM' \leq \widehat{MM'} = 2\vartheta$$

και
$$\frac{1}{2}\vartheta = \text{ εμβαδόν } OAM \leq \text{ εμβαδόν } OAN = \frac{1}{2}\ AN = \frac{1}{2}\tan\vartheta$$
(η τελευταία ισότητα προκύπτει άμεσα από την ομοιότητα των τριγώνων ONM και OAN. Η AN είναι φυσικά η εφαπτομένη της περιφέρειας στο A).

Μια απλή παρατήρηση για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin\vartheta$ και $\cos\vartheta$ είναι ότι είναι *περιοδικές* με περίοδο 2π, δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση
$$f(\vartheta + 2\pi) = f(\vartheta),\ \vartheta \in \mathbb{R},\ \ f = \sin\vartheta \ \text{ ή } \ f = \cos\vartheta.$$
Αν τώρα k είναι ένας φυσικός αριθμός τότε για το sin (και όμοια για το cos) θα έχουμε:
$$\sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin(x + (k-1)2\pi) = \cdots = \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
δηλαδή όχι μόνο το 2π αλλά και κάθε πολλαπλάσιό του, $2k\pi\ k \in \mathbb{N}$, είναι περίοδος. Το 2π είναι μάλιστα η πιο μικρή θετική περίοδος. Πραγματικά αν $0 < a < 2\pi$ και $\sin(\vartheta + a) = \sin(\vartheta)$ για όλα τα ϑ, τότε, παίρνοντας $\vartheta = 0$, έχουμε $\sin(a) = \sin(0) = 0$, δηλαδή (αφού $0 < a < 2\pi$) $a = \pi$. Παίρνοντας τώρα $\vartheta = \pi/2$ έχουμε $\sin(\pi + \pi/2) = \sin(\pi/2)$, δηλαδή -1=1 που είναι άτοπο.

Παρατήρηση. Η εισαγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που δώσαμε παραπάνω, έχει το «μειονέκτημα», ότι στηρίχτηκε στην γεωμετρική εποπτεία. Θα έπρεπε λοιπόν, ή να δικαιολογήσουμε, με βάση τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών, τα γεωμετρικά επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε, ή να δώσουμε άλλους ορισμούς, χωρίς αυτό το μειονέκτημα. Στη συνέχεια έπρεπε να δώσουμε επιχειρήματα, που πείθουν ότι οι νέοι ορισμοί οδηγούν σε συναρτήσεις που έχουν την γεωμετρική ερμηνεία που θέλουμε. Θα σκιαγραφήσουμε την τελευταία μέθοδο αργότερα (μετά την εισαγωγή της έννοιας του ολοκληρώματος).

2.2ε' Πρόσημο (sgn) ενός πραγματικού αριθμού

Σε πολλές περιπτώσεις χρήσιμες συναρτήσεις δίνονται «κατά τμήματα». Για παράδειγμα
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται συνήθως με $\operatorname{sgn}(x)$ και έχει την ονομασία «πρόσημο του x». Η απλή σχέση
$$x = \operatorname{sgn}(x)|x|$$
δικαιολογεί αυτή την ονομασία.

2.2στ' Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού.

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός.
Ισχυρισμός : Υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος n ώστε $n \leq x < n+1$.

Αν πιστέψουμε τον ισχυρισμό, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση, η οποία σε κάθε x αντιστοιχεί αυτόν τον ακέραιο n.

Ονομάζουμε αυτή την συνάρτηση «ακέραιο μέρος του x» και τη συμβολίζουμε $[x]$. Έχουμε λοιπόν :

$$[x] = \begin{cases} \dots & \dots \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Γυρνάμε τώρα στον ισχυρισμό, ο οποίος, όσο όσο φανερός και να είναι διαισθητικά, χρειάζεται απόδειξη. Κατ' αρχάς αν υπήρχαν δύο τέτοιοι ακέραιοι m και n, τότε $n \leq x < n+1$ και $m \leq x < m+1$ και επομένως $n < m+1$ και $m < n+1$, δηλαδή $m = n$.

Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει φυσικός M ώστε $M > |x|$ (λόγω της Αρχιμήδειας διάταξης των πραγματικών) δηλαδή $-M < x < M$. Προφανώς όμως το x θα θα ανήκει σε ένα από τα ημίκλειστα διαστήματα $[k, k+1)$, $k = -M, \dots, M-1$, που είναι αυτό ακριβώς που θέλαμε να δείξουμε.

Με την βοήθεια της συνάρτησης $[x]$ μπορούμε εύκολα να δείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ρητών αριθμών:

Πρόταση 2.2.1 *Αν $a < b$ είναι δύο τυχαίοι πραγματικοί, τότε υπάρχει ρητός q ώστε $a < q < b$.*

Η σημασία της πρότασης είναι ότι μας εξασφαλίζει όσο θέλουμε καλή «προσέγγιση» των πραγματικών με ρητούς. Πραγματικά, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει ρητός q στο διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ και επομένως $|x-q| < \varepsilon$. Φυσικά μια τέτοια προσέγγιση μπορούμε να πάρουμε με κατάλληλα μεγάλο κομμάτι της «δεκαδικής» ανάπτυξης ενός πραγματικού x (για παράδειγμα $1{,}41 = \frac{141}{100}$ είναι μια ρητή προσέγγιση του $\sqrt{2}$). Σε επόμενη παράγραφο θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της δυνατότητας παράστασης των πραγματικών με δεκαδικούς και θα έχουμε έτσι μια άλλη, διαισθητικά πιο φυσιολογική, απόδειξη για την ιδιότητα των ρητών που αναφέραμε. Πολύ συχνά στη βιβλιογραφία η ιδιότητα αυτή εκφράζεται και ως εξής:

Θεώρημα 2.2.2 *Οι ρητοί αποτελούν πυκνό υποσύνολο των πραγματικών.*

Απόδειξη: Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών ξέρουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n(b-a) > 2$ και επομένως $nb > na+2 > [na]+1 > na$. Γράφοντας $q = \frac{[na]+1}{n}$, έχουμε $a < q < b$. □

Εξ ίσου απλό είναι να δείξουμε ότι «*μεταξύ δύο ρητών $q_1 < q_2$ υπάρχει άρρητος*». Πραγματικά, οι αριθμοί $q_1 + \sqrt{2}/n)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι όλοι άρρητοι (γιατί;) και μεγαλύτεροι του q_1. Αν διαλέξουμε το n έτσι ώστε $n > \frac{\sqrt{2}}{(q_2 - 1_1)}$, το οποίο είναι δυνατόν λόγω Αρχιμήδειας ιδιότητας, τότε ο άρρητος $a = q_1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ ικανοποιεί την ανισότητα $q_1 < a < q_2$.

2.2ζ' Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Αν $A \subset \mathbb{R}$, ονομάζουμε *χαρακτηριστική συνάρτηση* του A (συμβολισμός χ_A) τη συνάρτηση:

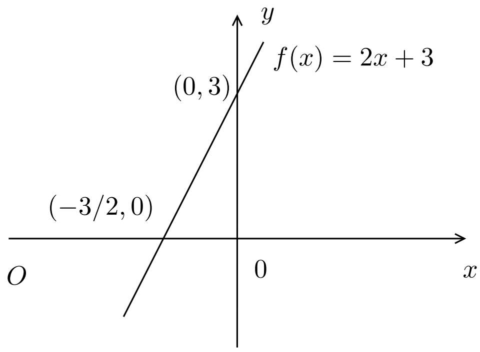
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{A} \\ \dots & \dots \\ 0 & x \notin \mathbb{A} \end{cases}$$

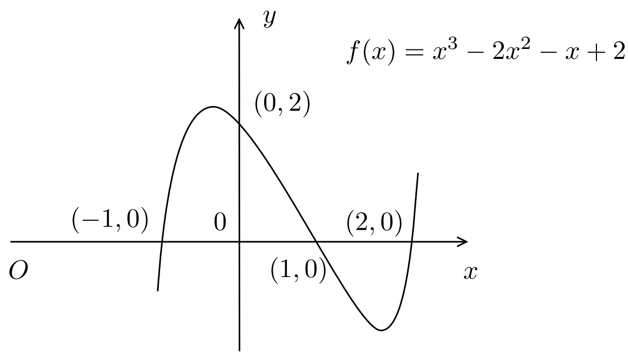
Χαρακτηριστικές συναρτήσεις συναντάμε στον Απειροστικό Λογισμό. Έτσι π.χ. η $\chi_{\mathbb{Q}}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών, που ονομάζεται και «συνάρτηση του Dirichlet» θα είναι αρκετά συχνή πηγή αντιπαραδειγμάτων.

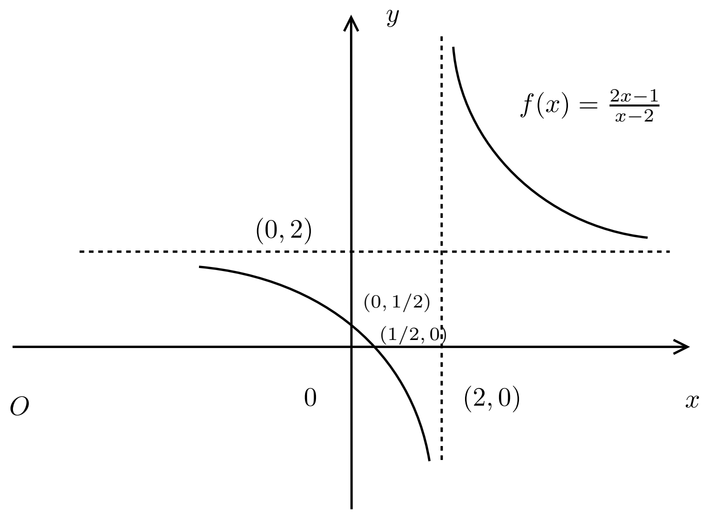
2.2η' Γραφική παράσταση συναρτήσεων.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, μια πραγματική συνάρτηση. Το υποσύνολο του επιπέδου με συντεταγμένες $(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται *γράφημα* της f. Φυσικά εννοούμε εδώ ότι οι συντεταγμένες παίρνονται ως προς ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

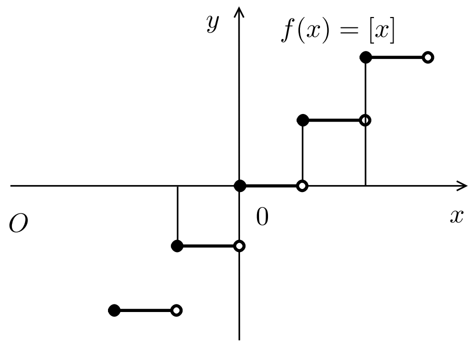
Ιδού οι γραφικές παραστάσεις (που είναι όρος συνώνυμος με το γράφημα) μερικών από τις συναρτήσεις που ορίσαμε πιο πάνω.



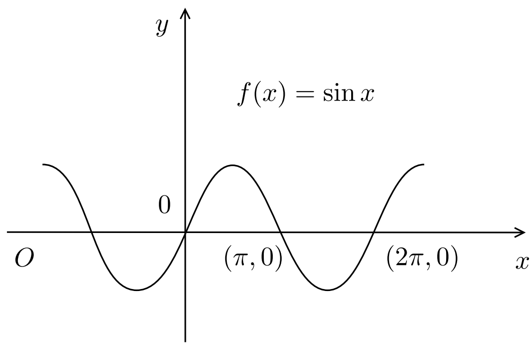




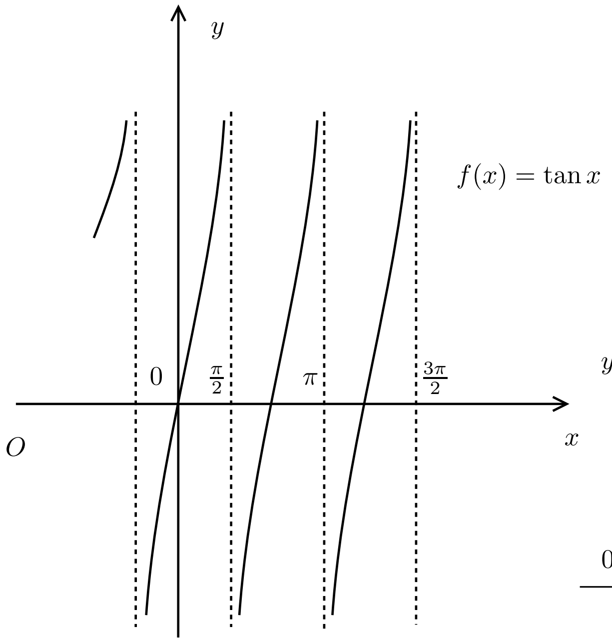
y
$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$
$(0, 2)$
$(0, 1/2)$
$(1/2, 0)$
O
0
$(2, 0)$
x

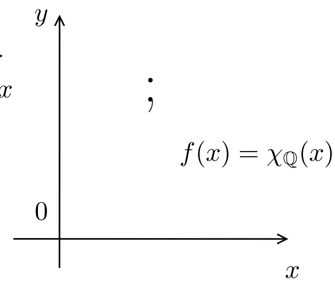


y
$f(x) = [x]$
O
0
x



y
$f(x) = \sin x$
0
O
$(\pi, 0)$
$(2\pi, 0)$
x





2.3 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x - [x], \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - [x], & [x] \leq x \leq [x] + \frac{1}{2} \\ [x] + 1 - x, & [x] + \frac{1}{2} < x < [x] + 1. \end{cases}$$

   Δείξτε ότι οι f και g είναι περιοδικές και βρείτε την περίοδο τους. Δείξτε επίσης ότι $0 \leq g(x) \leq |\sin(\pi x)|$ και βρείτε τα x για τα οποία ισχύουν ισότητες.

2. Έστω ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A που έχει μόνο εσωτερικά σημεία (τέτοια σύνολα λέγονται ανοιχτά). Έστω $x_0 \in A$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα I που περιέχει το x_0 και περιέχεται στο A και πού έχει την ιδιότητα : Για κάθε άλλο διάστημα $J \supsetneqq I$, $J \not\subset A$. Με άλλα λόγια το I είναι το «μεγαλύτερο» ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x_0 και περιέχεται στο A (*υπόδειξη:* αξίωμα συνέχειας). Δώστε παραδείγματα, αν υπάρχουν, στα οποία το A δεν είναι διάστημα, όπου το I έχει τη μορφή $(a, b), (-\infty, a), (-\infty, \infty)$.

3. Με βάση τον ορισμό των φυσικών που δώσαμε στην παρατήρηση (ι) της παραγράφου 2.2γ' δείξαμε την αρχή της τέλειας επαγωγής : «Αν $A \subset \mathbb{N}$, $1 \in A$, $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συγκλιση, συνεχεια

Ίσως η σημαντικότερη έννοια του Απειροστικού Λογισμού είναι η έννοια του *Ορίου*. Μπορούμε να πούμε ότι ο Απειροστικός Λογισμός μελετάει εκείνες τις ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων που έμμεσα ή άμεσα συνδέονται με όρια. Θα διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις: όρια συναρτήσεων $f(x)$ όταν το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό x_0, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$, όρια ακολουθιών κ.λπ. Είναι δυνατόν να ενοποιηθούν αυτές οι περιπτώσεις, όπως μας διδάσκει ένας κλάδος των Μαθηματικών που ονομάζεται *Τοπολογία*, αλλά δεν κρίνεται σκόπιμο να επιλεγεί αυτή η μέθοδος τώρα.

3.1 Ακολουθίες

3.1α΄ Σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό

Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας, όταν λέμε «η a_n συγκλίνει στον αριθμό a» είναι φυσικά, ότι οι τιμές a_n βρίσκονται «όσο θέλουμε κοντά» στο a «για αρκετά μεγάλα n».

Ας προσπαθήσουμε να μεταφράσουμε σε μαθηματικό ορισμό αυτές τις απαιτήσεις.

«Όσο θέλουμε κοντά» σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς $a_n - a$ γίνεται όσο θέλουμε μικρή «για αρκετά μεγάλα n», δηλαδή όποιος και να είναι ο θετικός ε, «για αρκετά μεγάλα n», έχουμε $|a_n - a| < \varepsilon$.

«Για αρκετά μεγάλα n» σημαίνει φυσικά ότι για κάποιο φυσικό αριθμό n_0, $n > n_0$.

Κάνοντας την σύνθεση των όσων είπαμε, φτάνουμε στον παρακάτω ορισμό, ο οποίος αποδίδεται συνήθως στο Γάλλο μαθηματικό A. Cauchy (αρχές 19ου αιώνα)

Ορισμός 3.1.1 *Η ακολουθία a_n συγκλίνει στον αριθμό a (συμβολισμός: $\lim a_n$ ή $a_n \to a$), αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός n_0 ώστε η ανισότητα $n > n_0$ να συνεπάγεται $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Μια λίγο «ποιοτική» έκφραση που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί παλιότερα ήταν η εξής:

«$a_n \to a$, αν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, η διαφορά $a_n - a$ μπορεί *να γίνει* (υπάρχουν n) *και να μείνει* (για όλα τα $n > n_0$), σε απόλυτη τιμή, μικρότερη του ε».

Μίλαγαν επίσης για «δυνάμει» άπειρο και «γίγνεσθαι» άπειρο και άλλες «φιλοσοφίες», για τις οποίες η συμβουλή στον νεοεισαγόμενο στο θέμα είναι μία και μόνο: *να τις αποφεύγει.*

Παραδείγματα:

(i) $a_n = 1/n \to 0$. Πραγματικά, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός n_0 ώστε $n_0\varepsilon > 1$ (γιατί;), επομένως και $n\varepsilon > 1$ για όλα τα $n > n_0$. Με άλλα λόγια υπάρχει n_0 ώστε $1/n = |1/n - 0| < \varepsilon$ για όλα τα $n > n_0$, που αποδεικνύει ότι $1/n \to 0$.

(ii) $a_n = n$. Στη περίπτωση αυτή δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$. Πραγματικά αν υπήρχε τέτοιο a τότε, παίρνοντας π.χ. $\varepsilon = 1$, θα υπήρχε και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$, επομένως $a_n = n < a + 1$, για όλα τα $n > n_0$, το οποίο είναι άτοπο.

(iii) $a_n = (-1)^n$. Και πάλι δεν υπάρχει πραγματικός a ώστε $a_n \to a$. Διαισθητικά αυτό είναι φανερό γιατί οι ζυγοί όροι της ακολουθίας (a_{2n}, $n \in \mathbb{N}$) είναι 1 και οι μονοί -1. Ας μεταφράσουμε σε απόδειξη αυτή την διαισθητική εικόνα. Έστω $a_n \to a$ και ας πάρουμε πάλι $\varepsilon = 1$. Θα υπήρχε τότε n_0 ώστε $|a_n - a| < 1$ για όλα τα $n > n_0$. Φυσικά υπάρχουν και μονά και ζυγά $n > n_0$. Συνεπώς, θα έπρεπε να ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες : $|1 - a| < 1$ και $|-1 - a| < 1$ και επομένως $1 + 1 = 2 > |1 - a| + |1 + a| \geq |(1 - a) + (1 + a)| = 2$, που φυσικά είναι άτοπο.

3.1β' Σύγκλιση στο $\pm\infty$

Στην περίπτωση του παραδείγματος (ii) οι όροι της ακολουθίας μπορούν να ξεπεράσουν, και να μείνουν, οι μεγαλύτεροι από οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, οσονδήποτε μεγάλο. Πραγματικά, αν $M \in \mathbb{R}$ τότε από την Αρχιμήδεια διάταξη των πραγματικών συνάγουμε άμεσα ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > M$ και άρα $n > M$ για όλα τα $n > n_0$. Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η a_n συγκλίνει (μερικοί συγγραφείς λένε αποκλίνει) στο $+\infty$. Ανάλογα ορίζουμε τη σύγκλιση στο $-\infty$ (για παράδειγμα $a_n = (-n) \to -\infty$). Ακριβέστερα:

Ορισμός 3.1.2 *Μια ακολουθία α_n συγκλίνει στο $+\infty$ ($-\infty$) αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε $\alpha_n > M$ ($\alpha_n < m$) για όλα τα $n > n_0$. Συμβολισμός: $\lim \alpha_n = +\infty$ ($\lim \alpha_n = -\infty$) ή $\alpha_n \to +\infty$ ($\alpha_n \to -\infty$).*

Συγκλίνουσες θα ονομάζουμε τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε ένα πραγματικό αριθμό. Ειδικότερα οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 λέγονται *μηδενικές*. Είναι φανερό ότι «$\alpha_n \to \alpha$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\alpha_n - \alpha$ είναι μηδενική». Θα λέμε αποκλίνουσες τις ακολουθίες που δεν συγκλίνουν ούτε σε πραγματικό αριθμό ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Είναι επίσης φανερό από τον ορισμό ότι αν αλλάξουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας ακολουθίας τότε η συμπεριφορά της ως προς την σύγκλιση δεν αλλάζει. Με άλλα λόγια: «Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n > n_0$, τότε η α_n συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό, στο $+\infty$, στο $-\infty$) αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για τη β_n».

Μια άλλη απλή (και πολλή σημαντική) ιδιότητα είναι η εξής: *αν $\alpha_n \to \alpha$ και $\alpha_n \to \beta$, τότε $\alpha = \beta$*. Με άλλα λόγια, *το όριο* μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό. (Φυσικά όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας ονομάζεται ο αριθμός $\lim \alpha_n$).

Η απόδειξη είναι απλή αλλά ο συλλογισμός είναι πολύ χρήσιμος και σημαντικός. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\alpha_n \to \alpha$ και $\alpha_n \to \beta$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν n_1, n_2 ώστε $n > n_1 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, $n > n_2 \Rightarrow |\alpha_n - \beta| < \varepsilon$. Για κάποιο λοιπόν $n > \max(n_1, n_2)$ θα έχουμε

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha_n - \alpha) - (\alpha_n - \beta)| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Αφού το ε, άρα και το 2ε, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το αποτέλεσμα με άλλα λόγια είναι: «Ο αριθμός $|\alpha - \beta|$ είναι μικρότερος κάθε θετικού αριθμού». Αν $\alpha \neq \beta$ τότε $|\alpha - \beta| > 0$ και μπορούμε να πάρουμε π.χ. $\varepsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$, οπότε συνάγουμε $2 < 1$, που φυσικά είναι άτοπο και επομένως $\alpha = \beta$.

Παρατήρηση 3.1.3 Πριν τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί μίλαγαν για θετικές ποσότητες μικρότερες κάθε άλλου θετικού αριθμού και τις έλεγαν απειροστά. Μόλις δείξαμε, ότι τέτοιες θετικές ποσότητες *δεν υπάρχουν*. Τη σοβαρή αυτή «γκάφα» επεσήμανε ένας Ιρλανδός φιλόσοφος (B. Berkley), σε γράμμα του προς «άπιστο μαθηματικό» της εποχής, όπου λίγο πολύ έλεγε: «Διαμαρτύρομαι για τις κουταμάρες που γράφετε»· και είχε δίκιο! Μετά από ένα δύο αιώνες οι μαθηματικοί διόρθωσαν την κατάσταση εφαρμόζοντας τη λεγόμενη «εψιλοντική».

«Εψιλοντική» λέγεται, ίσως λίγο κοροϊδευτικά, η μέθοδος που ακολουθήσαμε στον ορισμό του ορίου με το ε.

Μια άλλη απλή ιδιότητα είναι η επονομαζόμενη «σάντουιτς»:

Πρόταση 3.1.4 *Αν $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ και $\lim \alpha_n = \lim \gamma_n = \alpha$, τότε και $\lim \beta_n = \alpha$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα υπάρχουν φυσικοί n_1, n_2 ώστε $n > n_1 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ και $n > n_2 \Rightarrow |\gamma_n - \alpha| < \varepsilon$. Αν λοιπόν $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ και $|\gamma_n - \alpha| < \varepsilon$, επομένως και $\max\{|\alpha_n - \alpha|, |\gamma_n - \alpha|\} < \varepsilon$ (ποια

είναι η γεωμετρική σημασία αυτού του συλλογισμού;).
Παρατηρούμε τώρα ότι αν $\alpha \le \beta_n$ τότε $|\beta_n - \alpha| \le |\gamma_n - \alpha|$ και αν $\alpha > \beta_n$ τότε $|\beta_n - \alpha| < |\alpha_n - \alpha|$. Στην οποιαδήποτε λοιπόν περίπτωση $|\beta_n - \alpha| \le \max\{|\alpha_n - \alpha|, |\gamma_n - \alpha|\}$ και επομένως $n > n_0 \Rightarrow |\beta_n - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $\beta_n \to \alpha$. □

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με δύο ακόμη σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες είναι επίσης διαισθητικά φανερές, για την απόδειξη των οποίων θα κάνουμε ουσιαστική χρήση του αξιώματος της συνέχειας. Τις δίνουμε με τη μορφή θεωρήματος.

Θεώρημα 3.1.5

(i) *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

(ii) *Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Οφείλουμε κατ' αρχάς να εξηγήσουμε τους όρους που εμφανίζονται στην διατύπωση του θεωρήματος.

Έστω α_n μια ακολουθία.

Αν $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε η α_n λέγεται *αύξουσα*.
Αν $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε η α_n λέγεται *φθίνουσα*.
Αν $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε η α_n λέγεται *γνήσια αύξουσα*.
Αν $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε η α_n λέγεται *γνήσια φθίνουσα*.

Αν η α_n είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα, τότε λέγεται (γνήσια) *μονότονη*.

Μια ακολουθία λέγεται *φραγμένη*, αν το σύνολο $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|\alpha_n| \le M$ για όλα τα n.

Αν από τους όρους μιας ακολουθίας αφαιρέσουμε μερικούς (πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους), με τέτοιο τρόπο ώστε να μείνει πάλι μια ακολουθία, τότε την ακολουθία αυτή τη λέμε υπακολουθία της α_n. Ιδού ο ακριβής ορισμός:

Ορισμός 3.1.6 *Η ακολουθία β_n είναι υπακολουθία της α_n αν υπάρχει μια γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε $\beta_n = \alpha_{k_n}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.*

Λίγη σκέψη δείχνει ότι «αν μια ακολουθία συγκλίνει (ή συγκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$) τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο» (πραγματικά έστω $\alpha_n \to \alpha$, α_{k_n} μια υπακολουθία της α_n και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε $n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ και επειδή $k_n \ge n$ (γιατί;) για όλα τα n, $n > n_0 \Rightarrow |\alpha_{k_n} - \alpha| < \varepsilon$).

Απόδειξη του Θεωρήματος:

(i) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η α_n είναι αύξουσα (η απόδειξη για φθίνουσες είναι παρόμοια). Το αξίωμα της συνέχειας μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του αριθμού $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ισχυρίζομαι, όπως και φυσικά αναμένεται, ότι $\alpha_n \to \alpha$. Πραγματικά έστω $\varepsilon > 0$, τότε θα υπάρχει n_0 ώστε $\alpha_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ (αλλιώς το $\alpha - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα μικρότερο του α). Για κάθε $n > n_0$, επειδή η α_n είναι αύξουσα, θα έχουμε $\alpha \ge \alpha_n \ge \alpha_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ και επομένως $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

(ii) Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι θα υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $-M < \alpha_n < M$ για όλα τα n. Θεωρώ το σύνολο $\mathcal{A}$ των πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: «Αν $x \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχουν άπειρα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha_n \geq x$», δηλαδή $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχουν άπειρα } n \text{ με } \alpha_n \geq x\}$

Προφανώς $-M \in \mathcal{A}$ και $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \leq M$, δηλαδή το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό και φραγμένο προς πάνω. Έστω λοιπόν (αξίωμα συνέχειας) $\alpha = \sup \mathcal{A}$. Θα φτιάξω μια υπακολουθία της α_n που να συγκλίνει στο α.

Στο διάστημα $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ υπάρχουν σίγουρα άπειροι όροι της ακολουθίας μας (αλλιώς το $\alpha - 1$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του $\mathcal{A}$· γιατί;). Έστω α_{k_1} ένας τέτοιος όρος. Στο διάστημα $(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2})$ υπάρχουν επίσης άπειροι της ακολουθίας μας και άρα σίγουρα ένας, έστω ο α_{k_2}, με $k_2 > k_1$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\alpha_{k_\rho} \in (\alpha - \frac{1}{\rho}, \alpha + \frac{1}{\rho})$, $\rho = 1, \ldots, n$, και ο ίδιος συλλογισμός μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $k_{n+1} > k_n$ ώστε $\alpha_{k_{n+1}} \in (\alpha - \frac{1}{n+1}, \alpha + \frac{1}{n+1})$. Έχουμε λοιπόν $\alpha - \frac{1}{\rho} < \alpha_{k_\rho} < \alpha + \frac{1}{\rho}$, $\rho \in \mathbb{N}$. Η ιδιότητα σάντουιτς δείχνει τώρα ότι πράγματι η υπακολουθία $\beta_\rho = \alpha_{k_\rho}$ συγκλίνει στο α, διότι οι ακολουθίες $\alpha - \frac{1}{\rho}$ και $\alpha + \frac{1}{\rho}, \rho \in \mathbb{N}$, συγκλίνουν στο α (γιατί;).

□

3.1γ' Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Είναι αρκετά εύκολο να δείξει κανείς, ότι απλές πράξεις πάνω στους όρους συγκλινουσών ακολουθιών οδηγούν στα αναμενόμενα αποτελέσματα στα όρια τους. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά μερικές από αυτές τις ιδιότητες και θα παραπέμψουμε τις υπόλοιπες (που θα πρέπει να τις βλέπει ήδη σαν ρουτίνα ο αναγνώστης) στις ασκήσεις.

Πρόταση 3.1.7 *Αν $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta$, τότε $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n \to \alpha + \beta$*

Απόδειξη: Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_1$ συνεπάγεται $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon/2$ και $n > n_2$ συνεπάγεται $|\beta_n - \beta| < \varepsilon/2$ και επομένως αν $n > \max(n_1, n_2)$ τότε

$$|\gamma_n - (\alpha + \beta)| = |(\alpha_n - \alpha) + (\beta_n - \beta)| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Πρόταση 3.1.8 *Αν $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta$, τότε $\alpha_n \beta_n = \gamma_n \to \alpha \cdot \beta$.*

Εδώ η απόδειξη είναι πιο ενδιαφέρουσα. Αρχίζουμε με ένα απλό, αλλά σημαντικό, λήμμα.

Λήμμα 3.1.9 *Αν $\alpha_n \to \alpha$, τότε η α_n είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Πραγματικά, παίρνοντας $\varepsilon = 1$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε αν $n > n_0$ να έχουμε $|\alpha_n - \alpha| < 1$ και επομένως αν $n > n_0$ τότε $|\alpha_n| < |\alpha| + 1$. Έχουμε λοιπόν προφανώς $|\alpha_n| \leq \max\{|\alpha|+1, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{n_0}|\}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η α_n είναι φραγμένη. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.8: Γυρνάμε τώρα στην απόδειξη της $\alpha_n\beta_n \to \alpha \cdot \beta$. Το τέχνασμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πολύ συνηθισμένο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι α_n, β_n συγκλίνουν θα είναι φραγμένες, δηλαδή υπάρχουν M_1, M_2 ώστε $|\alpha_n| < M_1$, $|\beta_n| < M_2$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θα έχουμε επίσης (το τέχνασμα):

$$\begin{aligned} |\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| &= |\alpha_n\beta_n - \alpha_n\beta + \alpha_n\beta - \alpha\beta| \leq \\ &\leq |\alpha_n||\beta_n - \beta| + |\beta||\alpha_n - \alpha| \leq \\ &\leq M_1|\beta n - \beta| + |\beta||\alpha_n - \alpha|. \end{aligned}$$

Θα αρκούσε λοιπόν να βρούμε n_0 τέτοιο ώστε για $n > n_0$ κάθε προσθετέος του δεξιού μέλους της ανισότητας να είναι μικρότερος του $\varepsilon/2$. Αυτό όμως είναι σίγουρα δυνατό, γιατί υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_1$ έχουμε

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)},$$

$n > n_2$ και συνεπώς $|\beta_n - \beta| < \varepsilon/(2M_1)$, οπότε $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ συνεπάγεται

$$M_1|\beta_n - \beta| + |\beta||\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\beta|}{|\beta| + 1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Ερώτηση: γιατί πήραμε $\varepsilon/\big(2(|\beta| + 1)\big)$ και όχι $\varepsilon/\big(2|\beta|\big)$;

Η ειδική περίπτωση μιας *σταθεράς* ακολουθίας α_n, δηλαδή $\alpha_n = \alpha$ για όλα τα n, οπότε τετριμμένα $\alpha_n \to \alpha$, μας δίνει τη χρήσιμη ιδιότητα:

Πρόταση 3.1.10 *Αν $\beta_n \to \beta$ τότε $\gamma_n = \alpha\beta_n \to \alpha\beta$.*

(δείξτε τη σχέση αυτή και απ' ευθείας από τον ορισμό).

Αν ζητήσουμε ανάλογο θεώρημα για το πηλίκο πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί στους παρονομαστές. Πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση 3.1.11 *Αν $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ και $\beta \neq 0$ τότε*

(i) *Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_0 \Rightarrow |\beta_n| > \frac{|\beta|}{2} > 0$*

(ii) *Αν $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ για $n > n_0$ και $\gamma_n =$ οτιδήποτε για $n < n_0$, τότε $\gamma_n \to \frac{\alpha}{\beta}$.*

Η υπόθεση $\beta \neq 0$ είναι ουσιαστική (αλλιώς δεν έχει νόημα το α/β). Ο κάπως παράξενος ορισμός της γ_n γίνεται για τεχνικούς λόγους μόνο (θέλουμε να αποφύγουμε την περίπτωση $\beta_n = 0$ για κάποια n).

Απόδειξη: Το (i) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό με $\varepsilon = |\beta|/2 > 0$. Για το (ii) αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\delta_n = 1/\beta_n$ για $n > n_0$ και οτιδήποτε για $n \leq n_0$, συγκλίνει στο $1/\beta$ και μετά να εφαρμόσουμε την ιδιότητα για το γινόμενο συγκλινουσών ακολουθιών. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του (i) μπορούμε να υποθέσουμε $|\beta_n| > |\beta|/2$ για $n > n_0$, οπότε θα έχουμε

$$\left|\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta_n - \beta|}{|\beta||\beta_n|} \leq |\beta_n - \beta|\frac{2}{|\beta|^2},$$

διότι $|\beta_n| > |\beta|/2$. Επειδή $\beta_n \to \beta$ υπάρχει n, ώστε $n > n_1 \Rightarrow |\beta_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$. Αν λοιπόν $n > \max\{n_0, n_1\}$ τότε $|\delta_n - 1/\beta| < \varepsilon$. □

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν, σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμη και όταν η μία ή και οι δύο ακολουθίες α_n, β_n συγκλίνουν στο $= +\infty$ ή στο $-\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_n \to +\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to \beta & \Longrightarrow \alpha_n + \beta_n \to +\infty \\
\alpha_n \to +\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to +\infty & \Longrightarrow \alpha_n + \beta_n \to +\infty \\
\alpha_n \to +\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to \beta(\neq 0) & \Longrightarrow \alpha_n \to (\mathrm{sgn}\beta)\infty
\end{array}$$

φυσικά: $(\mathrm{sgn}\beta)\infty = \left\{\begin{array}{ll} +\infty & \text{αν} \quad \beta > 0 \\ -\infty & \text{αν} \quad \beta < 0 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_n \to +\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to +\infty & \Longrightarrow \alpha_n\beta_n \to +\infty \\
\alpha_n \to -\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to \beta(\neq 0) & \Longrightarrow \alpha_n\beta_n \to (-\mathrm{sgn}\beta)\infty \\
\alpha_n \to -\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to +\infty & \Longrightarrow \alpha_n\beta_n \to -\infty \\
\alpha_n \to -\infty \ \ \& \ \ \beta_n \to -\infty & \Longrightarrow \alpha_n\beta_n \to +\infty \\
\alpha_n \to \pm\infty & \Longrightarrow 1/\alpha_n \to 0
\end{array}$$

Οι αποδείξεις είναι ανάλογες (λίγο πιο εύκολες) με αυτές που ήδη δώσαμε. Εδώ πρέπει να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση: *Δεν αναφέραμε κανένα αποτέλεσμα που να αντιστοιχεί σε πράξεις της μορφής* $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Αυτό δεν είναι τυχαίο· δεν υπάρχουν αντίστοιχα αποτελέσματα. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση $\infty - \infty$. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχουν ακολουθίες α_n, β_n ώστε $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$ ενώ η $\beta_n - \alpha_n$ μπορεί να συγκλίνει σε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, ή να συγκλίνει στο $+\infty$, ή να συγκλίνει στο $-\infty$ ή και να αποκλίνει. Πραγματικά

(i) $\alpha_n = n$, $\beta_n = n + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Εδώ $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$, ενώ $\beta_n - \alpha_n \to \lambda$,

(ii) $\alpha_n = n$, $\beta_n = n + (-1)^n$. Εδώ $\beta_n \geq n - 1 \to +\infty$, άρα $\beta_n \to +\infty$, και επίσης $\alpha_n \to +\infty$, ενώ $\beta_n - \alpha_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει.

(iii) $\alpha_n = n$, $\beta_n = 2n$. Έχουμε $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$, ενώ $\beta_n - \alpha_n = n \to +\infty$.

(iv) $\alpha_n = 2n$, $\beta_n = n$. Έχουμε $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$ ενώ $\beta_n - \alpha_n = -n \to -\infty$.

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις περιπτώσεις $0 \cdot \infty$ ($1/n \cdot n \to 1$, $\frac{1}{n} \cdot n^2 \to +\infty$, $\frac{1}{n} \cdot (-n^2) \to -\infty$, $\frac{(-1)^n}{n} \cdot 2^n \to$ δεν συγκλίνει), $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$.

Οι απλές ιδιότητες που αναφέραμε σε αυτή την παράγραφο έχουν μεγάλη πρακτική σημασία, γιατί σε πολλές περιπτώσεις μας απαλλάσσουν από τη συχνά επίπονη «εψιλοντική». Για παράδειγμα $\frac{2n-n^2+1}{n^3} \to 0$, διότι

$$\frac{2n-n^2+1}{n^3} = \frac{2}{n^2} + \left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3} = \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + (-1) \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \to$$

$$\to (2 \cdot 0) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0.$$

3.2 Σύγκλιση και συνέχεια συναρτήσεων.

Για να αποφύγουμε επαναλήψεις θα χρησιμοποιούμε τον όρο συνάρτηση αντί του όρου πραγματική συνάρτηση.

3.2α' Όρια συναρτήσεων.

Στις ακολουθίες εξετάζαμε που «τείνουν» οι τιμές α_n, όταν $n \to +\infty$. Για το λόγο αυτό μάλιστα γράφουμε καμιά φορά $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$, αντί $\lim \alpha_n$. Στην περίπτωση των συναρτήσεων έχουμε περισσότερες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε «όρια» συναρτήσεων $f(x)$ όταν το x τείνει σε ένα πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι φυσικά η εξής: «Η $f(x)$ συγκλίνει στον αριθμό α, όταν το x τείνει στο x_0, αν η παράσταση $|f(x)-\alpha|$ μπορεί να γίνει *όσο θέλουμε μικρή, αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0*». Είναι πολύ εύκολο, κατά αναλογία με ότι κάνουμε για τις ακολουθίες, να δώσουμε ένα ακριβή ορισμό, εφ' όσον όμως προηγουμένως ξεκαθαρίσουμε για ποια x_0 θα μιλάμε.

Για να αποκτήσει ουσιαστικό νόημα η έκφραση «αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0», είναι φυσιολογικό να απαιτήσουμε το εξής:

«*Σε κάθε δ-περιοχή, $\delta > 0$, του x_0, δηλαδή σε κάθε ανοιχτό διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του x_0, υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που εξετάζουμε διαφορετικά από το x_0*». Τέτοια σημεια x_0 λέγονται *σημεία συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού.

Έτσι για παράδειγμα όλα τα σημεία των διαστημάτων που θεωρήσαμε στην παράγραφο 2.1α', καθώς και τα άκρα τους, είναι σημεία συσσώρευσης αυτών των διαστημάτων. Τέτοια διαστήματα, ή πεπερασμένες ενώσεις τέτοιων διαστημάτων, θα είναι, σχεδόν αποκλειστικά, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα. Δίνουμε τώρα τον αναμενόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 *Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 υπάρχει και ισούται με α, αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f, $0 < |x-x_0| < \delta$ συνεπάγεται ότι $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$.*

Στην περίπτωση που το όριο υπάρχει και ισούται με α θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ ή $f(x) \to \alpha,\ x \to x_0$.

Τελείως ανάλογα με ότι είπαμε για ακολουθίες ορίζουμε πότε το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 3.2.2 *Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε λέμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ αν ισχύει το εξής: για κάθε $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M(f(x) < M)$.*

Μπορούμε ακόμη να ορίσουμε και όρια της μορφής $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Φυσικά εδώ θα έπρεπε με κάποια έννοια το $+\infty$ ή το $-\infty$ να είναι «σημείο συσσώρευσης» του πεδίου ορισμού.

Ορισμός 3.2.3 *Το $+\infty$ $(-\infty)$ λέγεται σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, αν κάθε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ $\big((-\infty, \alpha)\big)$ περιέχει σημεία του A.*

Στις συνηθισμένες περιπτώσεις που θα παρουσιαστούν σε αυτό το μάθημα, τα πεδία ορισμού θα περιέχουν ένα ολόκληρο διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ $\big((-\infty, \alpha)\big)$, οπότε το $+\infty(-\infty)$ θα είναι αυτόματα σημείο συσσώρευσης. Δίνουμε τώρα τον αντίστοιχο ορισμό:

Ορισμός 3.2.4 *Αν το $+\infty(-\infty)$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε, λέμε ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $(\lim_{x\to-\infty} f(x))$ υπάρχει και ισούται με α, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει M, ώστε για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, $x > M(x < M) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Λέμε επίσης ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $M' \in \mathbb{R}$, ώστε για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f, $x > M' \Rightarrow f(x) > M$. Ανάλογα ορίζουμε τα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.*

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ πλησιάζουν έναν αριθμό α (ή το $+\infty$ ή το $-\infty$), όταν το x πλησιάζει το x_0 μένοντας πάντα μεγαλύτερο ή πάντα μικρότερο του x_0. Λέμε τότε ότι υπάρχει το *πλευρικό όριο* της f, όταν το x τείνει στο x_0, *από δεξιά* ή *από αριστερά* αντίστοιχα. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ή $\lim f(x)$, $x \to x_0^+$, ή $f(x_0^+)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ή $\lim f(x)$, $x \to x_0^-$, ή $f(x_0^-)$, αντίστοιχα.

Σημειώστε ότι τέτοια όρια δεν ορίζονται για $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ (αν θέλετε, από τη φύση τους τέτοια όρια είναι πλευρικά).

Φυσικά για να μιλάμε για πλευρικά όρια, πρέπει να ισχύει κάτι παραπάνω από το να είναι το x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Πιο συγκεκριμένα για να ορίσουμε το $f(x_0^+)$, θα πρέπει για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$ και για να ορίσουμε το $f(x_0^-)$, θα πρέπει να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$. Έτσι, για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να μιλάμε για το $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)$ στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα της μορφής (α, β), ενώ κατ' αρχάς μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$. Ιδού τώρα ο ακριβής ορισμός.

Ορισμός 3.2.5 *Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f έχει σημεία σε κάθε διάστημα της μορφής $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, και αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f, $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$, τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από δεξιά και ισούται με α (Συμβολισμός: $f(x_0^+) = \alpha$). Ανάλογα ορίζεται το $f(x_0^-) = \alpha$ και τα $f(x_0^+) = \pm\infty$, $f(x_0^-) = \pm\infty$.*

Σημειώνουμε ότι τα όρια συναρτήσεων αν υπάρχουν, όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών, είναι μοναδικά.

Για να αποφύγουμε επαναλήψεις ρουτίνας θα υποθέτουμε ότι όπου εμφανίζονται όρια για $x \to x_0$, το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης των αντίστοιχων πεδίων ορισμού, έστω και αν δεν το αναφέρουμε ρητά.

3.2β' Ιδιότητες ορίων

Αν μια συνάρτηση είναι σταθερά, δηλαδή $f(x) = c$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, τότε $|f(x) - c| = 0$ για όλα τα x και επομένως (τετριμμένο) $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$. Επίσης τετριμμένο είναι να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$ αν $f(x) = x$.

Λίγο πιο δύσκολο, αλλά πάλι εφαρμογή ρουτίνας του ορισμού, είναι να δείξουμε ότι αν η $f(x)$ είναι πολυωνυμική, $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ας το δείξουμε για την $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε ένα δ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για όλα τα x με $0 < |x - x_0| < \delta$. Έχουμε όμως

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - 2x - x_0^2 + 2x_0| \\ &= |x - x_0||x + x_0 - 2| \\ &\leq |x - x_0|(|x| + |x_0| + 2). \end{aligned}$$

Αν $|x - x_0| < 1$, τότε $|x| < |x_0| + 1$ και επομένως, για $|x - x_0| < 1$, έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|(2|x_0| + 3)$.
Αρκεί λοιπόν να βρούμε το δ έτσι ώστε, για $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει η παραπάνω ανισότητα και συγχρόνως $|x - x_0|(2|x_0| + 3) < \varepsilon$. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0 + 3|)\}$, το οποίο προφανώς είναι μεγαλύτερο του μηδενός.

Ο συλλογισμός αυτός είναι τυπικός στην εφαρμογή του «εψιλοντικού» ορισμού του ορίου. Μερικά όμως απλά και αναμενόμενα αποτελέσματα για όρια μπορούν συχνά να μας απαλλάξουν από αυτόν. Ιδού μερικά από αυτά:

Πρόταση 3.2.6 *Ας είναι f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα σύνολο A και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Αν τα $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχουν και τα όρια : $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x))$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))$ και ισούνται με $\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ και $(\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x))$ αντίστοιχα. Αν επιπλέον $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ υπάρχει και ισούται με $\lim_{x\to x_0} f(x)/\lim_{x\to x_0} g(x)$*

Φυσικά, με μια (τετριμμένη) επαγωγή, το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται σε πεπερασμένα αθροίσματα και γινόμενα συναρτήσεων. Αν πιστέψουμε προς στιγμήν αυτή την πρόταση, είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι, τόσο για πολυώνυμα όσο και για ρητές συναρτήσεις $f(x)$, ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους. [Σημειώστε ότι στην περίπτωση των ρητών συναρτήσεων οι ρίζες του παρανομαστή δεν περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού. Οι ρίζες αυτές είναι όμως σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού (γιατί;) και άρα κατ' αρχήν έχει νόημα να εξετάσουμε το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ακόμη κι αν το x_0 είναι ρίζα του παρανομαστή. Παραπέμπουμε τη μελέτη αυτής της περίπτωσης στις ασκήσεις.]

Πραγματικά, κάθε μονώνυμο $\alpha_\kappa x^\kappa$ είναι γινόμενο της σταθερής συνάρτησης α_κ και κ συναρτήσεων ίσων με x, άρα $\lim_{x\to x_0} \alpha_\kappa x^\kappa = \alpha_\kappa x_0^\kappa$.

Παρατηρώντας ότι κάθε πολυώνυμο είναι άθροισμα μονωνύμων και χρησιμοποιώντας πάλι την προηγούμενη πρόταση, έχουμε άμεσα το ζητούμενο για πολυώνυμα. Φυσικά το αποτέλεσμα για ρητές συναρτήσεις είναι άμεσο πόρισμα του τελευταίου μέρους του θεωρήματος.

Η απόδειξη της πρότασης είναι ανάλογη με την αντίστοιχη για ακολουθίες. Η περίπτωση $f(x) + g(x)$ είναι η πιο εύκολη και την παραλείπουμε.

Ας εξετάσουμε το $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))$. Πρώτα ας δείξουμε το εύκολο και σημαντικό λήμμα:

Λήμμα 3.2.7 *Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και $M \in \mathbb{R}$, ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της f για το οποίο ισχύει $0 < |x - x_0| < \delta$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ και ας πάρουμε $\varepsilon = 1$ στον ορισμό του ορίου. Θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$ συνεπώς $|f(x) - \alpha| < 1$, για κάθε x του πεδίου ορισμού, επομένως και $|f(x)| < |\alpha| + 1$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $M = |\alpha| + 1$.

Τώρα το κλασικό τέχνασμα. Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha, \lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ και $\varepsilon > 0$. Θέλουμε ένα $\delta > 0$ ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x)g(x) - \alpha\beta| < \varepsilon$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \alpha\beta| &\leq |f(x)g(x) - \alpha g(x)| + |\alpha g(x) - \alpha\beta| \\ &= |g(x)||f(x) - \alpha| + |\alpha||g(x) - \beta|. \end{aligned}$$

Μόλις δείξαμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $0 < |x - x_0| < \delta_1$ συνεπάγεται $|g(x)| < |\beta| + 1$. Υπάρχουν ακόμα $\delta_2, \delta_3 > 0$ ώστε $0 < |x - x_0| < \delta_2$ συνεπάγεται $|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ και $0 < |x - x_0| < \delta_3$ συνεπάγεται $|g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$.

Αν λοιπόν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, το οποίο προφανώς είναι θετικό, θα έχουμε:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - \alpha\beta| < (|\beta| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} + |\alpha|\frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} < \varepsilon,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. □

Για την περίπτωση του πηλίκου δείχνουμε ένα άλλο απλό, αλλά επίσης σημαντικό, λήμμα:

Λήμμα 3.2.8 *Αν* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \neq 0$, *τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε* x *του πεδίου ορισμού της* g, $0 < |x - x_0| < \delta$ *συνεπάγεται* $|g(x)| > \frac{|\beta|}{2} > 0$.

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού (πάρτε $\varepsilon = |\beta|/2$, που είναι θετικό από την υπόθεση).

Για να αποφύγουμε περιπλοκές ρουτίνας, ας υποθέσουμε ότι οι f και g έχουν πεδία ορισμού που περιέχουν μια περιοχή του x_0. Μικραίνοντας αν χρειαστεί το δ του τελευταίου αποτελέσματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g ορίζονται στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $|g(x)| > \frac{|\beta|}{2}$ για $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - g(x)|}{|\beta||g(x)|} \leqslant \frac{2}{|\beta|^2}|g(x) - \beta|,$$

$|x - x_0| < \delta$. Υπάρχει τώρα $\delta_1 > 0$ ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon|\beta|^2}{2}$$

και επομένως

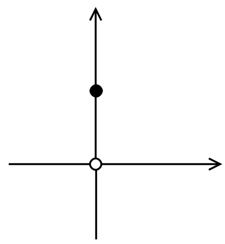
$$0 < |x - x_0| < \min\{\delta, \delta_1\} \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| < \varepsilon.$$

Συνάγουμε ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\beta}$ και το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα για γινόμενο δύο συναρτήσεων (εφαρμόστε την στις συναρτήσεις f και $1/g$).

Ας εξετάσουμε τώρα για λίγο τη σχέση μεταξύ υπάρξεως ορίου και υπάρξεως πλευρικών ορίων.

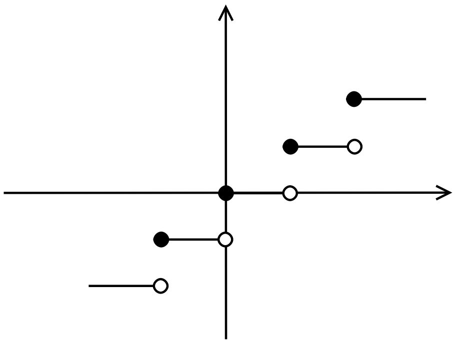
Είναι κατ' αρχάς τετριμμένο ότι *η ύπαρξη του* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *(πεπερασμένου ή απείρου) συνεπάγεται και την ύπαρξη των* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. *Το αντίστροφο δεν αληθεύει*, όπως μπορεί να δει κανείς εξετάζοντας τα παρακάτω παραδείγματα.

(i) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$



Είναι τετριμμένο να δούμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $(= 0)$

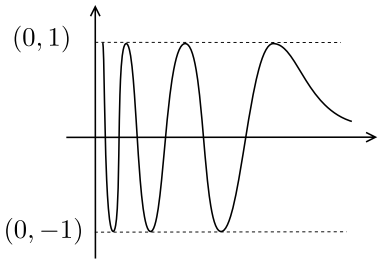
(ii) $f(x) = [x]$, $x_0 \in \mathbb{N}$ Είναι επίσης τετριμμένο να δούμε, ότι αν $x_0 \in \mathbb{Z}$, τότε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = x_0, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = x_0 - 1$, ενώ το $\lim_{x\to x_0} f(x)$



δεν υπάρχει (γιατί;).

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

Είναι προφανές ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Η κατάσταση από δεξιά όμως είναι πολύ χειρότερη. Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Διαισθητικά, κοιτώντας τη γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι η $f(x)$ αντί να πλησιάζει έναν αριθμό, όταν $x \to 0^+$, πλησιάζει μάλλον ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα: $x = 0, -1 \leq y \leq 1$.



Σχήμα 3.1

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι $f(0+)$ υπάρχει και ισούται με α. Θα υπάρχει τότε $\delta > 0$ ώστε $0 < x < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - \alpha| < 1/2$. Ισχυρίζομαι ότι στο διάστημα $(0, \delta)$ υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $1/x_1 = k\pi$ και $1/x_2 = 2k\pi + \pi/2$.

Τότε $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$ και επομένως $|0-\alpha| < 1/2$, $|1-\alpha| < 1/2$ οπότε και

$$1 = |(0-\alpha) - (1-\alpha)| \leq |0-\alpha| + |1-\alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

που είναι φυσικά άτοπο. Για να δείξουμε τώρα την ύπαρξη των x_1, x_2, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/(k\pi) < \delta$ και $1/(2k\pi) + \pi/2 < \delta$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι σχεδόν τετριμμένος. Αρκεί για παράδειγμα να πάρουμε $k = [1/\delta] + 1$.

3.2γ' Συνέχεια συναρτήσεων

Η διαισθητική εικόνα της σημαντικής αυτής έννοιας αποδίδεται συχνά με την έκφραση: η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει «κοψίματα». Αυτό δεν περιγράφει πάντοτε καλά την κατάσταση. Υπάρχουν, για παράδειγμα, συναρτήσεις καλά ορισμένες, που η γραφική τους παράσταση δεν είναι πολύ διαφωτιστική. Παραδείγματος χάριν, το τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου ή ακόμη χειρότερο παράδειγμα, η συνάρτηση του Dirichlet

$$f(x) = x_Q = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Η πλήρης κατανόηση του ακριβούς ορισμού είναι επομένως απαραίτητη.

Κατ' αρχάς η συνέχεια ορίζεται «τοπικά», δηλαδή ορίζουμε τι σημαίνει *συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο* x_0 *του πεδίου ορισμού της*. Προσέξτε ότι σε αντίθεση με ότι λέγαμε στα όρια, εδώ απαιτούμε το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Ονομάζουμε κατόπιν μια συνάρτηση συνεχή σε ένα υποσύνολο A του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A. Ιδού ο ακριβής ορισμός.

Ορισμός 3.2.9 *Αν το* x_0 *ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης* f*, και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της* f*,* $|x-x_0| < \delta$ *τότε* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*, τότε η* f *λέγεται συνεχής στο* x_0*.*

Στην περίπτωση που το x_0 είναι και σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, μια απλή ματιά στους δύο ορισμούς ορίου και συνέχειας δείχνει ότι:

Πρόταση 3.2.10 *Η συνέχεια της* f *στο* x_0 *είναι ισοδύναμη με τη σχέση*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

δηλαδή με την ύπαρξη του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *και την ισότητά του με* $f(x_0)$*.*

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, σε αυτό το μάθημα τα πεδία ορισμού θα είναι διαστήματα ή πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων, οπότε κάθε x_0 στο πεδίο ορισμού θα είναι σημείο συσσώρευσης, και επομένως θα ισχύει η ισοδυναμία των δύο ορισμών. Ειδικότερα τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου μας οδηγούν άμεσα στο συμπέρασμα:

Πρόταση 3.2.11 *Τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους.*

Ανάλογα με τον ορισμό των πλευρικών ορίων ορίζουμε *συνέχεια από δεξιά* και *συνέχεια από αριστερά*.

Ορισμός 3.2.12 *Αν το* x_0 *ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης* f *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε σημείο* x *του πεδίου ορισμού,* $0 \leq x - x_0 < \delta$ *συνεπάγεται* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $(0 \leq x_0 - x < \delta$ *συνεπάγεται* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$*, τότε η* f *λέγεται συνεχής από δεξιά (αριστερά) στο* x_0*.*

Είναι φανερό ότι η ύπαρξη του $f(x_0^+)$ και η ισότητα $f(x_0^+) = f(x_0)$ συνεπάγονται συνέχεια από δεξιά και η ύπαρξη του $f(x_0^-)$ και η ισότητα $f(x_0^-) = f(x_0)$ συνέχεια από αριστερά. Επίσης αν κάθε διάστημα $(x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$, τέμνει το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε η συνέχεια από δεξιά συνεπάγεται την ύπαρξη του $f(x_0^+)$ και την ισότητα $f(x_0^+) = f(x_0)$. Ανάλογα ισχύουν για συνέχεια από αριστερά.

Είναι επίσης φανερό ότι *μια συνάρτηση συνεχής στο* x_0 *είναι συνεχής από δεξιά και συνεχής από αριστερά και αντίστροφα.*

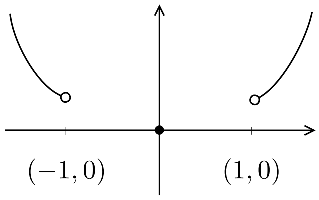
Στο παράδειγμα (i) της προηγούμενης υποπαραγράφου η f δεν είναι συνεχής ούτε από δεξιά ούτε από αριστερά. Στο παράδειγμα (ii) είναι συνεχής από δεξιά και ασυνεχής από αριστερά. Στο παράδειγμα (iii) είναι συνεχής από αριστερά και ασυνεχής από δεξιά.

Παρατήρηση 3.2.13 Δεν πρέπει να ξέφυγε την προσοχή του αγνώστου ότι στον ορισμό της συνέχειας απαιτήσαμε «$|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται …» και όχι «$0 < |x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται…», που απαιτούμε στον ορισμό του ορίου.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι το όριο είχε νόημα μόνο για σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, ενώ η συνέχεια έχει κατ' αρχήν νόημα για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού. Η διαφορά είναι πάντως «επιφανειακή». Πραγματικά, ας δούμε τι συμβαίνει στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι σημεία συσσώρευσης. Αν x_0 ένα τέτοιο σημείο, τότε θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap$ {πεδίο ορισμού}$= \{x_0\}$ (γιατί;). Επομένως για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ η συνεπαγωγή $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ θα ισχύει για όλα τα x του πεδίου ορισμού με $|x - x_0| < \delta$ (δηλαδή το x_0 μόνο). Με άλλα λόγια στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι σημεία συσσώρευσης, τα οποία για προφανείς λόγους λέγονται *μεμονωμένα*, κάθε συνάρτηση είναι αυτόματα συνεχής.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$



με πεδίο ορισμού $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή δείχνοντας ότι *οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς*. Οι αποδείξεις θα στηριχθούν στις ανισότητες που δείξαμε στην υποπαράγραφο 2.2δ' με γεωμετρικά επιχειρήματα μόνο.

Πριν προχωρήσουμε είναι σκόπιμο να παρεμβάλλουμε εδώ μια απλή, αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση:

Θεώρημα 3.2.14 *Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα (α, β) και είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, αν η συνάρτηση g ορίζεται σε ένα διάστημα (γ, δ) που περιέχει την εικόνα του (α, β) μέσω της f (δηλαδή το σύνολο $\{f(x) : \alpha < x < \beta\}$) και αν η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $h = g \circ f$ (ορισμός: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \alpha < x < \beta$) είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $|y - f(x_0)| < \delta_1$ συνεπάγεται $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ λόγω της συνέχειας της g στο $f(x_0)$. Λόγω τώρα της συνέχειας της f στο x_0 υπάρχει $\delta < 0$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ και επομένως $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$, που αποδεικνύει την συνέχεια της h στο x_0. □

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος παρατηρούμε ότι $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, δηλαδή η συνάρτηση cos είναι σύνθεση των συναρτήσεων sin και της πολυωνυμικής $\pi/2 - x$. Επομένως αν δείξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης sin, θα έχουμε και τη συνέχεια της cos.

Πρόταση 3.2.15 *Η συνάρτηση* $\sin(x)$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Δείξαμε στην υποπαράγραφο 2.2δ' ότι $|\sin\theta| \leq |\theta|$ για $|\theta| \leq \pi/2$. Επειδή $|\sin\theta| \leq 1$ πάντοτε, *η ανισότητα* $|\sin\theta| \leq |\theta|$ *ισχύει για όλα τα πραγματικά* θ. Έχουμε λοιπόν πάντοτε

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|$$

κι επομένως ($\delta = \varepsilon$)

$$|x - x_0| < \varepsilon \text{ συνεπάγεται } |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

□

Σαν μια εφαρμογή θα δείξουμε τη σημαντική σχέση

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Οι ανισότητες $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = |\sin x/\cos x|$, $|x| < \pi/2$, για $x \neq 0$ γράφονται και ως εξής: $|\cos x| \leq (\sin x)/x \leq 1$, $0 < |x| < \pi/2$. Γνωρίζουμε όμως ότι $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, άρα αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta < 0$ ώστε $0 < |x| < \delta$ (και $|x| < \pi/2$) συνεπάγεται $1 - \varepsilon < (\sin x)/x < 1 + \varepsilon$ ή $|(\sin x)/x - 1| < \varepsilon$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Παρατήρηση 3.2.16 Η παραπάνω απόδειξη περιέχει ουσιαστικά και την απόδειξη της ιδιότητας «σάντουιτς» για συναρτήσεις: «Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $0 < |x - x_0| < \delta$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$ τότε το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το $\lim_{x\to x_0} f(x)$».

3.2δ' Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων. Είδη ασυνεχειών.

Για να αποφύγουμε περιπλοκές ρουτίνας *θα υποθέτουμε εφ' εξής, εκτός αν ρητά αναφέρεται το αντίθετο, ότι τα πεδία είναι διαστήματα.* Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν είναι συνεχής στο (α, β), συνεχής από δεξιά στο α και από αριστερά στο β. Ανάλογα θα ισχύουν για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$.

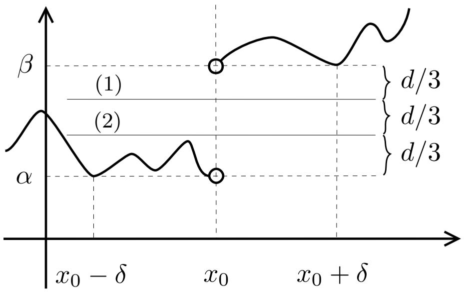
Οι ιδιότητες για αθροίσματα, γινόμενο και πηλίκο ορίων συνεπάγονται άμεσα ότι *το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων* f *και* g *που είναι συνεχείς στο* x_0, *είναι συνεχείς στο* x_0. *Στην περίπτωση του πηλίκου πρέπει να υποτεθεί επί πλέον ότι* $g(x_0) \neq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι *εσωτερικό* σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το διάστημα $(x_0 -$

$\delta, x_0+\delta)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού. (Θα κάνουμε συχνά αυτή την υπόθεση όταν μελετάμε «τοπικά» μια συνάρτηση. Στα συνηθισμένα πεδία ορισμού η υπόθεση σημαίνει ότι εξαιρούμε άκρα στην περίπτωση κλειστών ή ημίκλειστων διαστημάτων. Η μελέτη στα άκρα, όταν δεν είναι επανάληψη ρουτίνας, θα γίνεται χωριστά). Η συνέχεια της f στο x_0 σημαίνει την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και την ισότητα $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή $f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0)$. Τι σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0; Σημαίνει ή ότι $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$ ή ότι $f(x_0+) \neq f(x_0-)$ ή ότι *τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.* Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι στο x_0 παρουσιάζεται *άρσιμη* ασυνέχεια της f στη δεύτερη περίπτωση ασυνέχειας, *ασυνέχεια α' είδους (ή πήδημα)* και στην τρίτη *ασυνέχεια β' είδους (ή ουσιώδη).*

Στην περίπτωση ασυνέχειας α' είδους λέμε επίσης πήδημα τη διαφορά $f(x_0+) - f(x_0-)$. Τα «κοψίματα» στη γραφική παράσταση που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου παρουσιάζονται στις ασυνέχειες α' είδους.

Αν $\alpha = f(x_0-), \beta = f(x_0+)$ τότε $\beta - \alpha = \delta \neq 0$, οπότε, διαλέγοντας για παράδειγμα $\varepsilon = \frac{|\delta|}{3}$, θα έχουμε ότι θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το γράφημα της f να βρίσκεται πάνω από τη γραμμή (1) (σχήμα 3.2) στο διάστημα $(x_0, x_0+\delta)$ και κάτω από τη γραμμή (2) στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0)$. Πρέπει πάντως να τονιστεί ότι τα πιο δύσκολα (και συχνά πιο ενδιαφέροντα) προβλήματα εμφανίζονται στην περίπτωση των ουσιωδών ασυνεχειών.



Σχήμα 3.2

Από τα παραδείγματα της υποπαραγράφου 3.2β' στο (i) έχουμε άρσιμη ασυνέχεια, στο (ii) ασυνέχεια α' είδους και στο (iii) ουσιώδη ασυνέχεια. Θα δώσουμε τώρα ένα άλλο χαρακτηρισμό της συνέχειας που αποδίδεται στο Γερμανό μαθηματικό Heine (τέλος 19ου αιώνα). Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Έστω x_n μια ακολουθία σημείων του πεδίου ορισμού με την ιδιότητα $x_n \to x_0$ και $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Από τη σχέση $x_n \to x_0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_0$ να συνεπάγεται $|x_n - x_0| < \delta$. Συνάγουμε λοιπόν ότι $n > n_0$ συνεπάγεται $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, με άλλα λόγια $f(x_n) \to f(x_0)$. Έχουμε έτσι δείξει το μισό του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.17 *Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία x_n σημείων του πεδίου ορισμού της f με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει στο $f(x_0)$*

Για το υπόλοιπο της απόδειξης πρέπει να δείξουμε ότι αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε υπάρχει ακολουθία x_n με $x_n \to x_0$ ώστε η $\{f(x_n)\}$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή είναι λάθος η πρόταση: «Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.» Αυτό σημαίνει ότι: *Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει x με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.*

Παρατήρηση 3.2.18 Ένα πραγματικά καλό κριτήριο ότι έχετε καταλάβει τι γίνεται μέχρις εδώ, είναι να βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε (και δεν αποδέχεστε απλά) την παραπάνω πρόταση. Αν δε συμβαίνει αυτό, γυρίστε πάλι στις ακολουθίες).

Παίρνω τώρα για δ διαδοχικά τα $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε n βρίσκω ένα $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Η σχέση όμως $x_0 - 1/n < x_n < x_0 + 1/n$ συνεπάγεται ότι $x_n \to x_0$ (ιδιότητα σάντουιτς) και η ανισότητα $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, κάνει αδύνατη την $f(x_n) \to f(x_0)$. Φτάσαμε λοιπόν στο ζητούμενο άτοπο.

Παρατήρηση 3.2.19
Η δυνατότητα επιλογής ενός x_n από κάθε διάστημα $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ με την ιδιότητα $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, έτσι ώστε να σχηματιστεί μια ακολουθία $\{x_n\}$, στηρίζεται σε ένα αξίωμα της θεωρίας συνόλων που ονομάζεται *αξίωμα επιλογής*. Οι μαθηματικοί αποδέχονται γενικά τη χρήση αυτού του αξιώματος, το οποίο όμως πρέπει να τονιστεί έχει προκαλέσει πολλές και έντονες συζητήσεις στην μαθηματική κοινότητα.

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες που έχουμε δείξει μέχρι τώρα βλέπουμε ότι οι *ρητές συναρτήσεις, οι* τριγωνομετρικές *και οι «σύνθετες» συναρτήσεις που μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτές είναι συνεχείς*. Έτσι για παράδειγμα οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους:

$$\tan x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\sin \frac{2x + 5}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1,$$

$$\frac{\sin 2x - \cos x}{2 \sin x - 1}, \quad x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad x \neq (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

3.3 Ορισμένα βασικά Θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα δούμε δυο χρήσιμα, και διαισθητικά φανερά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις. Όπως θα γίνει φανερό από τις αποδείξεις, το κλειδί άμεσα ή έμμεσα θα είναι το αξίωμα τις συνέχειας.

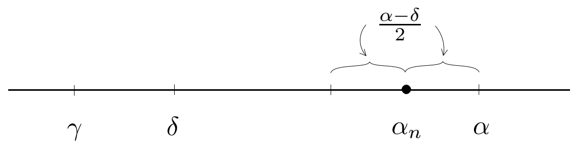
Αρχίζουμε με μερικές απλές ιδιότητες ακολουθιών, που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη.

Λήμμα 3.3.1 *Αν $a_n \to a$ και $\gamma \leq a_n \leq \delta$ τότε $\gamma \leq a \leq \delta$.*

Απόδειξη: Πραγματικά αν $a > \delta$ (και παρόμοια αν $a < \gamma$), τότε θα υπήρχε n ώστε

$$|a_n - a| < \frac{a - \delta}{2}$$

και επομένως $a - a_n < (a-\delta)/2$, δηλαδή $a_n > (a+\delta)/2 > \delta$ που είναι φυσικά άτοπο. (βλέπε σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3

□

Λήμμα 3.3.2 *Αν $a_n \to a$ τότε $|a_n| \to |a|$.*

Απόδειξη: Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|.$$

□

Ιδού τώρα το πρώτο από τα θεωρήματα μας:

Θεώρημα 3.3.3 *Αν η f είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε:*

(i) *είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$.*

Απόδειξη:

(i) Αν η f δεν είναι φραγμένη τότε για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in [a,b]$ ώστε $|f(x)| > M$. Παίρνοντας διαδοχικά $M = 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε μια ακολουθία x_n, με $\alpha \leq x_n \leq \beta$, ώστε $|f(x_n)| > n, n = 1, 2, \ldots$ Η x_n είναι φραγμένη, άρα θα υπάρχει υπακολουθία της x_{k_n}, $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ η οποία συγκλίνει, έστω στο x_0. Θα έχουμε τότε $x_0 \in [a,b]$ (γιατί;). Επειδή όμως η f είναι συνεχής στο x_0 και $x_{k_n} \to x_0$ θα έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ και επομένως $|f(x_{k_n})| \to |f(x_0)|$. Από την άλλη μεριά όμως η ανισότητα $|f(x_{k_n})| > k_n$ συνεπάγεται προφανώς ότι $|f(x_{k_n})| \to +\infty$ και φτάσαμε σε άτοπο.

(ii) Δείξαμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή ότι το σύνολο $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ είναι φραγμένο (και προς τα πάνω και προς τα κάτω). Το σύνολο αυτό είναι προφανώς μη κενό και επομένως (αξίωμα συνέχειας) το $\sup\{f(x) : \alpha \leq x \leq \beta\}$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός, έστω A. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = A$.

Από τον ορισμό του sup συνάγουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_n \in [a, b]$ ώστε $A - 1/n < f(x_n) \leq A$. Η ακολουθία x_n έχει υπακολουθία x_{k_n} η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [a, b]$ (γιατί;) και για την οποία ισχύει:

$$A - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \leq A.$$

Η ιδιότητα «σάντουιτς» δείχνει άμεσα ότι $f(x_{k_n}) \to A$. Η οριακή αυτή σχέση καθώς και η συνέχεια της f στο $x_0 = \lim x_{k_n}$ έχουν ως συνέπεια ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x_0), \quad n \to \infty,$$

και επομένως $f(x_0) = A$, που είναι ακριβώς αυτό που έπρεπε να δείξουμε.

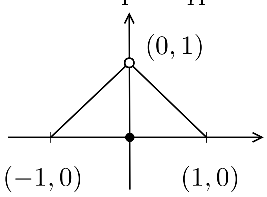
□

Παρατήρηση 3.3.4 Το (ii) δείχνει ότι η «μέγιστη» τιμή της συνάρτησης f «πιάνεται» για κάποιο $x_0 \in [a, b]$. Θα επανέλθουμε στο ζήτημα αυτό αργότερα.

Παρατήρηση 3.3.5 Ας κάνουμε μια μικρή ανάλυση των υποθέσεων του θεωρήματος για να βεβαιωθούμε ότι δεν μπήκαν απλά και μόνο για να κάνουν δυνατή την απόδειξη, αλλά γιατί πραγματικά χρειάζονταν *(αυτή την ανάλυση να προσπαθείτε να την κάνετε πάντα στα θεωρήματα που συναντάτε).*

Η συνέχεια της f είναι απαραίτητη όπως φαίνεται από το παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1 - |x|, & \text{αν } 0 < |x| \leq 1. \end{cases}$$



Εδώ $\sup f(x) = 1$ αλλά δεν υπάρχει $x_0 \in [-1, 1]$ με $f(x_0) = 1$. Δεν υπάρχει αντίφαση με το θεώρημα 3.3.3 γιατί η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Το ότι το πεδίο ορισμού είναι *κλειστό διάστημα* δεν μπορεί να αντικατασταθεί με οποιουδήποτε είδους διάστημα. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την $f(x) = x$ με $0 < x < 1$, τότε $\sup f(x) = 1$, ενώ για κανένα $x_0 \in (0, 1)$ δεν έχουμε $f(x_0) = 1$ (μας λείπει το $x_0 = 1$!). (*Ερώτηση*: Σε ποιο σημείο της απόδειξης χρησιμοποιήθηκε ότι το διάστημα είναι κλειστό;)

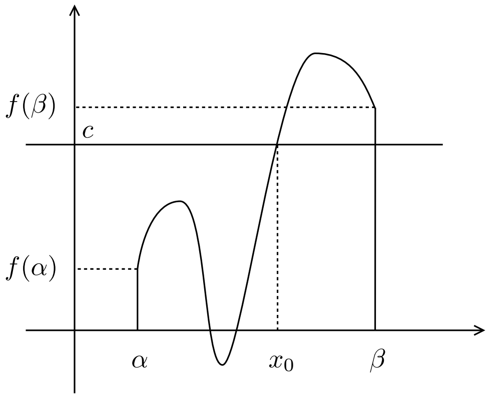
Η ίδια ακριβώς απόδειξη ότι υπάρχει $x_1, \alpha \leq x_1 \leq \beta$, ώστε $f(x_1) = \inf\{f(x) : \alpha \leq x \leq \beta\}$.

Μπορούμε ακόμη να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας το θεώρημα που αποδείξαμε στην συνάρτηση $-f(x)$(γιατί;).

Το δεύτερο θεώρημα μας έχει το όνομα «*Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής*» και λέγει ότι μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$. Ακριβέστερα:

Θεώρημα 3.3.6 *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f(a) < f(b)$ και $c \in (f(a), f(b))$ τότε υπάρχει x_0 με $a < x_0 < b$ ώστε $f(x_0) = c$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και αν $f(a) > f(b)$ και $f(a) > c > f(b)$.*

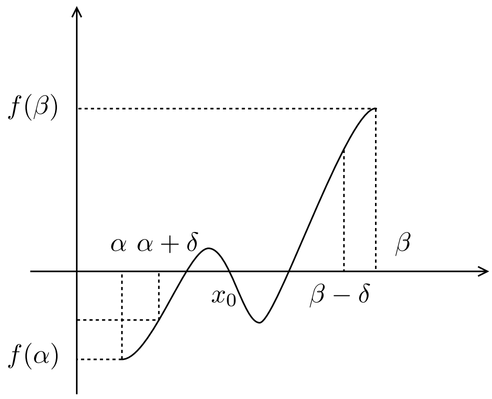
Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος είναι φανερή. Απλά παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = c$ τέμνει σε κάποιο σημείο το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης f (σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4

Η ειδική περίπτωση $f(a) < 0, f(b) > 0, c = 0$ είναι γνωστή σαν *Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass* (ο Bolzano ήταν Τσέχος μαθηματικός του 19ου αιώνα. Ο Weierstrass ήταν Γερμανός μαθηματικός του 19ου αιώνα και μάλιστα ένας από τους διασημότερους. Φημιζόταν για την ακρίβεια και αυστηρότητα των μεθόδων που χρησιμοποιούσε).
Μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα και ως εξής:

Θεώρημα 3.3.7 (Bolzano-Weierstrass) [1] *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (a, b).*



Σχήμα 3.5

Τα δύο θεωρήματα είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμα. Πραγματικά το θεώρημα Bolzano-Weierstrass είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος της

[1] Σε ορισμένα βιβλία το θεώρημα αναφέρεται σαν θεώρημα Bolzano. Σε άλλα σαν θεώρημα Bolzano-Weierstrass αναφέρεται το θεώρημα: *κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προκύπτει άμεσα αν ε-φαρμόσουμε το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass στην συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - c$, για την οποία ισχύει $g(a) \cdot g(b) = (f(a) - c) \cdot (f(b) - c) < 0$.

Απόδειξη: Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $f(a) < 0 < f(b)$ (γιατί;). Η ιδέα της απόδειξης που θα δώσουμε είναι πολύ απλή: Όπως φαίνεται από το σχήμα 21 μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια x_0. Ας «κυνηγήσουμε» το «αριστερότερο» (x_0 στο σχήμα). Πως μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε; απλούστατα είναι το «πιο μικρό» x με την ιδιότητα: «κάθε x' αριστερά του x ικανοποιεί την ανισότητα $f(x') < 0$». Για να μετατρέψουμε αυτή την ιδέα σε απόδειξη δείχνουμε ότι:

(i) Το σύνολο $A = \{x \in (a, b] : a \leq x' < x \Rightarrow f(x') < 0\}$ είναι μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω.

(ii) Αν $x_0 = \sup A$ τότε $a < x_0 < b$ και $f(x_0) = 0$.

Το ότι το A είναι φραγμένο προς τα πάνω είναι φανερό (το b για παράδειγμα είναι ένα άνω φράγμα του). Το ότι είναι μη κενό προκύπτει ως εξής: Η συνέχεια της f στο a συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $a \leq x < a + \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(a)| < -f(a)/2 < 0$. (Πάρτε $\varepsilon = -f(a)/2 > 0$ στον ορισμό της συνέχειας) και επομένως $a \leq x < a + \delta$ συνεπάγεται $f(x) < f(a)/2 < 0$. Όλα λοιπόν τα x του διαστήματος $(a, a + \delta)$ ανήκουν στο A και έτσι το A δεν είναι κενό. Από το αξίωμα της συνέχειας τώρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το $x_0 = \sup A$ και είναι προφανώς γνήσια μεγαλύτερο του a.

Από τη συνέχεια της f στο B συνάγουμε, όπως και προηγουμένως, ότι υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε $b - \delta' < x \leq b$ συνεπώς $f(x) > 0$ και επομένως όλα τα x στο διάστημα $(b - \delta', b]$ είναι άνω φράγματα του A και άρα ξεπερνούν το x_0. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $a < x_0 < b$ και δε μένει παρά να δείξουμε ότι $f(x_0) = 0$.

Ας υποθέσουμε $f(x_0) \neq 0$ για να φτάσουμε σε άτοπο. Αν $f(x_0) > 0$ τότε θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\alpha, \beta)$,τότε $f(x) > f(x_0/2) > 0$ (γιατί;). Επομένως το $x_0 - \delta/2$ για παράδειγμα, θα είναι ένα άνω φράγμα του A μικρότερο του x_0, που είναι φυσικά άτοπο. Αν $f(x_0) < 0$ τότε θα υπήρχε $\delta > 0$ ώστε αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$, τότε $f(x) < f(x_0)/2 < 0$. Επομένως $x_0 + \delta/2$ για παράδειγμα θα ανήκει στο A που είναι αδύνατο. □

Θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές τα θεωρήματα αυτά στη συνέχεια. Εδώ θα αρκεστούμε σε δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Θεώρημα 3.3.8 *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα*

Απόδειξη: Έστω $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_n \cdot x^n$, $\alpha_n \neq 0$ και n ένας μονός φυσικός. Γράφουμε το $f(x)$ στη μορφή

$$f(x) = \alpha_n \cdot x^n \cdot \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n \cdot x} + \cdots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n \cdot x^n}\right) = \alpha_n \cdot x^n \cdot g(x)$$

όπου

$$g(x) = 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n \cdot x} + \cdots + \frac{\alpha_0}{\alpha_n \cdot x^n}.$$

Παρατηρούμε ότι η g ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ και ότι

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$$

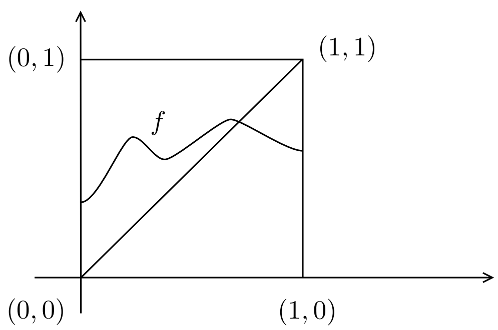
(γιατί;). Υπάρχουν λοιπόν αριθμοί $M > 0$ και $N > 0$ ώστε $x > M$ συνεπάγεται $g(x) > 0$ και $x < -N$ συνεπάγεται $g(x) > 0$. Έστω $M' > M$ και $N' > N$ θα έχουμε:

$$f(M') \cdot f(-N') = \alpha_n^2 \cdot (M')^n \cdot (-N')^n \cdot g(M') \cdot g(-N') < 0$$

διότι $\alpha_n^2 > 0, g(M') > 0, g(-N') > 0, (M')^n > 0, (-N)^n < 0$ αφού το n είναι μονός αριθμός. Το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass μας εξασφαλίζει τώρα την ύπαρξη μιας ρίζας της f στο διάστημα $(-N', M')$. $\square$

Η δεύτερη εφαρμογή είναι ειδική περίπτωση ενός θεωρήματος που είναι γνωστό ως *θεώρημα σταθερού σημείου του Banach* (Ο S. Banach ήταν Πολωνός μαθηματικός του α' μισού του 20ου αιώνα):

Θεώρημα 3.3.9 *Αν η $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$*



Σχήμα 3.6

Απόδειξη: Γεωμετρικά πρέπει να δείξουμε ότι το γράφημα της f τέμνει τη διαγώνιο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$, δηλαδή το γράφημα της $g(x) = x, 0 \leq x \leq 1$. Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$, τότε φυσικά δεν χρειαζόμαστε τίποτε άλλο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$. Η συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x)$ ικανοποιεί τότε τις υποθέσεις του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής. Υπάρχει λοιπόν $x_0 \in (0,1)$ ώστε $g(x_0) - f(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = x_0$. $\square$

3.4 Ασκήσεις

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις στις παραγράφους 3.1γ' και 3.2β'

2. Αν η συνάρτηση $f(x), \alpha < x < \beta$, είναι συνεχής και αν $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε η τιμή $f(x_0)$ να είναι το ελάχιστο της f στο (α, β).

3. Αν η $f(x)$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), \alpha > 0$, δηλαδή $|f(x)| \leq M$ για κάθε x με $|x - x_0| < \alpha$, τότε η συνάρτηση $g(x) = (x - x_0)f(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

4. Μελετήστε τα όρια $\lim_{x\to x_0} g(x)$ όπου $g(x) = P(x)/Q(x)$ μια ρητή συνάρτηση και x_0 ρίζα του παρονομαστή. Ίδια ερώτηση για τα όρια όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$.

5. Δείξτε ότι αν $\alpha_n \to +\infty$ τότε η α_n είναι φραγμένη προς τα κάτω, δηλαδή το σύνολο $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο προς τα κάτω. Ίδια ερώτηση για την περίπτωση $\alpha_n \to -\infty$.

6. Δίνεται η ακολουθία a_k. Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Δείξτε ότι το $\lim b_n$ υπάρχει ή $\lim b_n = +\infty$. Το όριο αυτό συμβολίζεται $\limsup a_n$. Όμοια ορίζεται το $\liminf a_n$ και αποδεικνύεται ότι υπάρχει ή είναι $-\infty$. Δείξτε ότι η a_n συγκλίνει αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$.

7. Για μια ακολουθία α_n γράφουμε $\sup \alpha_n, \inf \alpha_n$ για το $\sup, \inf$ του συνόλου $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι $\sup(\alpha_n + \beta_n) \leq \sup \alpha_n + \sup \beta_n, \inf(\alpha_n + \beta_n) \geq \inf \alpha_n + \inf \beta_n$. Βρείτε παραδείγματα, αν υπάρχουν, στα οποία οι ανισότητες είναι γνήσιες.

8. Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό μόνο δείξτε ότι :
$$\lim \frac{n^2}{n^2 + n} = 1,$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

9. Βρείτε, αν υπάρχει, $M \in \mathbb{R}$ ώστε: $x > M$ συνεπάγεται
$$\frac{x^5 + 4x + 7}{x^4 + 1} > 10^6.$$

10. Αν $[\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2 \ldots$ μια ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων, δηλαδή $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \ldots$, τότε

    (α') Η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ δεν είναι κενή και μάλιστα υπάρχουν τα $\lim \alpha_n$, $\lim \beta_n$ και ισχύει
    $$\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] = [\lim \alpha_n, \lim \beta_n].$$

(β') Βρείτε αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$ μονοσύνολο.

11. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim \alpha_n$ αν

(α') $\alpha_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

(β')

$$\alpha_n = \frac{\alpha n^2 + \beta n + \gamma}{\alpha' n^2 + \beta' n + \gamma'}, \quad \alpha' \neq 0.$$

Είναι καλά διατυπωμένο το ερώτημα (β'); Αν όχι διορθώστε τη διατύπωση χωρίς να αλλάξετε φυσικά την ουσία του ερωτήματος.

12. Μια συνεχής συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \neq 0$. Δείξτε ότι $f(0) = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{10} - 7x^7 + 8x^5 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο των τιμών της είναι φραγμένο προς τα κάτω, δηλαδή $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} > -\infty$. Υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \inf A$ όπου $A = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$;

14. Για ποια x είναι συνεχής η συνάρτηση $[x]\cos \pi x$; Η ίδια ερώτηση για τη συνάρτηση $[x]\sin \pi x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1 Βασικές έννοιες

4.1α' Ορισμοί και απλά παραδείγματα

Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα υπάρχει τότε $\delta > 0$ ώστε το $x_0 + h$ να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f για $|h| < \delta$. Η διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$ συμβολίζεται συχνά Δf και ονομάζεται «αύξηση» της συνάρτησης, ενώ το $h = (x_0 + h) - x_0$ συμβολίζεται Δx και ονομάζεται «αύξηση» της «ανεξάρτητης μεταβλητής» x στο x_0. Το πηλίκο $\Delta f/\Delta x$ ονομάζεται «πηλίκο αυξήσεων» και το όριό του για $\Delta x \to 0$, αν υπάρχει, παράγωγος της f στο x_0. Κατ' αναλογίαν με ό,τι είπαμε για όρια συναρτήσεων ορίζουμε πότε η παράγωγος είναι $+\infty$ ή $-\infty$ καθώς και παραγώγους από δεξιά και αριστερά. Ας συγκεντρώσουμε αυτές τις παρατηρήσεις σε έναν ορισμό:

Ορισμός 4.1.1 (i) *Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

τότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 και το όριο παράγωγος της f στο x_0 (συμβολισμός: $f'(x_0)$ ή $Df(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$ και, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, απλά df/dx).

(ii) *Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h}\right),$$

τότε λέμε ότι η f έχει παράγωγο από δεξιά (αριστερά), και τη συμβολίζουμε με $f'(x_{0+})$ $(f'(x_{0-}))$ ή $D^+f(x_0)$ $(D^-f(x_0))$.

(iii) *Στην περίπτωση που τα παραπάνω όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε ότι η f έχει παράγωγο (ή παράγωγο από δεξιά ή παράγωγο από αριστερά) $+\infty$ ή $-\infty$, (αλλά δε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη).*

Παρατήρηση 4.1.2 Η παράγωγος από δεξιά (αριστερά) ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και σε περιπτώσεις που το x_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Για τον ορισμό απαιτείται μόνο η f να είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $[x_0, x_0+\delta)$ (ή $(x_0-\delta, x_0]$), $\delta > 0$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \to 0,$$

για $x \to x_0$, (γιατί;), δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|,$$

απ' όπου έπεται ότι το $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0)| < \big(|f'(x_0)| + \varepsilon\big)|x - x_0|.$$

Επομένως *αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0* (Προσοχή: παραγωγίσιμη σημαίνει ότι η $f'(x_0)$ είναι πεπερασμένη, όχι $+\infty$ ή $-\infty$). Πραγματικά, παίρνοντας στην παραπάνω ανισότητα $\varepsilon = 1$, έχουμε για τυχαίο $\varepsilon' > 0$ ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού για τα οποία

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon'}{|f'(x_0)| + 1}, \delta\right).$$

Οι γνωστές πλέον ιδιότητες των ορίων μάς επιτρέπουν να βρούμε τύπους για παραγώγους αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων (αφού δείξουμε φυσικά πρώτα ότι υπάρχουν). Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}, \qquad g(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ας αποδείξουμε τους τύπους για το γινόμενο και το πηλίκο. Φυσικά υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού και των δύο συναρτήσεων f και g. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνέχεια της g στο x_0 και η συνθήκη $g(x_0) \neq 0$ συνεπάγεται ότι η g είναι διάφορη του μηδενός σε μια περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, και επομένως ορίζεται καλά τουλάχιστον σ' αυτή την περιοχή το πηλίκο f/g.

Για το γινόμενο χρησιμοποιούμε το κλασικό τέχνασμα:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}\\ &\quad+\frac{f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\ &= g(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &\quad+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &\to g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

για $h \to 0$ (στην τελευταία σειρά εκτός από τον ορισμό της παραγώγου χρησιμοποιήσαμε και την συνέχεια της g στο x_0).

Έχοντας αποδείξει τον τύπο για το γινόμενο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

για να δείξουμε τον τύπο του πηλίκου. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}\right) &= -\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\\ &\to -g'(x_0)\frac{1}{(g(x_0))^2},\end{aligned}$$

για $h \to 0$, όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της g στο x_0 και την υπόθεση $g(x_0) \neq 0$.

Ας δώσουμε τώρα μερικά απλά αλλά σημαντικά παραδείγματα:

(i) $f(x) = c$ (σταθερά). Εδώ $\Delta f(x_0) = 0$ για οποιοδήποτε x_0 άρα $\Delta f/\Delta x = 0 \to 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$.

(ii) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$: εδώ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \to 1$$

δηλαδή $x' = 1$.

(iii) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} &= \frac{h\{(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}\}}{h}\\ &\to x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1} = nx_0^{n-1},\end{aligned}$$

καθώς $h \to 0$, δηλαδή $(x^n)' = nx^{n-1}$. (Αποδείξτε τον τύπο αυτό και με επαγωγή χρησιμοποιώντας τη σχέση $(fg)' = f'g + fg'$).

Ο τύπος αυτός ισχύει και για $n = 0$ διότι τότε η f είναι σταθερά. Ισχύει επίσης και για $n \in \mathbb{Z}$ και $n < 0$. Πράγματι, έστω $f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}, x \neq 0$. Θα έχουμε:

$$\big(f(x)\big)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

για $x \neq 0$. Άρα για όλους τους ακέραιους n ισχύει $(x^n)' = nx^{n-1}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της x^n (δηλαδή όλα τα x για $n \geq 0$ και τα x με $x \neq 0$ για $n < 0$).

(iv) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$: γενικά, αν c σταθερά τότε

$$(cg)'(x_0) = c' g(x_0) + c g'(x_0) = c g'(x_0),$$

οπότε τετριμμένα $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

(v) $f(x) = \sin x$. Εδώ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} \\ &= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x, \end{aligned}$$

όταν $h \to 0$. Στην τελευταία σειρά χρησιμοποιήσαμε την συνέχεια του συνημιτόνου, την σχέση $(\sin x)/x \to 1$ για $x \to 0$, και τον τύπο για όριο σύνθετης συνάρτησης (γιατί;). Έχουμε λοιπόν τη βασική σχέση: $(\sin x)' = \cos x$.

(vi) $f(x) = \cos x$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $(\cos x)' = -\sin x$ (θα δώσουμε και μια διαφορετική απόδειξη σε λίγο).

(vii) $f(x) = \tan x$, $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

δηλαδή $(\tan x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$.

(viii) $f(x) = |x|$ για $x \in \mathbb{R}$. Αν $x_0 > 0$, επειδή $f(x) = x$ στο διάστημα $(0, \infty)$, θα έχουμε $f'(x_0) = x'|_{x=x_0} = 1$ (γιατί;). Αν $x_0 < 0$, επειδή $f(x) = -x$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, θα έχουμε $f'(x_0) = -1$.

Η περίπτωση $x_0 = 0$ παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον. Κατ' αρχάς η $|x|$ είναι συνεχής στο 0 (πάρε $\delta = \varepsilon$) αλλά, όπως θα δούμε σε λίγο δεν είναι παραγωγίσιμη δηλαδή *η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια αλλά το αντίστροφο δεν είναι γενικά σωστό.*

Ενδιαφερόμαστε για το όριο του πηλίκου

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

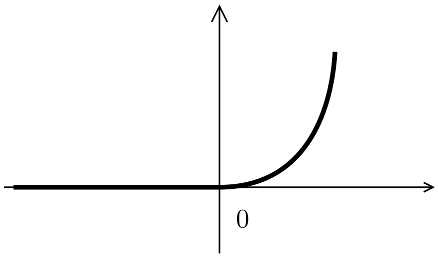
όταν $h \to 0$. Προφανώς $\lim_{h\to 0^+} |h|/h = 1$ και $\lim_{h\to 0^-} |h|/h = -1$ και επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{h\to 0} |h|/h$, δηλαδή η $|x|$ δεν έχει παράγωγο στο 0. Δείξαμε όμως ότι υπάρχουν οι *πλευρικές* παράγωγοι $f'(0+)$ και $f'(0-)$ και μάλιστα $f'(0+) = 1$, $f'(0-) = -1$.

(ix) Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση που ορίζεται με «διαφορετικούς τύπους» σε διαφορετικά διαστήματα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Η $f(x)$ συμπίπτει με τη σταθερά συνάρτηση 0 για $x < 0$, άρα $f'(x) = 0$ για $x < 0$ και με την x^2 για $x > 0$, άρα $f'(x) = 2x$ για $x > 0$. Για $x = 0$ είναι κατ' αρχάς συνεχής, γιατί

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$



Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Πραγματικά η $f'(0+)$ υπάρχει και ισούται προφανώς με την από δεξιά παραγωγό της x^2 για $x = 0$. Επειδή η x_2, $-\infty < x < \infty$ έχει παραγωγό στο μηδέν, θα έχει και από δεξιά παραγωγό ίση με $(x^2)'_{x=0} = (2x)_{x=0} = 2 \cdot 0 = 0$. Όμοια η αριστερή παραγωγός στο μηδέν θα ισούται με την παραγωγό της σταθεράς μηδέν στο μηδέν, δηλαδή με μηδέν και επομένως $f'(0) = 0$. Βρήκαμε λοιπόν:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

4.1β' Ο κανόνας της αλυσίδας

Θα δείξουμε τώρα ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που θα μας επιτρέψει να παραγωγίζουμε με ευκολία πολύ περισσότερες συναρτήσεις. Τελείως φορμαλιστικά (ξεχνώντας προς στιγμή πεδία ορισμού, εσωτερικά σημεία, και αλλά παρόμοια) ο κανόνας λέγει ότι για τη σύνθετη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ έχουμε

$h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$ Και αφού προς στιγμήν ξεχάσαμε την «αυστηρότητα» ας δώσουμε και μια ευλογοφανή (αλλά λανθασμένη) απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\ &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Η g είναι συνεχής στο $g(x)\to g(x_0)$ άρα $x\to x_0$ για $x\to x_0$ και επομένως, για $x\to x_0$ ισχύει,

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} &\longrightarrow \lim_{g(x)\to g(x_0)}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$

Από τα πολλά «στραβά» που περιέχει ο παραπάνω συλλογισμός ίσως το ουσιαστικό είναι ότι δεν «δουλεύει» αν $g(x)=g(x_0)$ για x «κοντινά» στο x_0. Θα δώσουμε παρακάτω μια σωστή απόδειξη.

Ιδού πρώτα μερικές εφαρμογές:

(i)

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \big(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\big)' = \big(\cos(\frac{\pi}{2}-x)\big)(\frac{\pi}{2}-x)'\\ &= -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\big(\sin(x^3\cos x)\big)' &= \cos(x^3\cos x)(x^3\cos x)'\\ &= \cos(x^3\cos x)\big(3x^2\cos x - x^3\sin x\big)\end{aligned}$$

(iii) $((ax+b)^n)' = n(ax+b)^{n-1}(ax+b)' = an(ax+b)^{n-1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Προχωράμε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας.

Θεώρημα 4.1.3 (κανόνας της αλυσίδας) *Αν x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g και $y_0=g(x_0)$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και οι παραγωγοί $g'(x_0)$, $f'(y_0)$ υπάρχουν (και είναι πεπερασμένες), τότε η σύνθετη συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ έχει παραγωγό στο x_0 και ισχύει ο τύπος:*

$$h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Απόδειξη: Η παραγωγισιμότητα της g στο x_0 συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο x_0. Υπάρχει επίσης $\delta_1>0$ ώστε τα y με $|y-y_0|<\delta_1$ να βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f, διότι το $y_0=g(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο αυτού του πεδίου ορισμού. Συνάγουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε,

$|x - x_0| < \delta_2$ συνεπάγεται $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ και επομένως για $|x - x_0| < \delta_2$ η $h(x) = f\big(g(x)\big)$ ορίζεται.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η διαφορά

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} - f'(g(x_0))g'(x_0)$$

τείνει στο μηδέν για $x \to x_0$. Η διάφορα αυτή γράφεται:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} - f'(g(x_0))\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + f'\big(g(x_0)\big)\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right).$$

Ο δεύτερος όρος τείνει στο μηδέν διότι

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$$

για $x \to x_0$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι και ο πρώτος όρος τείνει στο μηδέν δηλαδή ότι

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - f'\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} \to 0,$$

για $x \to x_0$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Η παραγωγισιμότητα της g στο x_0 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta_2' > 0$ ώστε:

$$|x - x_0| < \delta_2' \Rightarrow \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| < |g'(x_0)| + 1 = M.$$

Η παραγωγισιμότητα της f στο $y_0 = g(x_0)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει δ_3 ώστε: $|y - y_0| < \delta_3$ συνεπάγεται

$$\left|\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - f'(y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

άρα και:

$$|f(y) - f(y_0) - (y - y_0)f'(y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{M}|y - y_0|$$

αν $|y - y_0| < \delta_3$. Η συνέχεια της g στο x_0 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta_4 > 0$ ώστε: $|x - x_0| < \delta_4$ συνεπάγεται $|g(x) - g(x_0)| < \delta_3$. Θέτοντας τώρα $\delta = \min\{\delta_2', \delta_4\}$ και περιμαζεύοντας τα όσα είπαμε θα έχουμε $0 < |x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\frac{\big|f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - f'\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big)\big|}{x - x_0} &\leq \frac{\varepsilon}{M}\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{M}M \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. □

4.1γ' Η παράγωγος ως συνάρτηση

Αν μια συνάρτηση f έχει παραγωγό για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της, τότε η παραγωγός αυτή θα είναι μια νέα συνάρτηση που εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με f'. Αν η f' έχει παράγωγο τη συμβολίζουμε με f'' (ή $D^2 f$ ή $D^2 f/dx^2$) κ.ο.κ.

Παραδείγματα:

(i) $f(x) = x^3$. Έχουμε $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{(4)}(x) = 0, \ldots$, $f^{(n)}(x) = 0$ για $n \geq 4$.

(ii) $f(x) = \sin x$. Έχουμε

$$f'(x) = \cos x,$$

$$f''(x) = -\sin x,$$

$$f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

και γενικότερα (τετριμμένη επαγωγή)

$$\begin{array}{ll} f^{(4k+1)}(x) = \cos x, & f^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \\ f^{(4k+3)}(x) = -\cos x, & f^{(4k+4)}(x) = \sin x, \text{ για } k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

4.2 Φυσική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Η εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου έγινε τον 17ο αιώνα και αποδίδεται στους Newton[1], Fermat[2] και Leibnitz[3] (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο). Το κίνητρο για τον Newton ήταν η κατασκευή μαθηματικού μοντέλου για την ερμηνεία των νομών κίνησης των πλανητών του Kepler. Στο περίφημο έργο του «Principia» θέτει στην πραγματικότητα τις βάσεις και προχωράει σημαντικά στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, όπως τον γνωρίζουμε σήμερα (αν και η ανάγνωση των Principia θυμίζει μάλλον τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη παρά ένα σημερινό κείμενο). Ο Fermat οδηγήθηκε στην έννοια της παραγώγου στην προσπάθεια του να ορίσει την εφαπτόμενη μιας καμπύλης, ενώ ο Leibnitz οδηγήθηκε εκεί από φιλοσοφικής μορφής ερωτήσεις. Από τη δουλεία του τελευταίου μας έμεινε ουσιαστικά μόνο ο συμβολισμός df/dx, ενώ οι ανακαλύψεις των Fermat και Newton θεωρούνται και σήμερα θεμελιώδεις. Στις επόμενες δυο παραγράφους θα πούμε δυο λόγια για τις σημαντικές αυτές ανακαλύψεις.

[1] Διάσημος Άγγλος επιστήμονας του 17ου–18ου αιώνα.
[2] Γάλλος μαθηματικός του 17ου–18ου αιώνα.
[3] Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος του 17ου–18ου αιώνα.

4.2α' Η παράγωγος στη Μηχανική

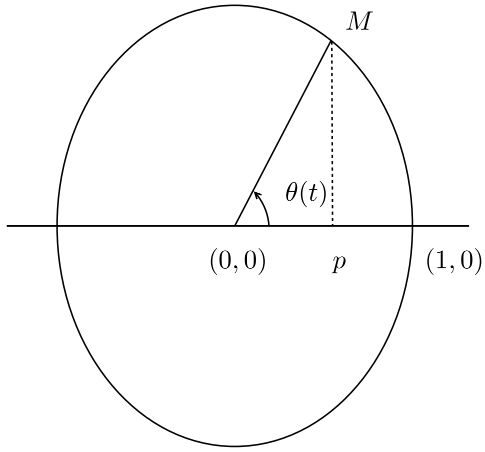
Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου στο χώρο γράφουμε $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ για τις συντεταγμένες του, που είναι φυσικά συναρτήσεις του χρόνου t. Δεχόμαστε ότι ο χρόνος περιγράφεται με ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος μεταβάλλεται σε ένα διάστημα $[a, b]$. Ας εξετάσουμε για απλότητα μόνο την κίνηση της προβολής του σημείου στον άξονα x, ή, αν θέλετε, ας υποθέσουμε ότι σημείο κινείται πάνω σε μια ευθεία την οποία παίρνουμε σαν άξονα των x.

Το σημείο λοιπόν ξεκινάει από την θέση $x(a)$ και φτάνει στην θέση $x(b)$ σε χρόνο $b-a$. Αν η κίνηση του ήταν «ομοιόμορφη» θα λέγαμε ότι η ταχύτητα του είναι $(x(b)-x(a))/(b-a)$. Εν γένει όμως αυτό δεν συμβαίνει και γι' αυτό ονομάζουμε το πηλίκο $(x(b)-x(a))/(b-a)$ «μέση ταχύτητα». Φυσικά μέση ταχύτητα θα έχουμε για κάθε χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, ή, για να συμφωνήσουμε με την παράδοση, $(t, t+\Delta t)$. Είναι φυσιολογικό, τουλάχιστον για μικρά Δt, να προσεγγίζουμε την ταχύτητα τη στιγμή t με αυτή την μέση ταχύτητα $(x(t+\Delta t)-x(t))/(\Delta t)$ και να ορίσουμε ως ταχύτητα κατά τη στιγμή t το όριο

$$\lim \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},$$

για $\Delta t \to 0$. Επειδή το $x(t)$ παριστάνει τη θέση του κινητού, δηλαδή το διάστημα που διήνυσε μέχρι τη στιγμή t, αν υποθέσουμε ότι $x(a)=0$, μπορούμε να πούμε ότι: «*η (στιγμιαία) ταχύτητα είναι η παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο*».

Από το σημείο αυτό και πέρα πολλά από τα αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού αποκτούν μια «μηχανική» σημασία (αλλά και αντίστροφα πολλά ερωτήματα της Μηχανικής μας οδηγούν σε προτάσεις του Απειροστικού Λογισμού). Έτσι για παράδειγμα, η δεύτερη παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο είναι η «*επιτάχυνση*».



Σχήμα 4.1

Ας δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια ένα απλό παράδειγμα (*αρμονικός ταλαντωτής*). Υποθέτουμε ότι ένα κινητό M κινείται ομοιόμορφα πάνω στη περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο την αρχή και ακτίνα 1 κατά φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στο σημείο $(1,0)$. Ενδιαφερόμαστε για την κίνηση της προβολής του σημείου πάνω στον άξονα των x.
Η υπόθεση ότι η κίνηση πάνω στη περιφέρεια είναι ομοιόμορφη σημαίνει ότι η γωνία $\vartheta(=\vartheta(t))$ είναι ανάλογη του χρόνου, δηλαδή ότι $\vartheta(t)=\omega t$, όπου ω μια σταθερά που ονομά-

ζεται γωνιακή ταχύτητα και μετριέται σε rad/sec, όταν μετράμε το χρόνο σε δευτερόλεπτα και τη γωνία σε ακτίνια.

Η θέση της προβολής P στον άξονα των x θα δίνεται από τη συνάρτηση

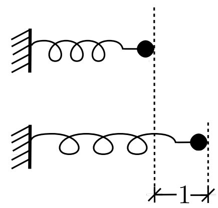
$$x(t) = \cos\vartheta(t) = \cos\omega t.$$

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση λοιπόν του P θα είναι

$$v(t) = x'(t) = -\omega\sin\omega t$$

και

$$b(t) = x''(t) = -\omega^2\cos\omega t.$$



Σχήμα 4.2

Πολύ συχνά εμφανίζονται στη Φυσική περιπτώσεις κίνησης παρόμοιας με την κίνηση του P. Αν για παράδειγμα φανταστούμε ένα υλικό σημείο μάζας 1 στην άκρη ενός ελατηρίου και το απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου και κατά μήκος 1 τότε, υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε ακόμα στην «ελαστική περιοχή» (δηλαδή δεν χάλασε το ελατήριο), το σημείο θα κινείται όπως το P (θα εκτελεί όπως λέμε «αρμονική ταλάντωση»). Οι νόμοι της Φυσικής που μας οδηγούν σ' αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστοί. Το ότι βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή σημαίνει ότι ισχύει ο νόμος του Hooke δηλαδή, η δύναμη που ασκείται στο σημείο μας θα κατευθύνεται προς την αρχή και θα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης: $F = -kx$, όπου k είναι μια θετική σταθερά. Ας γράψουμε λοιπόν $k = \omega^2$. Η δύναμη όμως είναι ίση με την μάζα επί την επιτάχυνση (αυτός είναι ένας από τους βασικούς νόμους που ανακάλυψε ο Newton) και επομένως θα έχουμε (μάζα $= 1$)

$$x''(t) = -\omega^2 x(t).$$

Έχουμε λοιπόν μια εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση που περιέχει εκτός από τη συνάρτηση και παραγώγους της (εδώ τη δεύτερη). Μια τέτοια εξίσωση λέγεται *διαφορική* και ένα από τα κύρια επιτεύγματα του Απειροστικού Λογισμού είναι ότι δίνει μεθόδους για την λύση τέτοιων εξισώσεων. Φυσικά δεν φτάνει αυτή η εξίσωση για να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση. Ιδού μια *φυσική* απόδειξη: «Στην ίδια εξίσωση θα φτάναμε αν απομακρύναμε το σημείο κατά 1/2 , και όχι κατά 1, από τη θέση ισορροπίας. Προφανώς όμως τότε έπρεπε να βρούμε διαφορετική συνάρτηση, αν μη τι άλλο διότι δε θα ίσχυε η συνθήκη $x(0) = 1$. Αλλά και αν ακόμη είχαμε την ίδια αρχική απομάκρυνση 1 και τη στιγμή $t = 0$ δίναμε μια αρχική ταχύτητα στο κινητό μας (φανταστείτε μια ελαφριά «σφυριά») πάλι στην ίδια εξίσωση θα φτάναμε. Είναι όμως προφανές και πάλι ότι θα έπρεπε να βρούμε διαφορετική συνάρτηση, αν μη τι άλλο δε θα ίσχυε η συνθήκη $x'(0) = 0$». Εδώ τελειώνουν όμως οι αντιρρήσεις γιατί αν δώσουμε την αρχική απομάκρυνση ($x(0) = 1$) και την αρχική ταχύτητα ($x'(0) = 0$) τότε η «φυσική» διαίσθηση μας λέγει ότι το κινητό είναι «καταδικασμένο» να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη κίνηση. Διατυπωμένο σε μαθηματικούς όρους αυτό σημαίνει ότι *υπάρχει μία μόνο συνάρτηση* $x(t)$ *που ικανοποιεί την εξίσωση* $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ *και τις συνθήκες* $x(0) = 1$ *και* $x'(0) = 0$.

Μια τέτοια συνάρτηση βρήκαμε στην αρχή της παραγράφου: $x(t) = \cos\omega t$. «Αποδείξαμε» λοιπόν ότι η απομάκρυνση $x(t)$ στον αρμονικό ταλαντωτή μας είναι η $x(t) = \cos\omega t$, όπου η γωνιακή ταχύτητα ω είναι η τετραγωνική ρίζα της «σταθεράς του ελατηρίου» k. Βάλαμε τη λέξη αποδείξαμε σε εισαγωγικά γιατί η απόδειξη μας στηρίχτηκε στη Φυσική εμπειρία. Θα δούμε στις ασκήσεις ότι ο Απειροστικός Λογισμός θα μας δώσει σχετικά εύκολα τη μαθηματική απόδειξη που λείπει.

Παρατήρηση 4.2.1 Ένας προσεχτικός αναγνώστης στο σημείο αυτό πρέπει να ρωτήσει: Καλά, πιστεύω ότι αργότερα θα μας δώσεις αυστηρή απόδειξη, αλλά και το Φυσικό επιχείρημα φαίνεται ατράνταχτο (ένα κινητό που ξεκινάει από δεδομένη θέση ($x(0) = 1$) με δεδομένη ταχύτητα ($x'(0) = 0$) και σε κάθε θέση που θα περάσει ασκείται επάνω του δεδομένη δύναμη ($-\omega^2 x$) δεν μπορεί παρά να έχει προδιαγεγραμμένη κίνηση). Τι γίνεται λοιπόν, μπορούμε να αποδείξουμε μαθηματικές προτάσεις με φυσικά επιχειρήματα; Η απάντηση είναι *ναι* εφ' όσον η Φυσική θεωρία (εδώ Μηχανική) της οποίας τους νόμους χρησιμοποιούμε είναι «*καλή*». Πιο συγκεκριμένα εδώ στηριχθήκαμε στο νόμο του Newton (αξίωμα για τη Μηχανική) «δύναμη = (μάζα)·(επιτάχυνση)». Ο νόμος αυτός (ουσιαστικά λόγω της αυστηρής απόδειξης που θα δώσουμε αργότερα) συνεπάγεται το «ατράνταχτο» φυσικό επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε.

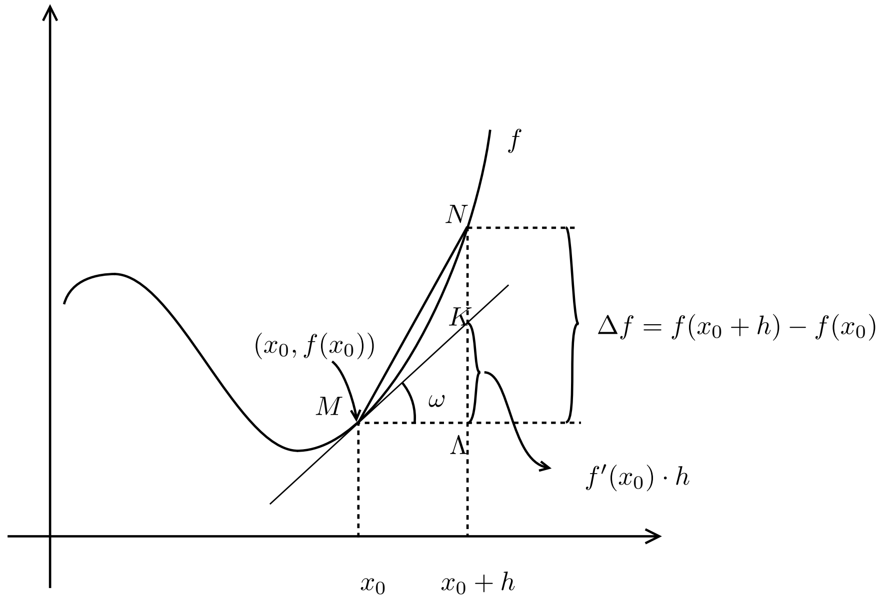
4.3 Η παράγωγος ως κλίση εφαπτομένης

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια γειτονιά του σημείου x_0 και ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Θεωρούμε τη χορδή MN (βλέπε σχήμα 26) και υποθέτουμε ότι το σημείο $N\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ πλησιάζει το M, δηλαδή το h τείνει στο 0. Περιμένουμε, γεωμετρικά, ότι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η χορδή θα πλησιάζει μια ευθεία που είναι φυσιολογικό να καλέσουμε *εφαπτομένη* του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την εφαπτομένη στο M να είναι μια ευθεία που περνάει από το M και έχει κλίση το όριο, αν υπάρχει, των κλίσεων των χορδών MN όταν $h \to 0$. Θα δούμε ότι η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται την ύπαρξη αυτού του ορίου. Πραγματικά (βλέπε σχήμα) η κλίση της MN είναι φυσικά μια συνάρτηση του h που δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(N\Lambda)}{(M\Lambda)}$$

Υπάρχει λοιπόν το όριο των κλίσεων και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η $f'(x_0)$ δηλαδή (βλέπε σχήμα 26) $\tan\omega = f'(x_0)$.

Γράφοντας $\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ και $df(x_0, h) = f'(x_0)h$ δηλαδή, το $\Delta f(x_0, h) = \Lambda N$ είναι η «αύξηση πάνω στο γράφημα της f», ενώ το $df(x_0, h) = K\Lambda$ είναι η «αύξηση πάνω στην εφαπτομένη $f(x_0){+}(x{-}x_0)f'(x_0)$». Η γεωμετρική διαίσθηση μάς λέγει ότι η διαφορά $\Delta f(x_0, h) - df(x_0, h) = NK$,



Σχήμα 4.3

δηλαδή το «λάθος» που θα κάναμε αν αντικαθιστούσαμε την $f(x)$ με την $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ ($\equiv$ εξίσωση εφαπτομένης), γίνεται, ακόμη και σε σχέση με το h, πολύ μικρό, όταν $h \to 0$. Ας δούμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τι συμβαίνει. Έχουμε

$$\begin{aligned} NK = \Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) &= f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h \\ &= h\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \\ &= h \cdot q(x_0,h) \end{aligned}$$

όπου

$$q(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Η παραγωγισιμότητα της f στο x_0 σημαίνει ότι η q, ως συνάρτηση του h, τείνει στο μηδέν για $h \to 0$, δηλαδή όχι μόνο

$$\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) \to 0$$

αλλά και

$$\frac{\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)}{h} \to 0, \text{ όταν } h \to 0$$

Συνήθως η ιδιότητα εκφράζεται ως εξής: Το $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)$ είναι «απειροστό» ανώτερης τάξης από το h, ή ακόμα: *Το* $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)$ *είναι* *«μικρό ο» του h (συμβολισμός:*

$$\Delta f(x_0, h) - df(x_0, h) = o(h),$$

για $h \to 0$).

Ας δώσουμε τους ακριβείς ορισμούς: Κατ' αρχάς *απειροστό* λέγεται μια συνάρτηση $f(x)$ με την ιδιότητα $f(x) \to 0$, $x \to x_0$ (ακριβέστερα απειροστό για $x \to x_0$).

Το σύμβολο «o» (o μικρό) καθώς και το «O» (O μεγάλο) οφείλονται στο Γερμανό μαθηματικό Landau (α' μισό $20^{\text{ου}}$ αιώνα) και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 4.3.1 *Αν f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή ενός σημείου x_0 (ανάλογοι ορισμοί δίνονται και αν οι συναρτήσεις ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(x_0, x_0 + h)$ ή $(x_0 - h, x_0)$, για $h > 0$), τότε*

(i) *$f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, αν υπάρχουν $\delta > 0$ και M ώστε*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

(ii) *$f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, αν*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0,$$

για $x \to x_0$.

($f(x) = O(g(x))$, για $x \to x_0$, διαβάζεται: η f είναι «O μεγάλο» της g για $x \to x_0$ και η $f(x) = o(g(x))$, για $x \to x_0$, διαβάζεται: η f είναι «o μικρό» της g για $x \to x_0$.)

Παραδείγματα:

(i) $\sin x = O(x)$, για $x \to 0$. Πραγματικά $|\sin x| \leq |x|$ για όλα τα x.

(ii) $\sin \frac{1}{x} = O(1)$, για $x \to 0$. Πραγματικά $|\sin(1/x)| \leq 1$ για όλα τα x.

(iii) $x^2 = o(x)$, για $x \to 0$. Πραγματικά $x^2/x = x \to 0$, για $x \to 0$.

(iv) $1 - \cos x = o(x)$, για $x \to 0$. Πραγματικά

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{x} 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} \to 1 \cdot 0 = 0,$$

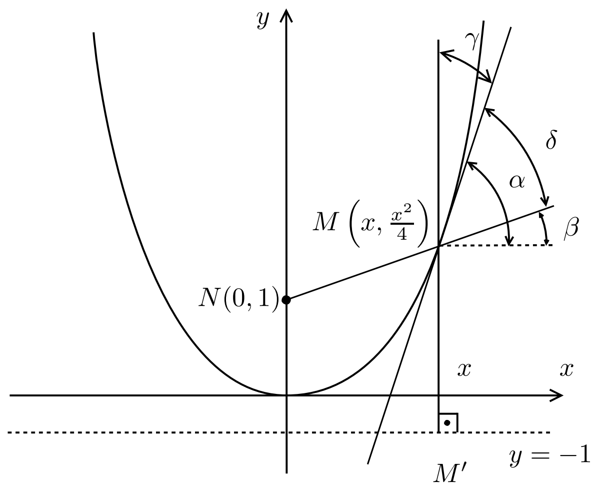
για $x \to 0$.

Παρατήρηση 4.3.2 Αν γράψουμε Δx για το h τότε η σχέση $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$ γίνεται $f'(x_0) = df(x_0, h)/\Delta x$. Για τη συνάρτηση $f(x) = x$ θα έχουμε

$$df(x_0, h) = 1 \cdot h = h$$

για όλα τα h, δηλαδή $dx(x_0, h) = \Delta x$. Οι παρατηρήσεις αυτές οδηγούν στο «συμβολισμό του Leibnitz» για την παράγωγο df/dx. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι το $df(x_0, h)$, το οποίο για δεδομένο x_0, είναι απλά η γραμμική ομογενής συνάρτηση $f'(x_0) \cdot h$, λέγεται *διαφορικό* της f. Δεν θα επιμείνουμε περισσότερο στη σημαντική αυτή έννοια γιατί στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής που εξετάζουμε δεν προσφέρει τίποτε περισσότερο από ότι η παράγωγος. Όπως θα μάθετε αργότερα η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Κλείνουμε αυτή την υποπαράγραφο με μια απλή εφαρμογή. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = (1/4)x^2$. Το γράφημά της είναι μια παραβολή με «εστία» το σημείο $N(0, 1)$ και «διευθετούσα» την ευθεία $y = -1$. Γεωμετρικά ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν από την εστία N και τη διευθετούσα $y = -1$. Πραγματικά (βλέπε σχήμα 4.4)



Σχήμα 4.4

$$\begin{aligned}
(MN)^2 &= x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 \\
&= x^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + 1 - \frac{x^2}{2} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{2} \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^2 \\
&= (MM')^2.
\end{aligned}$$

Μια πολύ γνωστή ιδιότητα της παραβολής είναι ότι «η εφαπτομένη της διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η παράλληλος προς τον άξονα συμμετρίας της και η ευθεία που συνδέει το σημείο επαφής με την εστία». Ας την αποδείξουμε: πρέπει να δείξουμε (βλέπε σχήμα 27) ότι $\gamma = \delta$, δηλαδή $\gamma = \alpha - \beta$ και επειδή $\gamma = \pi/2 - \alpha$ πρέπει να δείξουμε ότι $2\alpha - \beta = \pi/2$. Έχουμε όμως:

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= f'(x) \\
&= \frac{x}{2} \qquad \text{(η κλίση της εφαπτομένης είναι η παράγωγος)} \\
\tan\beta &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)
\end{aligned}$$

και επομένως:

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\
&= \frac{x}{1-\frac{x^2}{4}} \\
&= -\frac{1}{\tan\beta} \\
&= \cot(-\beta),
\end{aligned}$$

απ' όπου πραγματικά έπεται $2\alpha - \beta = \pi/2$. (Χωρίς να το πούμε υποθέσαμε ότι οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ήταν οξείες, δηλαδή $x > 0$ και $x^2/4 > 1$. Διερευνήστε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

4.4 Ορισμένα βασικά θεωρήματα για παραγωγίσιμες συναρτήσεις

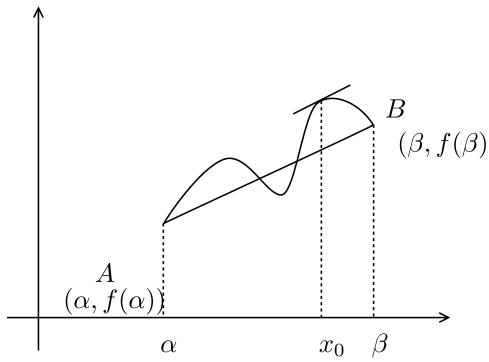
Ο ορισμός της παραγώγου υπαγορεύτηκε από ανάγκες της Γεωμετρίας και της Μηχανικής και ο Απειροστικός Λογισμός, που βασίζεται σ' αυτή την έννοια, έδωσε τεράστια ώθηση και στις δύο αυτές επιστήμες (και σε άλλες πολλές). Ο ορισμός όμως αυτός είναι σίγουρα πετυχημένος και για έναν άλλο λόγο: δίνει λαβή για τη δημιουργία μιας πλουσιότατης θεωρίας που απαντάει σε πολλά φυσιολογικά ερωτήματα για τη συμπεριφορά των πραγματικών συναρτήσεων. Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι θα έχανε μεγάλο μέρος από τη σημασία του ο Απειροστικός Λογισμός χωρίς τις εφαρμογές του, αλλά είναι επίσης βέβαιο ότι θα είχε τη θέση του στη Μαθηματική Επιστήμη ακόμη και χωρίς αυτές. Σύμφωνα με μια «μεταμαθηματική» αρχή οι δύο αυτές όψεις μπορεί να είναι αλληλένδετες: «Μια *καλή* μαθηματική θεωρία αν δεν έχει προέλθει από *σημαντικά* ερωτήματα άλλων επιστημών περιέχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί ακόμη και μετά τη δημιουργία της».

Από την παράγραφο αυτή θα αρχίσει να γίνεται εμφανής ο πλούτος της θεωρίας που μελετάμε.

4.4α' Τα θεωρήματα του Rôlle και της μέσης τιμής

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα *κλειστό* διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεχής σ' αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι για τα σημεία α, β η συνέχεια ισοδυναμεί με συνέχεια από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο *ανοιχτό* διάστημα (α, β). (Δε μας ενδιαφέρει η ύπαρξη παραγώγων, από δεξιά και αριστερά βέβαια, στα α, β).

Είναι φανερό γεωμετρικά ότι αν μετακινήσουμε τη χορδή AB (βλέπε σχήμα 4.5) παράλληλα προς τον εαυτό της, σε κάποια στιγμή θα γίνει εφαπτόμενη



Σχήμα 4.5

του γραφήματος, σε ένα σημείο x_0, $\alpha < x_0 < \beta$. Η κλίση της εφαπτομένης στο x_0, δηλαδή η $f'(x_0)$ θα είναι ίση με την κλίση της χορδής, δηλαδή

$$\frac{\big(f(\beta) - f(\alpha)\big)}{(\beta - \alpha)}.$$

Δώσαμε λοιπόν μια γεωμετρικά ευλογοφανή απόδειξη του παρακάτω σημαντικού θεωρήματος.

Θεώρημα 4.4.1 (μέσης τιμής) *Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε:*

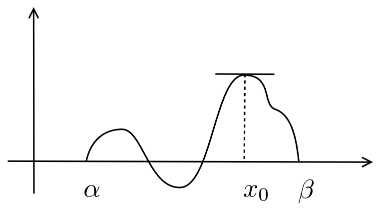
$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Μια ειδική και ενδιαφέρουσα περίπτωση του θεωρήματος προκύπτει όταν

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0.$$

Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν θεώρημα του Rôlle. Ο Rôlle (Γάλλος μαθηματικός του 17ου αιώνα) απέδειξε το θεώρημα μόνο για πολυώνυμα.

Θεώρημα 4.4.2 (Rôlle) *Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και επιπλέον $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.*



Σχήμα 4.6

Μια απλή παρατήρηση δείχνει ότι στην πραγματικότητα τα δυο θεωρήματα είναι ισοδύναμα. Πραγματικά ας υποθέσουμε ότι ισχύει το θεώρημα του Rôlle και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) - g(x) = h(x),$$

όπου

$$g(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

η γραμμική συνάρτηση της οποίας το γράφημα περιέχει τη χορδή AB. Η h θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rôlle γιατί η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f(\beta) = g(\beta)$. Υπάρχει λοιπόν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_0) = 0$, δηλαδή

$$f'(x_0) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το θεώρημα του Rôlle.

Απόδειξη: Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$ δηλαδή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $f'(x) = 0$ για όλα τα x και το θεώρημα είναι τετριμμένο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει x, αναγκαστικά στο (α, β), ώστε $f(x) \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $f(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε:

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\},$$

δηλαδή $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε x στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή υπάρχει x με $f(x) > 0$, θα έχουμε $f(x) > 0$, επομένως $\alpha < x_0 < \beta$. Θα δείξουμε ότι $f'(x_0) = 0$ και η απόδειξη θα έχει τελειώσει.

Επειδή $x_0 \in (\alpha, \beta)$, υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ άρα και οι $f'(x_0^+)$ και $f'(x_0^-)$ και μάλιστα

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-).$$

Έχουμε όμως

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και επειδή $f(x_0) \geq f(x)$ και $x > x_0$ το πηλίκο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός για $x > x_0$. Συνάγουμε ότι

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) \leq 0.$$

Με τελείως παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

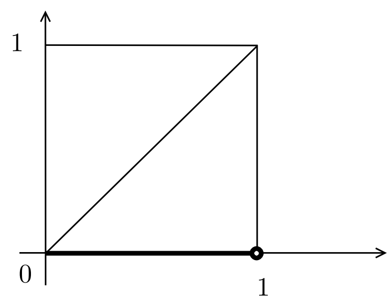
$$f'(x_0) = f'(x_0^-) \geq 0$$

και επομένως $f'(x_0) = 0$ όπως έπρεπε να δείξουμε. □

Παρατήρηση 4.4.3 Η υπόθεση της παραγωγισιμότητας στο (α, β) είναι φυσικά απαραίτητη για να έχει νόημα το συμπέρασμα του θεωρήματος. Η υπόθεση της συνέχειας στο $[\alpha, \beta]$ θα μπορούσε κατ' αρχήν να αντικατασταθεί ισοδύναμα με συνέχεια στα α και β μόνο (γιατί;) και είναι επίσης απαραίτητη. Αυτό το βλέπουμε με το απλό παράδειγμα: $f(x) = 0$ για $0 \leq x < 1$ και $f(1) = 1$. Εκτός από τη συνέχεια στο 1 όλες οι άλλες προϋποθέσεις επαληθεύονται αλλά το συμπέρασμα είναι σίγουρα αδύνατο. Πραγματικά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, ενώ

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 \neq 0$$

(βλέπε σχήμα 4.7).



Σχήμα 4.7

Παρατήρηση 4.4.4 Υπάρχουν διάφορες χρήσιμες παραλλαγές του θεωρήματος της μέσης τιμής. Η μορφή που δείξαμε είναι γνωστή με το όνομα του Lagrange (Γάλλος μαθηματικός του 18ου αιώνα). Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις f και g που ικανοποιούν και οι δύο τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής τότε η συνάρτηση:

$$h(x) = (f(\beta) - f(\alpha)) \cdot g(x) - (g(\beta) - g(\alpha)) \cdot f(x)$$

θα ικανοποιεί τη σχέση $h(\alpha) = h(\beta)$ και τις υποθέσεις του θεωρήματος. Θα υπάρχει λοιπόν $x \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$(f(\beta) - f(\alpha)) \cdot g'(x_0) = (g(\beta) - g(\alpha)) \cdot f'(x_0).$$

Αν υποθέσουμε ότι οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (α, β) και ακόμα $g(\beta) - g(\alpha) \neq 0$, οπότε αναγκαστικά $g'(x_0) \neq 0$ (γιατί;), μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση με τη μορφή

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το επόμενο θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy, το οποίο θα μας χρειαστεί αργότερα.

Θεώρημα 4.4.5 *Αν οι f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και αν επιπλέον οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (α, β) και $g(\beta) - g(\alpha) \neq 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε:*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Θεωρούμε αυτονόητο ότι ο αναγνώστης θα έχει ήδη επιχειρήσει να δει αν η προϋπόθεση ότι η f' και η g' δεν έχουν κοινή ρίζα είναι απαραίτητη. Αν δεν τα έχει καταφέρει ας δοκιμάσει τις συναρτήσεις x^2 και x^3 στο διάστημα $[-1, 1]$. (*Αν δεν έχει καν επιχειρήσει, τότε ίσως πρέπει να ξανασκεφτεί αν η επιλογή του να σπουδάσει μαθηματικά ήταν σωστή.*)

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια πολύ σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής.

Θεώρημα 4.4.6 *Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα (α, β) έχει παράγωγο $f'(x)$ ίση με μηδέν για όλα τα $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι σταθερά στο (α, β).*

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχαίο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και εξετάζουμε τη διαφορά $f(x) - f(x_0)$ για $x \in (\alpha, \beta)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 < x$. Το θεώρημα της μέσης τιμής μας λέγει ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x)$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, δηλαδή (αφού $f'(\xi) = 0$) $f(x) = f(x_0)$, όποιο και να είναι το $x \in (\alpha, \beta)$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να εκφράσουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να πούμε: «αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια παράγωγο σε ένα διάστημα, $f'(x) = g'(x)$ για $\alpha < x < \beta$, τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά σ' αυτό το διάστημα, δηλαδή $f(x) = g(x) + c$ για $\alpha < x < \beta$». (Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεση συνεπάγεται $(f - g)'(x) = 0$ για $\alpha < x < \beta$.)

□

4.4β' Μονότονες Συναρτήσεις

Σ' αυτή την υποπαράγραφο τα πεδία ορισμού θα είναι πάντοτε διαστήματα. Πιο συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα ανοιχτό διάστημα $[a, b]$. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι δουλειά ρουτίνας η εξέταση των υπόλοιπων μορφών διαστημάτων και θα την παραλείπουμε.

Μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ λέγεται αύξουσα (γνήσια αύξουσα) αν $x < y$ συνεπάγεται $f(x) \leq f(y)$ για $x, y \in (a, b)$ ($x < y$ συνεπάγεται $f(x) < f(y)$ για $x, y \in (a, b)$) και φθίνουσα (γνήσια φθίνουσα) αν $x < y$ συνεπάγεται $f(x) \geq f(y)$ για $x, y \in (a, b)$ ($x < y$ συνεπάγεται $f(x) > f(y)$ για $x, y \in (a, b)$). Μονότονη (γνήσια μονότονη) λέγεται μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα (γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα).

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\pi/2, \pi/2)$ καθώς και στο $[-\pi/2, \pi/2]$.

(ii) Η συνάρτηση $x^+(x) = \max(x, 0)$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι γνησίως αύξουσα (ένας άλλος τρόπος να γράψουμε την x^+ είναι ο $x^+(x) = \frac{1}{2}|x| + x$, μαντέψτε και ορίστε την x^-).

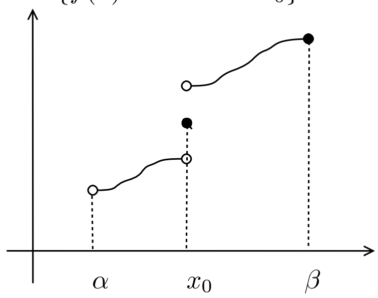
(iii) Η συνάρτηση $\tan x$ είναι γνήσια αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

(iv) Η συνάρτηση $\cos x$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$.

(v) Η συνάρτηση $-[x]$ είναι φθίνουσα αλλά όχι γνήσια στο $\mathbb{R}$.

Μια μονότονη συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής (παράδειγμα $[x]$). Ας δούμε τι είδους ασυνέχειες παρουσιάζει. Θα περιοριστούμε σε αύξουσες συναρτήσεις. Η μελέτη των φθινουσών είναι τελείως ανάλογη (αν θέλουμε μάλιστα μπορούμε να αναγάγουμε τη μια περίπτωση στην άλλη παρατηρώντας ότι «η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν η $-f$ είναι φθίνουσα»).

Έστω λοιπόν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση και $a < x_0 < b$. Το σύνολο $\{f(x) : a < x < x_0\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω διότι για παράδειγμα το $f(x_0)$ είναι ένα άνω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το $\sup\{f(x) : a < x < x_0\}$. Αν γράψουμε γ για αυτό το sup ισχυριζόμαστε (κάτι που είναι φανερό διαισθητικά) ότι $\gamma = f(x_0^-)$. Πραγματικά, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_1 < x_0$ ώστε $f(x_1) > \gamma - \varepsilon$ (αλλιώς το $\gamma - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα μικρότερο από το supremum). Τότε όμως θα έχουμε και $f(x) > \gamma - \varepsilon$ για κάθε x με $x_1 < x$. Θέτοντας λοιπόν $\delta = x_0 - x_1$ θα έχουμε $0 < x_0 - x < \delta$ συνεπάγεται $\gamma - \varepsilon < f(x) \leq \gamma < \gamma + \varepsilon$, που αποδεικνύει ότι $\gamma = f(x_0-)$. Τελείως παρόμοια δείχνουμε ότι $\gamma' = \inf\{f(x) : x_0 < x < \beta\} = f(x_0^+)$.



Σχήμα 4.8

Η ύπαρξη των δύο πλευρικών ορίων $f(x_0^+)$ και $f(x_0^-)$ δείχνει ότι αν το x_0 δεν είναι σημείο συνεχείας θα είναι ασυνέχεια α' είδους και μάλιστα με πήδημα

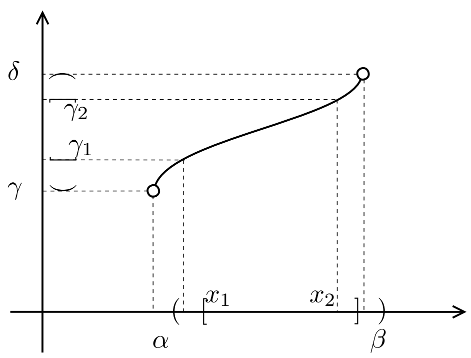
$$f(x_0^+) - f(x_0^-) = \inf\{f(x) : x < x_0\} - \sup\{f(x) : x < x_0\}.$$

Ας συνοψίσουμε αυτά τα αποτελέσματα σε ένα θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.7 *Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο (a, b), τότε αν είναι ασυνεχής σε κάποιο x_0, η ασυνέχειά της θα είναι α' είδους. Επιπλέον θα έχουμε:* $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \left(f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+)\right)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη στο (a, b) και ας γράψουμε: $\gamma = \inf\{f(x) : \alpha < x < \beta\}$, $\delta = \sup\{f(x) : \alpha < x < \beta\}$. Αν το σύνολο $\{f(x) : \alpha < x < \beta\}$ δεν είναι φραγμένο προς τα κάτω (πάνω) τότε το γ (δ) σημαίνει $-\infty(+\infty)$. Στην οποιαδήποτε περίπτωση οι τιμές της $f(x)$, για $\alpha < x < \beta$, βρίσκονται στο διάστημα $[\gamma, \delta]$ (στην περίπτωση που το γ ή το δ ή και τα δύο είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε γράφουμε $(-\infty, \delta]$, $[\gamma, \infty)$ ή $(-\infty, \infty)$. Στην περίπτωση που η f είναι γνήσια αύξουσα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $[\gamma, \delta]$ με (γ, δ). Πραγματικά, αν για παράδειγμα $f(x_0) = \gamma$ για κάποιο $x_0 \in (a, b)$ τότε παίρνοντας για παράδειγμα $x_1 = (a + x_0)/2$ θα έχουμε $f(x_1) < f(x_0) = \gamma$, διότι $x_1 < x_0$, που είναι άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι όχι μόνο γνήσια αύξουσα αλλά και συνεχής. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $y \in (\gamma, \delta)$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x) = y$. Πραγματικά, επειδή $y > \gamma$ και $\gamma = \inf\{f(x) : \alpha < x < \beta\}$ θα υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_1) = \gamma_1 < y$ και όμοια θα υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$, αναγκαστικά $x_2 > x_1$, ώστε $f(x_2) = \gamma_2 > y$. Το αποτέλεσμα μας τώρα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής εφαρμοσμένου στη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.



Σχήμα 4.9

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι ο εξής: «Αν η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής στο (a, b), τότε έχει αντίστροφο g στο (γ, δ), δηλαδή $y = f(x)$ συνεπάγεται $x = g(y)$ ή $g(f(x)) = x$ και $f(g(y)) = y$, για όλα τα $x \in (a, b)$ και $y \in (\gamma, \delta)$».

Ισχύει και κάτι παραπάνω : «Η g είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο (γ, δ)».

Έστω $\gamma < y_1 < y_2 < \delta$. Υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$ και φυσικά $x_1 < x_2$ (αλλιώς θα είχαμε $y_1 \geq y_2$) δηλαδή $g(y_1) < g(y_2)$.

Η g λοιπόν είναι γνήσια αύξουσα στο (γ, δ) και επομένως, αν δεν ήταν συνεχής, σε ένα σημείο $y_0 \in (\gamma, \delta)$,τότε ή $\lim_{y \to y_0^-} g(y) < g(y_0)$ ή $\lim_{y \to y_0^+} g(y) > g(y_0)$.

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $g(y_0^-) < g(y_0)$. Θα έχουμε τότε: $\gamma < y < y_0$ συνεπάγεται $\alpha < g(y) < g(y_0^-) < g(y_0)$ και επομένως: $\gamma < y < y_0$ συνεπάγεται $f(g(y)) < f\left(g(y_0^-)\right) < f(g(y_0))$, δηλαδή $\gamma < y < y_0$ συνεπάγεται $y < f\left(g(y_0^-)\right) < y_0$, το οποίο προφανώς είναι άτοπο — πάρτε για παράδειγμα $y = \frac{1}{2}\left(y_0 + f\left(g(y_0^-)\right)\right)$.

Ας προχωρήσουμε ένα βήμα παραπέρα και ας εξετάσουμε γνήσια μονότονες και συνεχείς συναρτήσεις f που είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.8 (i) *Αν η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχείς στο (a,b) και παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφή της g είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.*

(ii) *Αν $f'(x_0) = 0$, τότε, $g'(y_0) = +\infty$ αν η g είναι αύξουσα, και $g'(y_0) = -\infty$ αν η g είναι φθίνουσα.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο το (i). Η απόδειξη του (ii) είναι παρόμοια (άσκηση).

Ιδού κατ' αρχάς μια πολύ συνηθισμένη και λανθασμένη απόδειξη. Αν γράψουμε $y = f(x)$ τότε $x = g(y)$ και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibnitz για την παράγωγο:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

δηλαδή $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ Φυσικά το λάθος βρίσκεται στο ότι χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο dx/dy σαν πηλίκο ενώ δεν είναι παρά όριο πηλίκων. Δεν είναι δύσκολο πάντως να διορθώσουμε τα πράγματα.

Η ύπαρξη της $f'(x_0)$ σημαίνει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0),$$

για $x \to x_0$.

Επειδή $f'(x_0) \neq 0$ θα έχουμε επίσης

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)},$$

για $x \to x_0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει λοιπόν $\delta > 0$ ώστε $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ συνεπάγεται

$$\left|\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)}\right| < \varepsilon.$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. Ας γράψουμε

$$y_1 = f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) < f(x_0) = y_0 < f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = y_2$$

και $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Για κάθε y με $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$ θα έχουμε $g(y) \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$, δηλαδή $y = f(x)$ για κάποιο x (συγκεκριμένα το $g(y)$) στο $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$. Έχουμε λοιπόν βρει ότι:

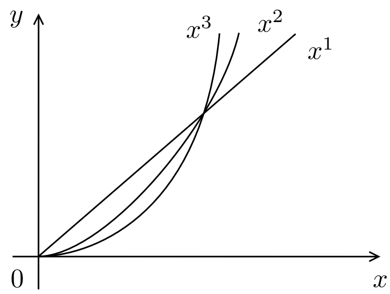
$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

για κάποιο x με $|x - x_0| < \delta/2$, και επομένως

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon,$$

που συμπληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα: $f(x) = x^n$, για $n \in \mathbb{N}, x > 0$. Είναι φανερό ότι η x^n είναι γνήσια αύξουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφή της g, στο διάστημα $(0, \infty)$, διότι $\inf_{x>0} x^n = 0$ και $\sup_{x>0} x^n = \infty$. Θα έχουμε λοιπόν $g(y) = x$ αν και μόνο αν $x^n = y$, $0 < y < \infty$. Ως συνήθως γράφουμε $y^{1/n}$ αντί $g(x)$ και $y^{m/n}$ για τη σύνθετη συνάρτηση $(g(x))^m$, για $m \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 4.10

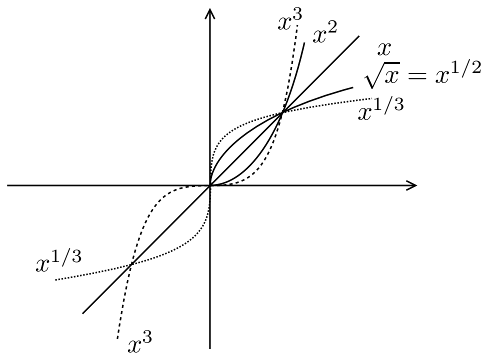
Το προηγούμενο αποτέλεσμα μάς δίνει την παράγωγο της $g(x)$. Πραγματικά αν $x^n = y$ τότε:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

δηλαδή ο τύπος $(x^n)' = nx^{n-1}$ ισχύει και για εκθέτες της μορφής $1/n$, για $n \in \mathbb{N}$.

Ο αναγνώστης καλείται να συμπληρώσει ορισμένα «κενά» στο παραπάνω παράδειγμα. Για παράδειγμα, γράφοντας $x^q, q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ υπονοούμε ότι η συνάρτηση ορίζεται καλά, δηλαδή αν $q = m/n = m'/n'$, για $m, m' \in \mathbb{Z}$, και $n, n' \in \mathbb{N}$ τότε τα $(x^{1/n})^m$ και $(x^{1/n'})^{m'}$ δίνουν την ίδια συνάρτηση. Επίσης αν το n είναι περιττό τότε η $x^{1/n}$ ορίζεται για όλα τα x και έχει παράγωγο για όλα τα $x \neq 0$ (για $x = 0$ η παράγωγος είναι $+\infty$ αν $n > 1$). Για $n = 1$ φυσικά η παράγωγος υπάρχει για όλα τα x. Είναι επίσης εύκολο να δειχτεί ότι οι συνήθεις ιδιότητες των δυνάμεων ($x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ όπου α, β ρητοί) ισχύουν.

Ας δείξουμε για παράδειγμα ότι $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, όπου υποθέτουμε $x > 0$, $\alpha = m_1/n_1$, $\beta = m_2/n_2$, με $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, και $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x^{n_1 n_2}$ είναι γνήσια αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι $(x^{\alpha+\beta})^{n_1 n_2} =$



Σχήμα 4.11

$(x^{\alpha}x^{\beta})^{n_1 n_2}$. Χρησιμοποιώντας τις γνώστες ιδιότητες των δυνάμεων για ακέραιους εκθέτες και τον ορισμό του $x^q, q \in \mathbb{Q}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(x^{\alpha+\beta})^{n_1 n_2} &= \left(x^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}}\right)^{n_1 n_2} \\
&= x^{m_1 n_2 + m_2 n_1} \\
&= x^{m_1 n_2} x^{m_2 n_1} \\
&= (x^{m_1})^{n_2} (x^{m_2})^{n_1} \\
&= (x^{\frac{m_1}{n_1}})^{n_1 n_2} (x^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1 n_2} \\
&= (x^{\alpha})^{n_1 n_2} (x^{\beta})^{n_1 n_2} \\
&= (x^{\alpha} x^{\beta})^{n_1 n_2},
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τη σχέση $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta}$.

Μια γενική απλή παρατήρηση για την αντίστροφη g μιας γνήσια μονότονης συνάρτησης f είναι ότι «τα γραφήματα των f και g είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο» (των συναρτήσεων x, x^2, x^3 φαίνονται στο σχήμα 34).

Κλείνουμε την παράγραφο με ένα απλό και σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.9 (i) *Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) και παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0$ για $\alpha < x < \beta)$.*

(ii) *Αν η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) > 0)$ για $\alpha < x < \beta$, τότε η f είναι αύξουσα (γνήσια αύξουσα) στο (α, β). Ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες (γνήσια φθίνουσες) συναρτήσεις.*

Απόδειξη:

(i) Αν η f είναι αύξουσα τότε τα πηλίκα διαφορών $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$ είναι πάντοτε μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός και επομένως $f'(x_0) \geq 0$ για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$

(ii) Έστω $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στο $[x_1, x_2]$ έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$ για κάποιο $\xi \in (x_1, x_2)$ και επομένως ($x_2 > x_1$, $f'(\xi) \geq 0$) $f(x_2) \geq f(x_1)$. Αν $f'(\xi) \geq 0$ τότε $f(x_2) > f(x_1)$.

□

Παραδείγματα:

(i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, \infty)$ και φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$. Η παράγωγός της είναι $2x$ και είναι πραγματικά μεγαλύτερη του μηδενός για $x > 0$, και μικρότερη του μηδενός για $x < 0$.

(ii) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι αύξουσα και μάλιστα γνήσια σε όλο το $\mathbb{R}$, παρόλο που η παράγωγος της $2x^2$ μηδενίζεται για $x = 0$. (Είναι βέβαια ≥ 0 για όλα τα x).

(iii) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $(-\infty, \infty)$ (όχι γνήσια) και $f'(x) \geq 0$ για $-\infty < x < \infty$ (βλέπε παραδόσεις 4.1α')

4.4γ' Οι συναρτήσεις $\alpha^x, x^\alpha, \log$

Έστω $a > 0$. Το σύμβολο $a^n, n \in \mathbb{N}$, ορίζεται σαν το γινόμενο n παραγόντων ίσων με α και το σύμβολο $a^{m/n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ως ο (μοναδικός) θετικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει $\beta^n = \alpha^m$. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται λοιπόν η συνάρτηση a^q για $q \in \mathbb{Q}$, και όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ικανοποιεί τις αναμενόμενες ιδιότητες των δυνάμεων.

Θέλουμε τώρα να «επεκτείνουμε» τον παραπάνω ορισμό έτσι ώστε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f(x)$, που θα συμβολίζουμε πάλι a^x ορισμένη για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και ώστε $f(q) = a^q$ αν $q \in \mathbb{Q}$.

Αυτό φυσικά θα μπορούσε να γίνει κατά πολλούς τρόπους, θέτοντας για παράδειγμα $f(x) = 0$ για άρρητα x και $f(q) = a^q$, $q \in \mathbb{Q}$, αλλά δεν είναι όλες αυτές οι επεκτάσεις επιθυμητές. Για παράδειγμα, θέλουμε η «επέκταση» που θα βρούμε να ικανοποιεί τις ιδιότητες των δυνάμεων. Θα δούμε σε λίγο ότι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν απαιτήσουμε:

(i) η f να είναι συνεχής και

(ii) $f(x) = a^q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι υπάρχει τέτοια f, τότε ο ορισμός της συνέχειας κατά Heine μας λέγει ότι $f(q_n) \to f(q)$, δηλαδή $a^{q_n} \to f(q)$ για κάθε ακολουθία ρητών q_n με την ιδιότητα $q_n \to q$. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.4.10 *Αν* $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *και* $q_n \to q, q_n \in \mathbb{Q}$, *τότε ορίζουμε* $a^x = \lim a^{q_n}$.

Για να είναι «καλός» αυτός ο ορισμός πρέπει:

(i) Να υπάρχει το $\lim a^{q_n}$, και

(ii) Αν $q_n \to x$ και $q'_n \to x$, $q_n, q'_n \in \mathbb{Q}$, τότε $\lim a^{q_n} = \lim a^{q'_n}$.

Και οι δύο αυτές ιδιότητες μπορούν να δειχθούν εύκολα με τη βοήθεια της

Πρόταση 4.4.11 *Αν* $a > 0$ *και* $q_n \to 0$ *με* $q_n \in \mathbb{Q}$, *τότε* $a^{q_n} \to 1$.

Η περίπτωση $a = 1$ είναι τετριμμένη και η περίπτωση $a < 1$ ανάγεται εύκολα στην $a > 1$ (πώς;). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε $a > 1$. Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $a > 1$ συνεπάγεται (τετριμμένο) $a^q > a^{q'}$ όταν $q > q'$ και επομένως

$$\left(a^{|q_n|}\right)^{-1} = a^{-|q_n|} \leq a^{q_n} \leq a^{|q_n|}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $a^{|q_n|} \to 1$. Γράφουμε $|q_n| = A_n/B_n$ και $B_n = \Pi_n A_n + \Upsilon_n$ (αλγόριθμος της διαίρεσης) με $A_n, B_n, \Pi_n, \Upsilon_n \geq 0$ και $0 \leq \Upsilon'_n, A_n$ και έχουμε:

$$a^{|q_n|} = a^{\overline{\frac{1}{\Pi_n + \frac{\Upsilon_n}{A_n}}}} \leq a^{\frac{1}{\Pi_n}}.$$

Θέτουμε λοιπόν $a^{1/\Pi_n} = 1 + \gamma_n$, δηλαδή $a = (1+\gamma_n)^{\Pi_n}$, $\gamma_n \geq 0$, και αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_n \to 0$. Από τον τύπο του διωνύμου του Newton έχουμε $a = (1+\gamma_n)^{\Pi_n} \geq 1 + \Pi_n \gamma_n$ οπότε και $0 \leq \gamma_n \leq \frac{a-1}{\Pi_n}$.

Η σχέση $B_n = \Pi n A_n + \Upsilon_n$, $0 \leq \Upsilon_n \leq A_n$ δίνει αμέσως $\Pi_n = [B_n/A_n]$ που συγκλίνει στο άπειρο, άρα $(a-1)/\Pi_n \to 0$ και επομένως $\gamma_n \to 0$.

Γυρνάμε τώρα στα (i), (ii). Η σύγκλιση της $q_n, q_n \to x$, συνεπάγεται ότι η q_n είναι φραγμένη και επομένως το $\lim a^{q_n}$ είναι διάφορο του μηδενός (γιατί;) και έτσι

$$\lim \frac{a^{q'_n}}{a^{q_n}} = \lim a^{q'_n - q_n} = 1,$$

δηλαδή $\lim a^{q_n} = \lim a^{q'_n}$ για κάθε q'_n με $q'_n \to x$.

Η παρατήρηση αυτή αποδεικνύει το (ii) και δείχνει ότι για να δείξουμε το (i) αρκεί να το δείξουμε για μια συγκεκριμένη ακολουθία q_n με $q_n \to x$.

Διαλέγουμε μια q_n αύξουσα, οπότε η a^{q_n} είναι αύξουσα και (επειδή για παράδειγμα $a^{q_n} \leq a^{[x]+1}$) φραγμένη, άρα συγκλίνουσα. Μένει να δείξουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε την q_n αύξουσα. Παίρνουμε ένα ρητό q_1 με $x - 1 < q_1 < x$, ένα ρητό $q_2 > q_1$ με $x - 1/2 < q_2 < x$ κ.ο.κ. Το γεγονός ότι οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς δείχνει ότι μπορούμε να σχηματίσουμε μια τέτοια ακολουθία, η οποία από τον τρόπο κατασκευής της θα είναι αύξουσα (η δεκαδική παράσταση του x για παράδειγμα, δίνει άμεσα μια τέτοια ακολουθία).

Έχουμε λοιπόν τώρα ένα ακριβή ορισμό του συμβόλου a^x και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες του, καθώς και άλλες συναρτήσεις ($x^a, \log_a x$) που συνδέονται με την συνάρτηση a^x που ονομάζεται *εκθετική με βάση a*.

Παρατήρηση 4.4.12 Ο τρόπος που ακολουθούμε για να ορίσουμε την a^x είναι αναμφισβήτητα πολύ κοντά στη διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας (αν θέλαμε να βρούμε το $2^\pi = 2^{3,14159\ldots}$ θα το προσεγγίζαμε με 2^3, $2^{3,1}$, $2^{3,14}$, $2^{3,141}$, $2^{3,1415}$, $2^{3,14159}, \ldots$), παρά τις κάποιες τεχνικές δυσκολίες που παρουσιάζει. Θα δώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο έναν «οικονομικότερο» τρόπο ορισμού με τη βοήθεια του ολοκληρώματος.

4.4δ' Η εκθετική συνάρτηση α^x, $\alpha > 0$

Οι ιδιότητες $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = 1/a^x$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Για παράδειγμα,

$$(ab)^x = \lim(ab)^{q_n} = \lim(a^{q_n} b^{q_n}) = (\lim a^{q_n})(\lim b^{q_n}) = a^x b^x$$

όπου q_n μια ακολουθία ρητών με $q_n \to x$.

Αν $a = 1$, $a^x = 1$ για όλα τα x και αν $a < 1$ τότε

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$$

με $1/a > 1$. Για να μελετήσουμε λοιπόν συνέχεια, παραγωγισιμότητα κ.τ.λ., αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $a > 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν $a > 1$. Αν $x - y > 0$ τότε υπάρχει ακολουθία $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_0 \in \mathbb{Q}$ με $q_n \geq q_0 > 0$ για όλα τα n, ώστε $q_n \to x - y$ (γιατί;) και επομένως

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \geq a^{q_0} > 1,$$

δηλαδή η a^x είναι αύξουσα αν $a > 1$ (αν $a < 1$ τότε η a^x είναι φθίνουσα).

Στον προηγούμενο συλλογισμό χρησιμοποιήσαμε την μονοτονία της a^y, $y \in \mathbb{R}$. Πού χρησιμοποιήθηκε; Πώς αποδεικνύεται;

Πρόταση 4.4.13 *Η a^x είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε $\lim a^x, x \to x_0$ δηλαδή

$$\lim(a^x - a^{x_0}) = \lim a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0} \lim(a^{x-x_0} - 1) = 0,$$

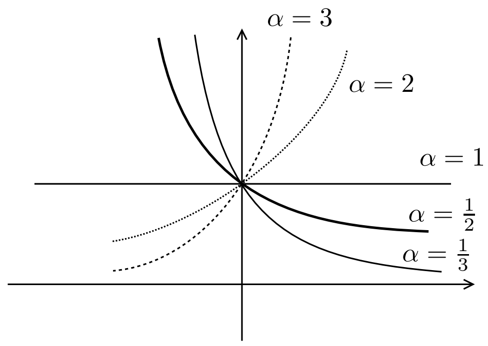
για $x \to x_0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim a^x = 1, x \to 0$ (δηλαδή η συνέχεια για $x = 0$ συνεπάγεται συνέχεια παντού!)

Στην αρχή της παραγράφου δείξαμε ότι $q_n \to 0$ συνεπάγεται $a^{q_n} \to 1$ ($q_n \in \mathbb{Q}$). Έχουμε επομένως $a^{1/n} \to 1$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$ και επειδή η a^x είναι αύξουσα

$$0 < x < \frac{1}{n_0} \Rightarrow 0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $\lim a^x = 1$ για $x \to 0^+$ και, επειδή $a^{-x} = 1/a^x$, θα έχουμε επίσης $\lim a^x = 1$ για $x \to 0^-$, δηλαδή $\lim a^x = 1$, για $x \to 0$. □

Στο σχήμα 4.12 φαίνονται (σχηματικά) οι περιπτώσεις $a = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$.



Σχήμα 4.12

Πρόταση 4.4.14 *Η* $f(x) = a^x$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{h\to 0}(a^h - 1)/h$, δηλαδή η παράγωγος της a^x για $x = 0$, τότε υπάρχει η παράγωγος για οποιοδήποτε x και ισχύει $(a^x)' = f'(0)a^x$, δηλαδή η παράγωγος της a^x είναι η ίδια η a^x πολλαπλασιασμένη επί μια σταθερά!

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι

$$\frac{a^{-h} - 1}{-h} = \frac{1 - a^h}{-ha^h} = a^{-h}\frac{a^h - 1}{h}$$

και $a^{-h} \to 1,\ h \to 0$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι το $\lim_{h\to 0^+}(a^h - 1)/h$ υπάρχει.

Ισχυριζόμαστε ακόμη ότι αρκεί να πάρουμε $h = 1/k,\ k = 1, 2, \ldots$, δηλαδή να δείξουμε ότι η ακολουθία $k(a^{1/k} - 1)$ συγκλίνει. Ας αποδείξουμε πρώτα τον τελευταίο ισχυρισμό.

Γράφουμε $y_k = k(a^{1/k} - 1)$ οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
a &= \left(1+\frac{y_k}{k}\right)^k \\
&= 1 + y_k + \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{y_k}{k}\right)^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}\left(\frac{y_k}{k}\right)^l + \cdots \\
&\quad + \frac{k(k-1)\cdots(k-(k-1))}{k!}\left(\frac{y_k}{k}\right)^k \\
&= 1 + y_k + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)y_k^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{l!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{l-1}{k}\right)\right]y_k^l + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]y_k^k
\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η y_k είναι φθίνουσα. Πραγματικά αν για κάποιο k είχαμε $y_k < y_{k+1}$ τότε θα είχαμε και

$$\begin{aligned}
a &= 1 + y_k + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)y_k^k \\
&< 1 + y_{k+1} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)y_{k+1}^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k+1}\right)\right]y_{k+1}^k \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!}\left[\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{k+1}\right)\right]y_{k+1}^{k+1} \\
&= a
\end{aligned}$$

που είναι φυσικά άτοπο. Η y_k είναι λοιπόν φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω (≥ 0) άρα συγκλίνει.

Ας δείξουμε τώρα, για να τελειώσουμε την απόδειξη, ότι $(a^h - 1)/h$ συγκλίνει για $h \to 0^+$. Γράφουμε $k = [1/h]$ και έχουμε

$$\frac{a^{\frac{1}{k+1}} - 1}{\frac{1}{k}} < \frac{a^h - 1}{h} < \frac{a^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k+1}},$$

διότι $k \leq 1/h < k+1$, ή

$$\frac{k}{k+1}\left((k+1)(a^{\frac{1}{k+1}} - 1)\right) < \frac{a^h - 1}{h} < \frac{k+1}{k}\left(k(a^{\frac{1}{k}} - 1)\right),$$

από όπου εύκολα έπεται ότι η $(a^h - 1)/h$ συγκλίνει, όταν $h \to 0^+$. $\square$

Ο αριθμός e

Η προηγούμενη απόδειξη περιέχει και ένα ακόμα ενδιαφέρον συμπέρασμα: η ακολουθία $(1+\frac{1}{k})^k$ συγκλίνει. Πραγματικά

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)-\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]$$

και επομένως

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

δηλαδή η $(1+\frac{1}{k})^k$ είναι αύξουσα. Επίσης

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &< 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} \\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k} \\ &= 1+1+1-\frac{1}{2^{k+1}} < 3,\end{aligned}$$

οπότε η ακολουθία $(1+\frac{1}{k})^k$ ως αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει. Το $\lim(1+\frac{1}{k})^k$, καθώς $k\to\infty$, συμβολίζεται με e και ισούται προσεγγιστικά με

$$2{,}718281828459045235360287\ldots$$

Ένας άλλος χρήσιμος τύπος για τον αριθμό e προκύπτει από την ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

Αν λοιπόν γράψουμε

$$b_k = 1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}$$

τότε η b_k θα είναι αύξουσα και φραγμένη (ίδια απόδειξη όπως πριν) επομένως θα συγκλίνει και θα έχουμε:

$$e \le \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right).$$

Από την άλλη μεριά για οποιοδήποτε φυσικό m, αν $k\ge m$, θα έχουμε:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{k}\right)\right]$$

και αφήνοντας το k να τείνει στο άπειρο,

$$e \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!} = b_m.$$

Η διπλή ανισότητα $b_m \le e \le \lim b_m$ για όλα τα m δείχνει ότι $e=\lim b_m$. Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα σε ένα θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.15 *Οι ακολουθίες*

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \qquad \textit{και} \qquad b_k = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

είναι αύξουσες, $a_k \leq b_k$*, φραγμένες και έχουν το ίδιο όριο που συμβολίζεται με το γράμμα* e ($\simeq 2{,}718281$).

Ο αριθμός αυτός είναι μια από τις σημαντικότερες σταθερές που εμφανίζονται στα Μαθηματικά. Είναι ενδιαφέρον να δώσουμε και μια ακόμη παράσταση του e, αυτή τη φορά με μια φθίνουσα ακολουθία. $e = \lim(1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ και η $(1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ φθίνει. Η σχέση $e = \lim(1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ είναι σχεδόν προφανής:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) \to e \cdot 1 = e.$$

Για να δείξουμε ότι η $(1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ είναι φθίνουσα, πρέπει να δείξουμε:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} < \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k,$$

για $k = 1, 2, 3, \ldots$, δηλαδή $(k+1)^{k+1}(k-1)^k < k^{2k+1}$ ή $(k^2-1)^k(k+1) < k^{2k+1}$ ή

$$1 + \frac{1}{k} < \left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)^k.$$

Η τελευταία ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)^k = 1 + k\frac{1}{k^2-1} + \cdots > 1 + \frac{k}{k^2-1} > 1 + \frac{1}{k}.$$

Ένα άμεσο πόρισμα είναι η παρακάτω χρήσιμη ανισότητα:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

για $k = 1, 2, 3, \ldots$

Μια ωραία εφαρμογή αυτής της ανισότητας είναι η $(e^x)' = e^x$, δηλαδή η e^x ισούται με τη παράγωγο της! Πραγματικά έχουμε δείξει ότι: $(e^x)' = ce^x$ όπου $c = \lim k(e^{1/k} - 1)$. Οι ανισότητες

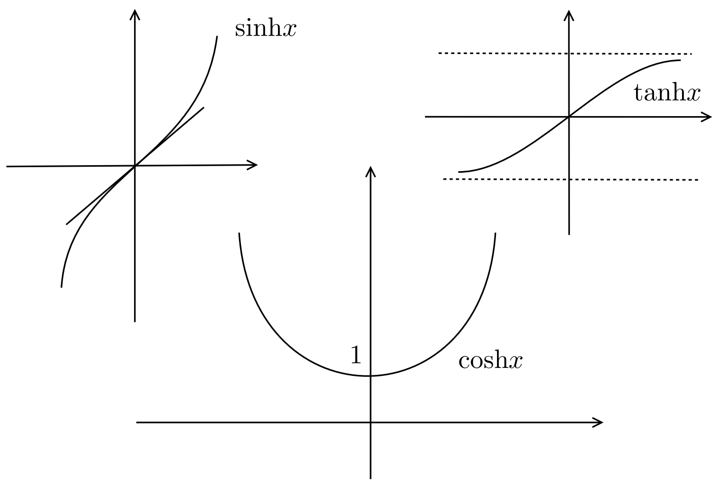
$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

δίνουν $1 < k(e^{\frac{1}{k}} - 1)$ και $(k+1)\left(e^{\frac{1}{k+1}} - 1\right) < \frac{k+1}{k} \to 1$ απ' όπου συνάγουμε: $\lim k(e^{1/k} - 1) \geq 1$ και $\lim k(e^{1/k} - 1) \leq 1$, δηλαδή $\lim k(e^{1/k} - 1) = 1$.

Η ιδιότητα αυτή μας οδηγεί να χρησιμοποιούμε συνήθως την e^x και όχι τις a^x, $a \neq e$. Όταν για παράδειγμα λέμε εκθετική συνάρτηση χωρίς να αναφέρουμε βάση, θα εννοούμε πάντοτε την e^x.

Συχνά επίσης στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες υπερβολικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων θα μάθετε ότι η σχέση αυτή είναι ακόμη πιο στενή). Οι συναρτήσεις αυτές είναι:

- υπερβολικό ημίτονο: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ή $\mathrm{sh}\, x$)
- υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (ή $\mathrm{ch} x$)
- υπερβολική εφαπτομένη: $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (ή $\mathrm{th}\, x$).



Σχήμα 4.13

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Ιδού οι γραφικές παραστάσεις και μερικές ιδιότητές τους (οι αποδείξεις είναι απλές και αφήνονται στον αναγνώστη).

$$\begin{array}{ll}
\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 & \sinh(-x) = -\sinh x \\
\cosh(-x) = \cosh x & \tanh x = \sinh x / \cosh x \\
\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x & (\sinh x)' = \cosh x \\
(\cosh x)' = \sinh x & (\tanh x)' = 1/(\cosh x)^2
\end{array}$$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα αποτέλεσμα λίγο διαφορετικού χαρακτήρα.

Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Πραγματικά έστω ότι ο e είναι ο ρητός m/n, $m, n \in \mathbb{N}$. Η σχέση

$$b_k = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} \to e$$

μας λέγει τότε

$$0 < \frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!}\right)$$

ή ακόμη

$$\begin{aligned} 0 &< n!\left(\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}\right) \\ &= \lim g_k, \end{aligned}$$

όπου

$$g_k = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Δηλαδή ο θετικός ακέραιος αριθμός

$$A = n!\left(\frac{m}{n} - 1 - \frac{1}{1!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right)$$

είναι το $\lim g_k$.

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\begin{aligned} 0 < g_k &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-3}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\left(2 - \frac{1}{2^{k-2}}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\cdot 2 \\ &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Οπότε $0 < A \leq 11/12$ που φυσικά είναι άτοπο.

Παρατήρηση 4.4.16 Ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο. Ο e όχι μόνο δεν είναι ρητός, δηλαδή δεν είναι ρίζα εξίσωσης της μορφής $ax + b = 0$ με a, b ακέραιους, αλλά είναι και υπερβατικός, δηλαδή δεν υπάρχει πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ με ακέραιους συντελεστές που να έχει σαν μια ρίζα το e.

Το σημαντικό αυτό θεώρημα αποδείχτηκε το 1872 από το Γάλλο μαθηματικό Hermite και λίγο αργότερα ο Γερμανός μαθηματικός Lindemann, με παρόμοια μέθοδο, έδειξε το ίδιο αποτέλεσμα για το π. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα είναι το κλειδί για να δειχτεί ότι «ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται με κανόνα και διαβήτη».

Η λογαριθμική συνάρτηση

Αν $a > 0$ και $a \neq 1$ τότε η συνάρτηση a^x είναι γνήσια μονότονη (αύξουσα αν $a > 1$, φθίνουσα αν $a < 1$). Επίσης

$$\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

αν $a > 1$ και

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

αν $a < 1$.

Οι αποδείξεις είναι εύκολες. Για παράδειγμα,

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a-1))^{[x]} \geq 1 + [x](a-1) \to +\infty$$

όταν $x \to +\infty$ αν $a > 1$.

Μια προφανής παραλλαγή του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής μας λέγει τώρα, ότι για κάθε y με $0 < y < \infty$, υπάρχει ακριβώς ένα x (διότι η a^x είναι γνήσια μονότονη) ώστε $a^x = y$. Το x αυτό λέγεται λογάριθμος με βάση a του y και συμβολίζεται $\log_a y$.

Η συνάρτηση $\log_a x$, $x > 0$ είναι λοιπόν η αντίστροφη της a^x που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Είναι λοιπόν και η $\log_a x$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την παράγωγό της θα έχουμε:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{ca^y} = \frac{1}{cx}$$

(αν $x = a^y$). Το c είναι το $\lim_{h\to 0}(a^h - 1)/h$.

Οι ιδιότητες της a^x που δείξαμε συνεπάγονται άμεσα στις γνωστές ιδιότητες των λογαρίθμων:

(i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, διότι

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)}$$

(ii) $\log_a a = 1$,

(iii) $\log_a 1 = 0$,

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ αν $a > 1$,

(v) $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ αν $a > 1$ (τι γίνεται αν $a < 1$;),

(vi) $\log_a x^y = y \log_a x$, διότι $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$.

Ειδικά αν $a = e$ γράφουμε $\log x$ αντί $\log_e x$ (ή και $\ln x$) και ονομάζουμε αυτό το λογάριθμο φυσικό ή Νεπέρειο (αν $a = 10$ ονομάζεται δεκαδικός ή λογάριθμος του Briggs).

Υπάρχει μια πολύ απλή σχέση μεταξύ λογαρίθμων ως προς διάφορες βάσεις. Αν για παράδειγμα $a > 0, b > 0$ τότε: $a = b^{\log_b a}$ και επομένως αν $\log_a x = y$ $(x > 0)$, τότε $a^y = x$, δηλαδή $b^{y \log_b a} = x$, οπότε $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$.

Από τη σχέση $a^x = e^{x \log a}$ μπορούμε εύκολα να βρούμε μια άλλη μορφή της σταθεράς c, που εμφανίζεται στην παράγωγο της a^x. Πραγματικά, βρήκαμε $(a^x)' = ca^x$. Από την άλλη μεριά $(a^x)' = (e^{x \log a})' = \log_a (e^{x \log a}) = (\log a) a^x$ δηλαδή $c = \log a$.

Μπορούμε λοιπόν τώρα να γράψουμε (για $a > 0$) $(a^x)' = (\log a)a^x$, $(e^x)' = e^x$ για $-\infty < x < +\infty$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad (\log x)' = \frac{1}{x},$$

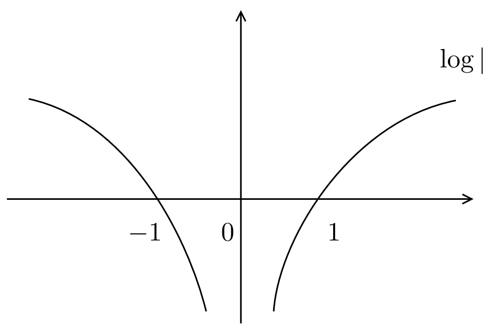
για $x > 0$.

Χρήσιμο είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι $(\log |x|)' = 1/x$ για όλα τα $x \neq 0$.

Για $x > 0$ το έχουμε ήδη δείξει. Αν $x > 0$ τότε

$$(\log |x|)' = (\log(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Η γραφική παράσταση της $\log |x|$ φαίνεται στο σχήμα 4.14.



Σχήμα 4.14

Η συνάρτηση x^b, $x > 0$, $b \in \mathbb{R}$

Έχουμε ήδη ορίσει το σύμβολο x^b και μπορούμε να ανάγουμε τη μελέτη της συνάρτησης αυτής στη μελέτη της $\log x$ παρατηρώντας ότι:

$$x^b = e^{b \log x}$$

δηλαδή η x^b είναι σύνθεση των γνωστών πλέον συναρτήσεων e^x και $b \log x$. Έχουμε για παράδειγμα ότι για $b > 0$ η x^b είναι αύξουσα, τείνει στο $+\infty$ για $x \to +\infty$ και στο μηδέν για $x \to 0^+$. Αν $b < 0$ τότε η x^b είναι φθίνουσα και τείνει στο 0 όταν $x \to +\infty$, και στο $+\infty$ όταν $x \to 0^+$.

Η παράγωγος της x^b είναι αυτή ακριβώς που περιμένουμε, δηλαδή bx^{b-1}. Πραγματικά,

$$(x^b)' = (e^{b \log x})' = b\frac{1}{x}(e^{b \log x}) = b\frac{1}{x}x^b = bx^{b-1}$$

δηλαδή για οποιοδήποτε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^b)' = bx^{b-1}$ για $x > 0$.

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

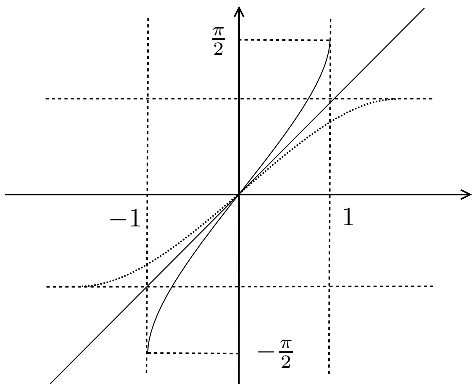
Τόσο οι τριγωνομετρικές όσο και οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι γνήσια μονότονες σε κάποια διαστήματα και επομένως έχουν αντίστροφες σ' αυτά.

(i) $\sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Στο διάστημα αυτό η $\sin x$ είναι γνήσια αύξουσα, έχει επομένως αντίστροφο, την οποία θα συμβολίζουμε με $\operatorname{Arcsin} x$ ή (τοξημ x). Η $\operatorname{Arcsin} x$ ορίζεται στο διάστημα

$$[-1,1] = \left[\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Η γραφική παράσταση της $\operatorname{Arcsin} x$, όπως έχουμε αναφέρει, προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\sin x$ με κατοπτρισμό ως προς τη διχοτόμο $y = x$.



Σχήμα 4.15

Αν $x_0 \in (-1,1)$ και $x_0 = \sin y_0$, για $-\pi/2 < y_0 < \pi/2$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$(\operatorname{Arcsin} x)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\sin y)'_{y=y_0}} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

διότι $\cos y_0 > 0$ για $y_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Στο σημείο 1 η παράγωγος από αριστερά της $\operatorname{Arcsin} x$, όπως αναμένεται και γεωμετρικά, είναι $+\infty$. Στην ανάπτυξη της θεωρίας για μονότονες συναρτήσεις δεν εξετάσαμε την περίπτωση πλευρικών παραγώγων. Τόσο οι διατυπώσεις όσο και οι αποδείξεις είναι προφανείς παραλλαγές της περίπτωσης εσωτερικού σημείου.

Ας δείξουμε λοιπόν απ' ευθείας ότι $(\operatorname{Arcsin} x)'_{x=1^-} = +\infty$.

Έστω $M > 0$. Επειδή $(\sin x)'_{x=x_0} = \cos x_0 = 0$, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} < \frac{1}{M},$$

δηλαδή

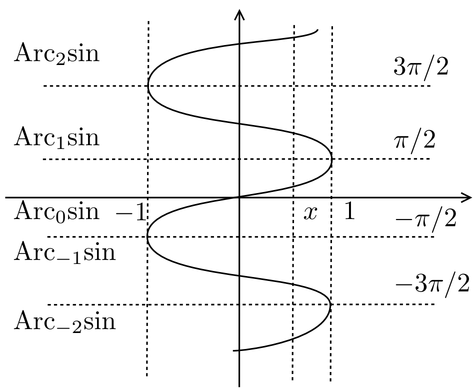
$$\cos\delta < \sin x < 1 \Rightarrow \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - 1} > M.$$

Γράφοντας $\sin x = y$, έχουμε λοιπόν:

$$\cos\delta < y < 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{Arcsin} y - \frac{\pi}{2}}{y - 1} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $D^- \operatorname{Arcsin} x|_{x=\pi/2} = +\infty$. Όμοια δείχνεται ότι η παράγωγος από δεξιά στο $x = -1$ είναι πάλι $+\infty$.

Παρατήρηση 4.4.17 Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι γιατί περιορίσαμε την συνάρτηση $\sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ και όχι σε άλλα διαστήματα, για παράδειγμα, $[\pi/2, 3\pi/2]$, όπου πάλι η $\sin x$ είναι μονότονη. Δεν υπάρχει κατ' αρχήν κανείς λόγος γι' αυτό. Σε κάθε διάστημα της μορφής $[k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$, για $k \in \mathbb{Z}$, η $\sin x$ είναι γνήσια μονότονη (αύξουσα για k ζυγό και φθίνουσα για k μονό) και επομένως θα έχει και αντίστροφη $\mathrm{Arc}_k\mathrm{sin}$, γνήσια μονότονη, συνεχή στο $(-1, 1)$ με τιμές στο $[k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$ και με παράγωγο: $(\mathrm{Arc}_k \sin x)' = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, για $x \in (-1, 1)$. Ο παράγοντας $(-1)^k$ δικαιολογείται από την εξής παρατήρηση:



Σχήμα 4.16

$$\mathrm{Arc}_{2k}\mathrm{sin}x = 2k\pi + \mathrm{Arc}_0\mathrm{sin}x = 2k\pi + \arcsin x$$

και

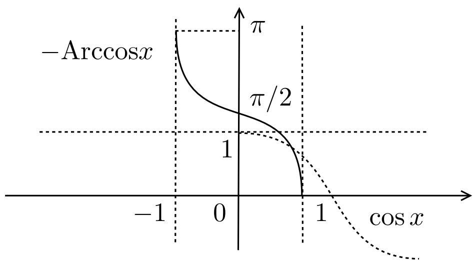
$$\mathrm{Arc}_{2k+1}\mathrm{sin}x = 2(k+1)\pi - \mathrm{Arc}_0\mathrm{sin}x = (2k+1)\pi - \arcsin x.$$

Χρησιμοποιούμε μερικές φορές το σύμβολο $\arcsin x$ για να παραστήσουμε με την «πλειότιμη συνάρτηση» που σε κάθε x αντιστοιχεί τις άπειρες τιμές $\mathrm{Arc}_k\mathrm{sin}\, x$, για $k \in \mathbb{Z}$. Ο ακριβής ορισμός και η μελέτη των πλειότιμων συναρτήσεων δεν θα μας απασχολήσει εδώ. Ο κλάδος των Μαθηματικών στον οποίο φυσιολογικά ανήκει αυτή η μελέτη, είναι η θεωρεία των μιγαδικών συναρτήσεων. Αναφέρουμε μονάχα ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{Arc}_k\mathrm{sin}\, x$ που ορίσαμε λέγονται κλάδοι της πλειότιμης συνάρτησης $\arcsin x$ και η $\operatorname{Arcsin} x$ πρωτεύων κλάδος.

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για τις αντίστροφες των $\cos x$, $\tan x$, αλλά θα τις παραλείψουμε.

(ii) $\cos x$, $0 \le x \le \pi$. Στο διάστημα αυτό η $\cos x$ είναι γνήσια φθίνουσα έχει επομένως αντίστροφο την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Arccos}\, x$. Αν $0 \le x \le \pi$ τότε $-\pi/2 \le \pi/2 - x \le \pi/2$ και $y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = \sin(\pi/2 - x)$. Συνάγουμε ότι $\mathrm{Arccos}\, x = \pi/2 - \mathrm{Arcsin}\, x$ και επομένως

$$(\mathrm{Arccos}\, x)' = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{όταν } -1 < x < 1 \\ -\infty & \text{όταν } x = -1 \text{ ή } 1 \text{ (πλευρική παράγωγος).} \end{cases}$$

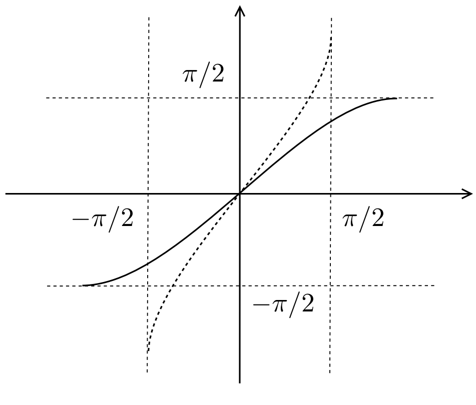


Σχήμα 4.17

(iii) $\tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Η Arctan ορίζεται στο $-\infty < x < \infty$, είναι αύξουσα και έχει παράγωγο:

$$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}\right)^{-1} = (1 + \tan^2 y)^{-1}$$

όπου $x = \tan y$ δηλαδή $(\mathrm{Arctan}\, x)' = 1/(1 + x^2)$ για $-\infty < x < \infty$.



Σχήμα 4.18

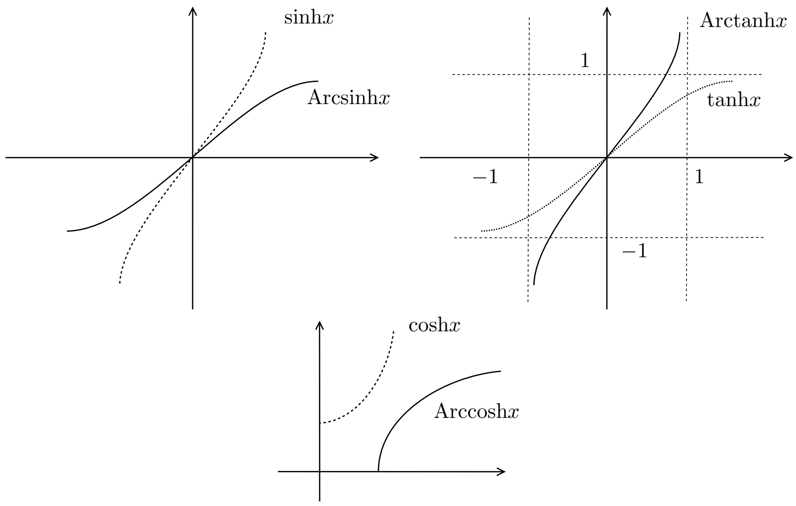
Για τις αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων δεν χρειαζόμαστε νέα σύμβολα— μπορούμε να τις εκφράζουμε με τη βοήθεια της συνάρτησης log. (Το ίδιο ισχύει και για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, με κατάλληλη επέκταση της συνάρτησης $\log x$, για μιγαδικά x, όπως μας διδάσκει η θεωρία αριθμών των μιγαδικών συναρτήσεων).

(iv) $\cosh x$, $x \geq 0$. Στο διάστημα αυτό η $\cosh x$ είναι γνήσια αύξουσα, $\cosh 0 = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, και επομένως υπάρχει η αντίστροφη της g στο διάστημα $[0, \infty)$. Αν $x \geq 0$ και $\cosh y = x$ τότε $(e^y + e^{-y})/2 = x$, δηλαδή $(e^y)^2 - 2x(e^y) + 1 = 0$, απ' όπου έπεται ότι $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ δηλαδή $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (γιατί αποκλείσαμε τη ρίζα $x - \sqrt{x^2 - 1}$;).

Βρήκαμε λοιπόν ότι η αντίστροφη της $\cosh x$, $x \geq 0$, είναι η $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Χρησιμοποιείται πάντως στη βιβλιογραφία, κατ' αναλογίαν προς την Arccos το σύμβολο Arccosh. Γράφουμε δηλαδή $\mathrm{Arccosh}\, x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ για $x \geq 1$.

(v) $\sinh x$ για $-\infty < x < \infty$. Με τον ίδιο τρόπο ακριβώς βρίσκουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση, που συμβολίζουμε Arcsinh, είναι η $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(vi) $\tanh x$ για $-\infty < x < \infty$. Παρόμοια πάλι, η αντίστροφη συμβολίζεται με $\mathrm{Arctanh}\, x$ και είναι η $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$.



Σχήμα 4.19

Είτε με το θεώρημα παραγώγισης αντιστρόφου συνάρτησης και απλές ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων είτε απ' ευθείας βρίσκουμε εύκολα τις παραγώγους των αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων:

$$(\mathrm{Arccosh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1,$$

$$(\mathrm{Arcsinh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(\operatorname{Arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < x.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων φαίνονται στο σχήμα 4.19.

4.4ε' Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις

Ας ανασκοπήσουμε τις συναρτήσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα. Είναι τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τους, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές τους, οι δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη, οι εκθετικές και οι αντιστροφές τους λογαριθμικές. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται *βασικές στοιχειώδεις συναρτήσεις* και συναρτήσεις που κατασκευάζονται από αυτές με τις στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (δεν θα δώσουμε ακριβή ορισμό) λέγονται στοιχειώδεις. Στον επόμενο πίνακα συνοψίζουμε τους τύπους που έχουμε βρει για τις παραγώγους των βασικών στοιχειωδών συναρτήσεων. Σε μερικές περιπτώσεις οι συναρτήσεις ορίζονται και στα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού. Για παράδειγμα η x^a, αν $a > 0$ μπορεί να οριστεί και για $x = 0$ ($0^a = 0$) και μάλιστα αν $a \geq 0$, τότε υπάρχει η παράγωγος της από δεξιά στο 0 και ισούται με 0, αν $a > 1$ και με 1 αν $a = 1$ (αν $0 < a < 1$ η παράγωγος από δεξιά στο 0 είναι $+\infty$. Θα αφήσουμε στον αναγνώστη την διερεύνηση αυτών των περιπτώσεων.

Συνάρτηση $f(x)$	Πεδίο ορισμού	Παράγωγος
c (σταθερά)	$-\infty < x < \infty$	0
$x^n,\ n = 1, 2, \ldots$	$-\infty < x < \infty$	nx^{n-1}
$x^n,\ n = -1, -2, \ldots$	.ξ. 0	nx^{n-1}
$x^a,\ a \in \mathbb{R},$	$x > 0$	ax^{a-1}
$a^x,\ a > 0,$	$-\infty < x < \infty$	$(\log a)a^x$
$e^x,$	$-\infty < x < \infty$	e^x
$\log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$x > 0$	
$\log \lvert x \rvert$	$x \neq 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\infty < x < \infty$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\infty < x < \infty,$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$	
$\sinh(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\operatorname{Arcsin}(x)$	$-1 < x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos}(x)$	$-1 < x < 1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan}(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Arcsinh}(x)$	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{Arccosh}(x)$	$x > 1$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arctanh}(x)$	$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x^2}$

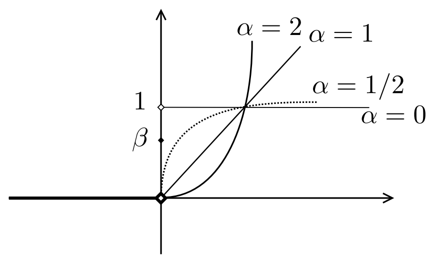
Η παραγώγιση των στοιχειωδών συναρτήσεων είναι τώρα δουλειά ρουτίνας. Στον επόμενο πίνακα δίνουμε μερικά παραδείγματα, τα οποία θα μας χρειαστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Συνάρτηση	Πεδίο Ορισμού	Παράγωγος
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$ax^2+bx+c>0$	$\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
$\mathrm{Arcsinh}(1/x)$	$x>1$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\log\|\tan(\frac{x}{2})\|$	$x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\sin x}$
$\|x\|^a$	$x\neq 0$	$ax\|x\|^{a-2}$
$\mathrm{Arcsin}(\frac{x}{a})$	$\|x\|<a$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{a^2}{2}\left(\mathrm{Arcsin}(\frac{x}{a})+\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)$	$\|x\|<a$	$\sqrt{a^2-x^2}$

Πολύ συχνά συναντάμε επίσης συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού ένα διάστημα εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων του και συμπίπτουν με μια στοιχειώδη συνάρτηση σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα στα οποία τα σημεία αυτά χωρίζουν το αρχικό διάστημα. Η συνάρτηση $\log|x|$ για παράδειγμα είναι τέτοιας μορφής. Στα άκρα των υποδιαστημάτων η συμπεριφορά της συνάρτησης (αν είναι συνεχής, αν έχει παράγωγο, αν είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά) ποικίλει.

Αντί να περιγράψουμε εξαντλητικά αυτές τις περιπτώσεις, το οποίο είναι απλά θέμα ρουτίνας, θα δώσουμε ένα τυπικό παράδειγμα:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^a & x>0\\ b & x=0\end{cases}\quad a\geq 0, b\in\mathbb{R}.$$



Σχήμα 4.20

Παρατηρώντας ότι $\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$ συμπεραίνουμε ότι αν $b\neq 0$ η συνάρτηση μας δεν είναι συνεχής από αριστερά άρα ούτε καν συνεχής.

Αν $a\neq 0$ τότε $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$ και επομένως πάλι στην περίπτωση $b=0$, η συνάρτηση είναι συνεχής και από δεξιά άρα συνεχής στο 0.

Αν $a=0$, τότε $\lim_{x\to 0^+}x^0=1$ και επομένως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Για $b=1$ είναι συνεχής από δεξιά.

Ας εξετάσουμε τώρα την ύπαρξη παραγώγων από δεξιά και αριστερά στο 0. Αν $b\neq 0$ τότε $D^-f(0)=+\infty$ για $b>0$ και $D^-f(0)=-\infty$ για $b<0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-b}{x}\to+\infty, x\to 0^-,$$

αν $b>0$ και $-\frac{b}{x}\to-\infty$, $x\to 0^-$ αν $b<0$.

Αν $b=0$ τότε $D^-f(0)=1$ (τετριμμένο). Αν $b=0$ και $a\neq 0$, τότε

$$D^+f(0)=ax^{a-1}\mid_{x=0}=0 \text{ για } a>1$$

και

$$D^+f(0)=+\infty \text{ για } a<1,$$

αφού
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^a}{x}=x^{a-1}\to+\infty, x\to 0^+,\ \text{για}\ a<1.$$
Βλέπουμε λοιπόν ότι για $b=0$ και $a>1$, η $f(x)$ είναι όχι μόνο συνεχής αλλά και παραγωγίσιμη στο 0. Γεωμετρικά έπρεπε να το περιμένουμε αυτό, γιατί μόνο για $a>1$ το γράφημα της $f(x)$, $x>0$, εφάπτεται του άξονα των x.

Όσο μεγαλύτερος γίνεται ο εκθέτης a τόσο «καλύτερη» γίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης στο 0. («κολλάνε» καλύτερα τα δύο κομμάτια της f.) Αν για παράδειγμα $a>2$ τότε φυσικά $a>1$ και έτσι έχουμε πρώτη παράγωγο f':
$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0\\ ax^{a-1} & x>0\end{cases}$$
δηλαδή
$$f'(x)=ag(x),\ \text{όπου}\ g(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0\\ x^{a-1} & x>0\end{cases}.$$
Επειδή $a>2$, $a-1>1$, άρα και η g έχει παράγωγο (και στο 0) και έτσι και η f έχει δεύτερη παράγωγο.

Η κατανόηση της απλής αυτής τεχνικής μας επιτρέπει να ορίζουμε συναρτήσεις που ικανοποιούν ορισμένες προδιαγεγραμμένες συνθήκες. Ιδού ένα παράδειγμα ενός τύπου προβλήματος που εμφανίζεται συχνά:

Πρόβλημα: Βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ $-\infty<x<\infty$, η οποία να είναι σταθερά ίση με 1 για $x<0$, να ισούται με ένα πολυώνυμο βαθμού 3 για $x>0$ και να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Με τον όρο δυο φορές παραγωγίσιμη εννοούμε ότι βέβαια ότι υπάρχει η (και είναι πεπερασμένη) η $f''(x)$ για όλα τα x.

Η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης f είναι εύκολη. Αν $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $x>0$, τότε θα πρέπει να ισχύουν οι ισότητες
$$f(0)=1,\ f'(0)=f''(0)=0\ (\text{γιατί;}\ )$$
δηλαδή
$$a_0=1, a_0=2a_2=0,$$
οπότε η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0\\ 1+x^3 & x\ge 0,\end{cases}$$
για παράδειγμα είναι μια λύση του προβλήματος (βρείτε όλες τις λύσεις του προβλήματος).

Οι συναρτήσεις που ανασκοπήσαμε σ' αυτή την παράγραφο είναι φυσικά από τις πιο συνηθισμένες. Πάντως πρέπει να τονίσουμε ότι πολύ συχνά, ακόμη και σε απλά προβλήματα, χρειαζόμαστε και άλλες συναρτήσεις. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του απλού εκκρεμούς, η μελέτη του οποίου οδηγεί στις λεγόμενες *ελλειπτικές συναρτήσεις*. Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι στοιχειώδεις (η απόδειξη δεν είναι εύκολη και δεν θα μας απασχολήσει). Θα επανέλθουμε στο παράδειγμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

Ασκήσεις.

1 Στην παράγραφο 4.2.1 ;; αφήσαμε αναπόδεικτο τον ισχυρισμό «Μεταξύ των συναρτήσεων $x(t)$ $-\infty < t < \infty$, οι οποίες έχουν β-παράγωγο μόνον η $\cos(kt)$ ικανοποιεί την εξίσωση $x''(t) + kx(t) = 0$ και τις συνθήκες $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$»

4.5 Ασκήσεις

1. Ο ισχυρισμός αυτός είναι συνέπεια ενός γενικού θεωρήματος των διαφορικών εξισώσεων αλλά μπορείτε να τον δείξετε και με τα μέσα που διαθέτετε τώρα.
   (α') Γράψτε $x(t) = \cos kt + y(t)$ και δείξτε και ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $y''(t) + k^2 y(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$, και τις συνθήκες $y(0) = y'(0) = 0$.
   (β') Δείξτε ότι η εξίσωση $x''(t)+k^2x(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $\big(x'(t)\big)^2 + k^2\big(x(t)\big)^2$ είναι σταθερά.
   (γ') Συνδυάστε τα (α') και (β') για να συμπληρώσετε την απόδειξη.
   (δ') Τι σας θυμίζει από την μηχανική το (β') ερώτημα;
2. (α') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\alpha} f'(x)$ τότε υπάρχει και η $D^+f(\alpha)$ και ισούται με το όριο αυτό.
   (β') Δείξτε ότι η υπόθεση ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha^+} f'(x)$ δεν μπορεί να παραληφθεί (δηλαδή βρείτε ένα παράδειγμα όπου η $D^+f(\alpha)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha^+} f'(x)$).
3. (α') Ποια είναι η γεωμετρική σημασία της σχέσης $f'(x_0) = +\infty$, x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f; Ίδια ερώτηση για το $-\infty$.
   (β') Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f(x)$, $\alpha < x < \beta$ ώστε $D^+f(x_0) = +\infty$, $D^-f(x_0) = -\infty$ για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
4. Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι πολυώνυμα, $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, $k \in \mathbb{N}$, και $g(a) \neq 0$ τότε το k λέγεται πολλαπλότητα της ρίζας a του $f(x)$. Δείξτε ότι μια ρίζα πολλαπλότητας $k > 1$ είναι μια ρίζα του $f^{(k-1)}(x)$.
5. Δείξτε ότι $(f \times g)^{(k)}(x) = \sum_{\lambda=0}^{k} f^{\lambda}(x) g^{k-\lambda}(x)$ όπου $f^{(0)}(x)$ σημαίνει $f(x)$ και οι συναρτήσεις f και g υποτίθεται παραγωγίσιμες τουλάχιστον k φορές.
6. Έστω $f(x)$, $\alpha < x < \infty$, μια συνάρτηση και A, $B \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = Ax + B$ λέγεται ασύμπτωτος, για $x \to \infty$ του γραφήματος της f αν $\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (Ax + B)\} = 0$.

(α') Βρείτε την ασύμπτωτη του γραφήματος μιας αν υπάρχει της $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ x > 0$.

(β') Ορίστε κατά αναλογίαν ασύμπτωτες για $x \to -\infty$ και δώστε παράδειγμα.

(γ') Πότε η ευθεία $x = A$ θα λέγεται ασύμπτωτη του γραφήματος μιας f; Προτείνετε έναν ορισμό που να συνεπάγεται ότι η $x = 0$ είναι ασύμπτωτη της $f(x) = 1/x$ και βρείτε τις ασύμπτωτες της $\tan x$.

(δ') Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$e^{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R}, \quad (\log x)^{(\log x)^2},\ x > 0, \quad x^x,\ x > 0, \quad x^{(x^x)},\ x > 0.$$

(ε') Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $x = 0$ και ότι η $g'(0)$ δεν υπάρχει.

i. Είναι σωστή ή όχι η πρόταση: «Η $f + g$ είναι ασυνεχής στο $x = 0$»; Αν είναι σωστή δώστε απόδειξη, αν όχι δώστε αντιπαράδειγμα.

ii. Με τις ίδιες προϋποθέσεις, ίδια ερώτηση για την πρόταση: «Η $(fg)'$ δεν υπάρχει στο $x = 0$».

(στ') Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$ και $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1) - f(x-1)\} = 0$.

(ζ') Βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής $y = x^2 + 1$ που περνάνε από την αρχή $(0, 0)$. Πού τέμνει τον άξονα των x η εφαπτομένη της ίδιας καμπύλης στο σημείο $(1, 2)$;

(η') Έστω ότι τα $(x_n, 0)$, $(0, y_n)$ είναι τα σημεία τομής των εφαπτομένων της $y = x^3$ στα σημεία (n, n^3), $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε τα όρια $\lim x_n$, $\lim y_n$.

(θ') Δείξτε τους τύπους των πινάκων (σελίδα 85).

(ι') Βρείτε το μεγαλύτερο διάστημα της μορφής $(-a, a)$ με την ιδιότητα: «Η συνάρτηση $f(x) = (\sin x)(\cos x)$ έχει αντίστροφη στο $(-a, a)$». Βρείτε την αντίστροφη της f και την παράγωγό της.

(ια') Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ έχουν παραγώγους τουλάχιστον n τάξης σε ένα διάστημα (α, β). Γράφουμε

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

(όπου $g^{(\lambda)(x)}$ σημαίνει την λ τάξης παράγωγο της g). Δείξτε ότι

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \\ f_1^{(n)}(x) & \ldots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Παρατήρηση: Η ορίζουσα $W(x)$ λέγεται ορίζουσα του Wronski και έχει εφαρμογές στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

(ιβ') Δώστε παραδείγματα (με συγκεκριμένο τύπο—όχι απλά με γραφικές παραστάσεις) στοιχειωδών συναρτήσεων (πολυώνυμα, τριγωνομετρικές, εκθετικές, ...) f, g, h, q ώστε

i. $f(-1) = 0,\ f(2) = 1,\ f'(1) > 0.$

ii. $g(-1) = 0,\ g(2) = 1,\ g'(1) < 0.$

iii. $h(k) = 0,\ k \in \mathbb{Z},\ |h(x)| < 1/2,\ x \in \mathbb{R},\ h(1/2) \neq 0.$

iv. $q(0) = 0,\ q(3) = 1,\ q'(1) = 0$ και η q είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, 3]$.

(ιγ') i. Βρείτε, όπου υπάρχουν, τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad \operatorname{arccot}\frac{1+x}{1-x}, \qquad \log\left\{\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right\}.$$

ii. Βρείτε τις β' παραγώγους των συναρτήσεων:

$$e^{x^2}\log x, \qquad e^{2x}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$$

(ιδ') Δείξτε τους τύπους:

i. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$

ii. $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x,$

iii. $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x},$

iv. $\left(-\frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sinh(4x)\right)' = (\sinh x \cosh x)^2.$

(ιε') Αν $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, τότε η $f'(x)$ έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(ιστ') Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = 1 + x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Ποια;

(ιζ') Δείξτε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος 4.4.8 (σελίδα 66).

(ιη') Δίνεται η

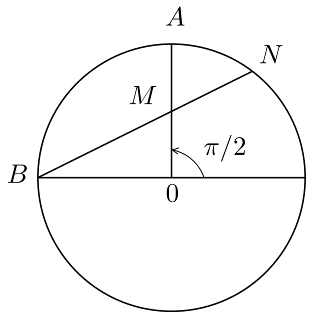
$$\beta_n = 1 + \frac{1}{(2!)^2} + \cdots + \frac{1}{(n!)^2}.$$

Δείξτε ότι η β_n συγκλίνει σε έναν άρρητο αριθμό.

(ιθ') i. Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει άπειρες ρίζες και μάλιστα ακριβώς μία σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ για $k \in \mathbb{Z}$.

ii. Γράφουμε a_k για τη ρίζα στο διάστημα I_k, $k = 1, 2, \ldots$. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim(a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματός σας.

(κ') Ένα κινητό M κινείται ισοταχώς από το A προς το O με ταχύτητα 1 m/sec. Η ακτίνα OA του κύκλου είναι 1 m. Στη θέση B βρίσκεται μια φωτεινή πηγή και ζητείται η ταχύτητα της σκιάς N του σημείου M πάνω στην περιφέρεια (δες σχήμα 4.21).



Σχήμα 4.21

(κα') Δείξτε το παρακάτω χρήσιμο θεώρημα: «Αν η f είναι συνεχής και μονότονη σε ένα διάστημα I, τότε η εικόνα μέσω της f οποιουδήποτε διαστήματος $j \subset I$ είναι επίσης ένα διάστημα».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το Ολοκληρωμα Riemann

Ο απειροστικός λογισμός λέγεται συχνά «διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός». Ο όρος διαφόριση, για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, είναι ταυτόσημος με τον όρο παραγωγίσιμη (βλέπε παράγραφο 4.2). Η «ολοκλήρωση», ένα μέρος που της οποίας θα μελετήσουμε στη συνέχεια, δικαιολογεί τον όρο ολοκληρωτικός λογισμός. Οι αρχές της «ολοκλήρωσης» ανάγονται στη μέθοδο της «εξάντλησης» που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι για την εύρεση όγκων και εμβαδών. Στο έργο για παράδειγμα του Αρχιμήδη «τετραγωνισμός της παραβολής», που αναφέραμε και προηγούμενα, αναπτύσσονται με θαυμαστή ακρίβεια οι βασικές έννοιες της ολοκλήρωσης.

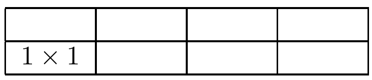
Στους μαθηματικούς της αναγέννησης, ειδικότερα στο Newton, οφείλουμε την σύνδεση μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης. Το όνομα του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Riemann (μέσα δέκατου ενάτου αιώνα) υπάρχει στον τίτλο, γιατί υπάρχουν διάφορες θεωρίες ολοκλήρωσης, και αυτή που θα μας απασχολήσει οφείλετε βασικά σε αυτόν.

5.1 Το πρόβλημα του εμβαδού

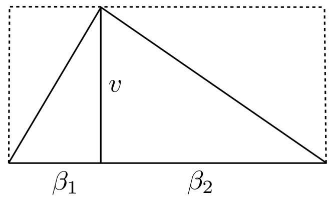
5.1α' Η μέθοδος της εξάντλησης

Ως εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος A θεωρούμε τον αριθμό που προκύπτει όταν συγκρίνουμε το A με ένα τετράγωνο πλευράς 1. Κατ' αρχάς δηλαδή αποδίδουμε εμβαδόν 1 σε αυτό το τετράγωνο (είτε περιέχει είτε όχι τις πλευρές του) και αποδεχόμαστε ότι η ένωση δύο ή περισσοτέρων απλών σχημάτων (ορθογώνια, τρίγωνα, πολύγωνα,...) «με ξένα εσωτερικά» είναι το άθροισμα των εμβαδών των αντιστοίχων σχημάτων. Έτσι οδηγούμαστε εύκολα στον τύπο για το εμβαδόν ορθογωνίων με ρητές πλευρές.

Η περίπτωση τυχαίου ορθογωνίου ανάγεται σ' αυτήν, αν προσεγγίσουμε τις πλευρές με ρητούς, για παράδειγμα με μια πεπερασμένη δεκαδική παράσταση τους. Με ένα απλό τέχνασμα βρίσκουμε επίσης τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου (βλέπε σχήμα 5.1).



$E = 4 \cdot 2 = 8$



$\beta_1 + \beta_2 = \beta,$

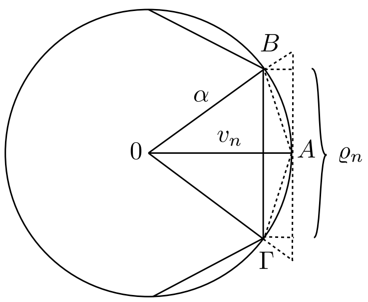
$E = \frac{1}{2}(\beta_1 v_1) + \frac{1}{2}(\beta_2 v_2) = \frac{1}{2}\beta v.$

Σχήμα 5.1

Η περίπτωση του κύκλου είναι τυπική της μεθόδου της εξάντλησης. Ας είναι α η ακτίνα του κύκλου, v_n το ύψος και ϱ_n η πλευρά κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές εγγεγραμμένου στον κύκλο. Ό-πως φαίνεται εύκολα από το σχήμα, αν E είναι το εμβαδόν του κύκλου τότε:

$$2^n \frac{1}{2} v_n \varrho_n < E < 2^n \left(\frac{1}{2} v_n \varrho_n + (\alpha - v_n)\varrho_n \right).$$

Η ακολουθία $\frac{1}{2} 2^n v_n \varrho_n$ είναι προφανώς αύξουσα (το πολύγωνο με $2n+1$ πλευρές θα περιέχει επί πλέον 2^n τρίγωνα της μορφής ΑΒΓΔ) φράσσεται από το E.



Σχήμα 5.2

Από την άλλη μεριά

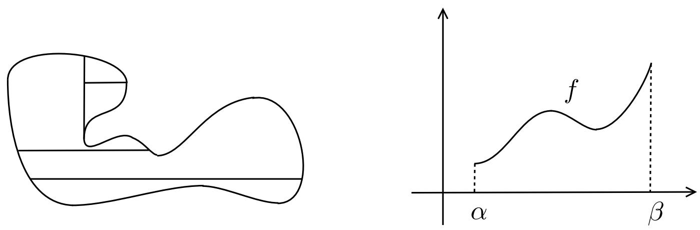
$$0 < E - \frac{1}{2} 2^n v_n \varrho_n < 2^n(\alpha - v_n)\varrho_n = (\alpha - v_n)\, s_n < (\alpha - v_n)\, s$$

όπου s_n περίμετρος του πολυγώνου και s περιφέρεια του κύκλου. Προφανώς όμως $(\alpha - v_n) \to 0$, οπότε

$$\frac{1}{2} v_n \left(2^n \varrho_n\right) = \frac{1}{2} v_n s_n \to E,$$

για $n \to \infty$. Παρατηρώντας τώρα ότι το v_n συγκλίνει στο α και το s_n στο s (αν θέλετε έτσι ορίζουμε το μήκος της περιφέρειας), φτάνουμε στο συμπέρασμα $E = \alpha s/2$.

Φυσικά θα ήταν μάταιο να επινοεί κανείς και από μια μέθοδο για κάθε σχήμα. Για τα συνηθισμένα γεωμετρικά σχήματα εύκολα βλέπει κανείς, ότι θα αρκούσε να έχει μια γενική μέθοδο για να βρίσκει εμβαδά «κάτω» από το γράφημα μιας θετικής φραγμένης συνάρτησης f. Το εμβαδόν του αριστερά



Σχήμα 5.3

σχήματος για παράδειγμα είναι άθροισμα πέντε εμβαδών σχημάτων τέτοιας μορφής. Με τον όρο «κάτω από το γράφημα μιας θετικής f» εννοούμε το σύνολο

$$\{(x,y) : \alpha \leq x \leq \beta \text{ και } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Το σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε γι' αυτό το εμβαδόν θα είναι $\int_\beta^\alpha f(t)\,dt$ και θα το ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Το σύμβολο αυτό θα το ορίσουμε με τρόπο που να έχει νόημα και για όχι αναγκαστικά θετικές συναρτήσεις. Δεν θα ορίζεται όμως για όλες τις συναρτήσεις. Εκείνες για τις οποίες ορίζεται θα λέγονται Riemann-ολοκληρώσιμες.

Πριν ξεκινήσουμε τη γενική θεωρία θα δώσουμε ακόμη ένα παράδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τη σημερινή γλώσσα των μαθηματικών, θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα που απασχόλησε τον Αρχιμήδη τον τρίτον αιώνα πριν την αρχή της χριστιανικής χρονολόγησης. Θα μακρυγορήσουμε λίγο σ' αυτό το παράδειγμα με σκοπό να προετοιμάσουμε καλύτερα το έδαφος για την γενική περίπτωση.

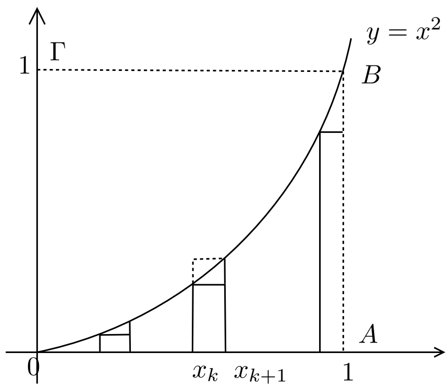
5.1β' Ο Τετραγωνισμός της παραβολής

Θεώρημα 5.1.1 (Αρχιμήδης) *Το εμβαδόν του χωρίου* ΟΑΒΓ *μεταξύ της παραβολής $f(x) = x^2$, του άξονα των x και της ευθείας $x = 1$ ισούται με το $1/3$ του εμβαδού του ορθογωνίου* ΟΑΒΓ.

Απόδειξη: Ας χωρίσουμε το διάστημα $[0,1]$ σε υποδιαστήματα $[x_0,x_1)$, $[x_1,x_2)$, $\ldots$, $[x_{n-1},x_n]$ παίρνοντας τα σημεία $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ώστε $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ σε κάθε διάστημα $[x_k,x_{k+1}]$ ισχύει $x_k^2 \leq x^2 \leq x_{k+1}^2$ για $x \in [x_k,x_{k+1}]$ και επομένως το αντίστοιχο κομμάτι του εμβαδού που ζητάμε θα είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $[x_k,x_{k+1}]$ και ύψος x_k^2 και μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με την ίδια βάση και ύψος x_{k+1}^2. Αν λοιπόν ονομάσουμε E το ζητούμενο εμβαδόν, θα έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k-1} - x_k)\,x_k^2 < \varepsilon < \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k-1} - x_k)\,x_{k+1}^2$$

Ας γράψουμε $\underline{\Sigma}_\Delta$ για το αριστερό άθροισμα και $\overline{\Sigma}_\Delta$ για το δεξιά. Το Δ αντιστοιχεί στη διαμέριση $x_0, x_1, \ldots, x_n$ του $[0,1]$ που θεωρήσαμε.



Σχήμα 5.4

Το σύνολο $\underline{\Sigma}_\Delta$ όπου Δ η «διαμέριση» του $[0,1]$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω, για παράδειγμα από το E, οπότε και από το $\overline{\Sigma}_{\Delta'}$ για οποιοδήποτε Δ'. Υπάρχει λοιπόν το supremum αυτού του συνόλου. Γράφουμε:

$$\underline{\int_0^1} x^2\,dx = \sup \underline{\Sigma}_\Delta,$$

όπου Δ διαμέριση του $[0,1]$ και ονομάζουμε το $\underline{\int_0^1} x^2\,dx$ «κάτω Darboux ολοκλήρωμα» της x^2 στο $[0,1]$. (Ο Darboux ήταν ο Γάλλος γεωμέτρης του δέκατου ένατου αιώνα).

Όμοια ορίζουμε το «πάνω Darboux ολοκλήρωμα»

$$\overline{\int_0^1} x^2\,dx = \inf\left\{\overline{\Sigma}_\Delta : \Delta \text{ διαμέριση του } [0,1]\right\}$$

θα έχουμε προφανώς:

$$\underline{\int_0^1} x^2\,dx \le E \le \overline{\int_0^1} x^2\,dx.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\underline{\int_0^1} x^2\,dx = \overline{\int_0^1} x^2\,dx$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\int_0^1 x^2\,dx$ για την κοινή αυτή θα τιμή και θα την ονομάζουμε το Riemann ολοκλήρωμα της x^2 στο $[0,1]$. Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι για οποιαδήποτε διαμέριση Δ,

$$\underline{\Sigma}(\Delta) \le \underline{\int_0^1} x^2\,dx \le \overline{\int_0^1} x^2\,dx \le \overline{\Sigma}(\Delta)$$

και επομένως

$$0 \le \overline{\int_0^1} x^2\,dx - \underline{\int_0^1} x^2\,dx \le \overline{\Sigma}_\Delta - \underline{\Sigma}_\Delta.$$

Αν λοιπόν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε Δ ώστε $\overline{\Sigma}_\Delta - \underline{\Sigma}_\Delta < \varepsilon$ θα έχουμε τελειώσει. Αυτό όμως είναι αρκετά εύκολο. Παίρνουμε

$$\Delta = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\right\},$$

$n \in \mathbb{N}$, και έχουμε

$$\underline{\Sigma}_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2,$$

$$\overline{\Sigma}(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} k^2,$$

και επομένως

$$\overline{\Sigma}_\Delta - \underline{\Sigma}_\Delta = \frac{1}{n^3} n^2 = \frac{1}{n}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $n > 1/\varepsilon$ για να έχουμε $\overline{\Sigma}_\Delta - \underline{\Sigma}_\Delta < \varepsilon$. □

Αν τώρα θυμηθούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(δώστε απόδειξη με επαγωγή)},$$

βλέπουμε ότι έχουμε δείξει

$$\frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{n^3} < E < \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

δηλαδή

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{n} < E < \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right).$$

Οι ακολουθίες αριστερά και δεξιά συγκλίνουν στο $1/3$ επομένως $1/3 \leq E \leq 1/3$, δηλαδή $E = 1/3$, που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

5.2 Ορισμός και βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος.

5.2α' Ο ορισμός του Darboux.

Έχοντας για οδηγό το προηγούμενο παράδειγμα, θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann, για φραγμένες συναρτήσεις σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ (δεν υποθέτουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις είναι ≥ 0.) Δίνουμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

Ένα πεπερασμένο σύνολο $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ τέτοιο ώστε

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

ονομάζεται διαμέριση του $[a, b]$. Πλάτος της διαμέρισης Δ ονομάζουμε τον αριθμό

$$d(\Delta) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Το σύνολο των διαμερίσεων του $[a, b]$ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}[a, b]$ η απλά $\mathcal{D}\rceil\updownarrow\sqcup\dashv$, αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Μια διαμέριση Δ' λέγεται εκλέπτυνση μιας διαμέρισης Δ, αν $\Delta' \supset \Delta$. Λέμε ακόμα ότι η Δ' είναι λεπτότερη από την Δ. Με άλλα λόγια περνάμε από μια διαμέριση Δ σε μια εκλέπτυνση της, αν της προσθέσουμε και άλλα διαιρετικά σημεία.

Ιδού μια απλή και χρήσιμη ιδιότητα των διαμερίσεων: Αν Δ, Δ' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε το σύνολο $\Delta \cup \Delta'$ είναι μια εκλέπτυνση και των δύο. Κάθε άλλη εκλέπτυνση και των δύο περιέχει την $\Delta \cup \Delta'$. Η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Έστω τώρα f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}[a,b]$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$ η f είναι φραγμένη και προς τα πάνω και προς τα κάτω. Ονομάζουμε m_k και M_k αντίστοιχα το inf και sup των τιμών της σ' αυτά τα διαστήματα, δηλαδή ορίζουμε

$$m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ορίζουμε τώρα για κάθε διαμέριση Δ το κάτω και το πάνω άθροισμα της f με τους τύπους:

$$\underline{\Sigma}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) m_k,$$

$$\overline{\Sigma}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) M_k.$$

Η ανισότητα $\underline{\Sigma}(f, \Delta) \geq \overline{\Sigma}(f, \Delta)$ είναι προφανής. Ισχύει και κάτι παραπάνω: Αν $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}$ τότε $\underline{\Sigma}(f, \Delta) \geq \overline{\Sigma}(f, \Delta')$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta' \supset \Delta$ συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f, \Delta) \leq \underline{\Sigma}(f, \Delta')$ και $\overline{\Sigma}(f, \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f, \Delta)$ διότι τότε θα έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f, \Delta) \leq \underline{\Sigma}(f, \Delta \cup \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f, \Delta \cup \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f, \Delta').$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τελευταία υπογραμμισμένη πρόταση. Η σχέση $\Delta' \supset \Delta$ σημαίνει ότι η Δ' έχει περισσότερα ή τα ίδια διαιρετικά σημεία με την Δ. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που η Δ' έχει ένα παραπάνω διαιρετικό σημείο. Έστω λοιπόν ότι $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ και $\Delta' = \{x_0, \ldots, x_k, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, δηλαδή η Δ' έχει παραπάνω το σημείο y_k με $x_k < y_k < x_{k+1}$. Αν γράψουμε

$$\begin{array}{rcl} m'_k & = & \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y_k\} \\ m''_k & = & \inf\{f(x) : y_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\ M'_k & = & \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq y_k\} \\ M''_k & = & \sup\{f(x) : y_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \end{array}$$

θα έχουμε:

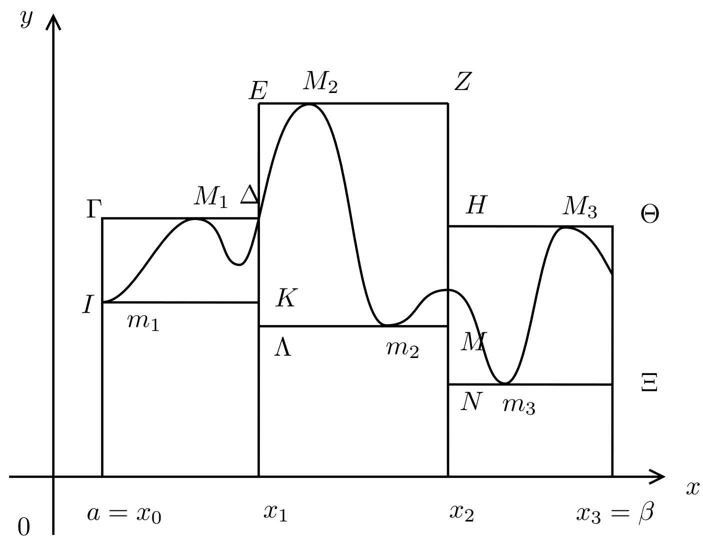
$$\underline{\Sigma}(f, \Delta') - \underline{\Sigma}(f, \Delta) = m'_k(y_k - x_k) + m''_k(x_{k+1} - y_k) - m_k(x_{k+1} - x_k)$$

$$= (m'_k - m_k)(y_k - x_k) + (m''_k - m_k)(x_{k+1} - y_k) \geq 0,$$

διότι προφανώς $m'_k \geq m_k$ και $m''_k > m_k$, δηλαδή $\underline{\Sigma}(f,\Delta') \geq \underline{\Sigma}(f,\Delta)$.

Εντελώς παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\overline{\Sigma}(f,\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$.

Η γεωμετρική σημασία των όσων είπαμε μέχρι τώρα είναι απλούστατη, αν σκεφτούμε και πάλι το πρόβλημα του εμβαδού κάτω από το γράφημα μιας $f \geq 0$. Το $\underline{\Sigma}(f,\Delta)$ παριστάνει το εμβαδόν μιας ένωσης ορθογωνίων που «προσεγγίζει από κάτω» το ζητούμενο εμβαδόν και το $\overline{\Sigma}(f,\Delta)$ δίνει αντίστοιχη «προσέγγιση» από πάνω (βλέπε σχήμα 50)



$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \text{εμβ}(\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘΒΑ})$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + (x_3 - x_2)m_3 = \text{εμβ}(\text{ΑΙΚΛΜΝΞΒΑ})$$

Σχήμα 5.5

Το σύνολο $\{\underline{\Sigma}(f,\Delta) : \Delta \in \mathfrak{D}\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω, διότι οποιοδήποτε $\overline{\Sigma}(f,\Delta)$ είναι ένα άνω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το supremum αυτού του συνόλου (αξίωμα συνέχειας). Θα το συμβολίζουμε με $\underline{\int}_a^b f$ ή $\underline{\int}_a^b f(x)dx$ και θα το καλούμε *κάτω Darboux ολοκλήρωμα της f στο* $[a,b]$.

Το σύνολο $\left\{\overline{\Sigma}(f,\Delta) : \Delta \in \mathfrak{D}\right\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα κάτω, διότι κάθε $\underline{\Sigma}(f,\Delta)$ για παράδειγμα είναι ένα κάτω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το infimum αυτού του συνόλου. Θα το συμβολίζουμε με $\overline{\int}_a^b f$ ή $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ και θα το καλούμε *άνω Darboux ολοκλήρωμα της f στο* $[a,b]$.

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης.

Ορισμός 5.2.1 (Darboux) *Μια φραγμένη συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, αν $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Η κοινή αυτή τιμή λέγεται Riemann ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^b f$ ή $\int_a^b f(x)dx$.*

Ο ορισμός που δώσαμε και η συζήτηση που προηγήθηκε δίνει σχεδόν άμεσα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την Riemann ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης f.

Θεώρημα 5.2.2 *Μια φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\Delta \in \mathfrak{D}([a,b])$ τέτοιο ώστε*

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, οπότε

$$\underline{f,\Delta'} + \frac{\varepsilon}{2} > \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f > \overline{\Sigma}(f.\Delta'') - \frac{\varepsilon}{2},$$

για κάποιες διαμερίσεις Δ', Δ'', (γιατί;). Αν τώρα $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι μια κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'', τότε η τελευταία ανισότητα και οι ανισότητες

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta'') > \overline{\Sigma}(f,\Delta), \ \ \underline{\Sigma}(f,\Delta') < \underline{\Sigma}(f,\Delta)$$

που δείξαμε προηγουμένως συνεπάγονται

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \frac{\varepsilon}{2},$$

δηλαδή

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\Delta \in \mathfrak{D}$ τέτοιο ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon$, τότε οι προφανείς ανισότητες

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$$

συνεπάγονται

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon$$

και επομένως

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

□

Πριν προχωρήσουμε, ας δώσουμε ένα παράδειγμα μιας φραγμένης συνάρτησης που δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Η συνάρτηση του Dirichlet περιορισμένη στο διάστημα $[0,1]$, δηλαδή η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ρητός στο } [0,1] \\ 0 & x \text{άρρητος στο } [0,1] \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Πραγματικά, για οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ του $[0,1]$ $M_k = 1$ και $m_k = 0$, διότι σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί. Συνάγουμε λοιπόν ότι:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \cdot 0 = 0$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \cdot 1 = 0$$

και επομένως $\underline{\int_0^1} f = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f$, δηλαδή η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

5.3 Ο ορισμός του Riemann

Ας γυρίσουμε για λίγο στο πρόβλημα του εμβαδού. Διαισθητικά τουλάχιστον μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας $f \geq 0$ ορισμένης στο $[a,b]$, χωρίς να ασχοληθούμε με τα $\overline{\Sigma}$ και$\underline{\Sigma}$. Απλά για κάθε διαμέριση $\Delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta\}$ παίρνουμε μια τυχαία επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ ώστε $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum(f,\Delta,\Xi) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) f(\xi_k).$$

Περιμένουμε τώρα ότι αν το πλάτος d της διαμέρισης (υπενθυμίζουμε τον ορισμό του $d = \max\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$) τείνει στο 0, τότε το $\sum(f,\Delta,\Xi)$ θα τείνει στο εμβαδόν που ζητάμε. Ένας «εύλογος» λοιπόν ορισμός για το $\int_\alpha^\beta f$ θα ήταν:

$$\int_\alpha^\beta f = \lim_{d\to 0} \sum(f,\Delta,\Xi).$$

Δυστυχώς ο ορισμός αυτός *δεν έχει νόημα* και πρέπει να καταλάβουμε καλά το γιατί. Ο λόγος είναι απλά ότι δεν έχουμε ορίσει έννοια ορίου της μορφής $\lim_{d\to 0} \sum(f,\Delta,\Xi)$. Με όσα έχουμε πει, μόνο αν το $\sum(f,\Delta,\Xi)$ ήταν μια συνάρτηση του d θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για το όριο. Αλλά το $\sum(f,\Delta,\Xi)$ κάθε άλλο παρά τέτοια συνάρτηση είναι· πραγματικά όπως έπεται από τον ορισμό του, εξαρτάται από τη διαμέριση Δ, δηλαδή μια $n-$άδα $x_0, x_1, \ldots, x_n$ πραγματικών αριθμών και από την επιλογή $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$, δηλαδή ακόμη μια $n-$άδα. Και για να πούμε όλη την αλήθεια η κατάσταση είναι ακόμη χειρότερη, γιατί τα $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ εξαρτώνται από τα $x_0, \ldots, x_n$, αφού πρέπει $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$. Οι μαθηματικοί έφτιαξαν θεωρία που καλύπτει αυτές τις περιπτώσεις (θεωρία δικτύων, ή σύγκλιση Moore-Smith), αλλά δεν χρειάζεται να φτάσουμε σ' αυτήν. Αρκεί να θυμηθούμε τον «εψιλοντικό» ορισμό του ορίου και, χρησιμοποιώντας τον σαν μοντέλο, να περιγράψουμε τι θα θέλαμε να είναι το «$\lim_{d\to 0} \sum(f, \Delta, \Xi)$». Το αποτέλεσμα είναι ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός 5.3.1 (Riemann) *Μια φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, λέγεται ολοκληρώσιμη σ' αυτό, αν υπάρχει ένας αριθμός I που θα τον γράφουμε $\int_\alpha^\beta f$ και θα τον ονομάζουμε ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha, \beta]$, ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα για κάθε διαμέριση:*

$$\Delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta\}$$

και κάθε επιλογή $\Xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$ με $k = 0, 1, \ldots, n-1$ να ισχύει: πλάτος$(\Delta) = d < \delta$ συνεπάγεται

$$\left| \sum(f, \Delta, \Xi) - \int_\alpha^\beta f \right| < \varepsilon.$$

Ο ορισμός του Riemann υπήρξε ο πρώτος ιστορικά ακριβής ορισμός του ολοκληρώματος. Θα βασίσουμε την ανάπτυξη της θεωρίας στον ορισμό του Darboux, που είναι εννοιολογικά απλούστερος, και θα αναβάλουμε για αργότερα την απόδειξη της *ισοδυναμίας των δύο ορισμών*.

5.4 Η ολοκληρωσιμότητα των μονότονων και συνεχών συναρτήσεων

Το κριτήριο που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα μας βοηθήσει να δείξουμε την ολοκληρωσιμότητα τόσο των μονότονων όσο και των συνεχών συναρτήσεων.

5.4α' Μονότονες συναρτήσεις

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Διαλέγουμε σαν Δ τη διαμέριση που αντιστοιχεί σε χωρισμό του $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα τμήματα δηλαδή,

$$\Delta = \left\{ \alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}, \ldots, \alpha + k\frac{\beta - \alpha}{n}, \ldots, \alpha + n\frac{\beta - \alpha}{n} = \beta \right\}.$$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta) &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k))\\ &= \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))\\ &= \frac{\beta-\alpha}{n}\big(f(\beta)-f(\alpha)\big).\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει n ώστε

$$\frac{\beta-\alpha}{n}\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)<\varepsilon.$$

Φυσικά αυτό είναι πάντοτε δυνατό· αρκεί να πάρουμε

$$n>\frac{(\beta-\alpha)\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)}{\varepsilon}.$$

5.4β' Συνεχείς συναρτήσεις

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\varepsilon>0$. Πρέπει να βρούμε $\Delta\in\mathcal{D}$ ώστε

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k)<\varepsilon.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, θα υπάρχουν ξ_k',ξ_k'' στο $[x_k,x_{k+1}]$ ώστε

$$M_k=f(\xi_k''),\ \text{ και } m_k=f(\xi_k').$$

Ας κάνουμε κατ' αρχάς την υπόθεση ότι η f είναι όχι μόνο συνεχής, αλλά ότι έχει και παράγωγο φραγμένη στο (α,β), δηλαδή ότι υπάρχει η $f'(x)$ για $x\in(\alpha,\beta)$ και $|f'(x)|\le M$ για $\alpha<x<\beta$ για κάποιο πραγματικό M.

Το θεώρημα της μέσης τιμής στην περίπτωση αυτή μας λέγει ότι

$$M_k-m_k=f(\xi_k'')-f(\xi_k')=(\xi_k''-\xi_k')f'(\xi_k'''),$$

όπου ξ_k''' κάποιος αριθμός μεταξύ των ξ_k' και ξ_k'', και επομένως

$$M_k-m_k\le|\xi_k''-\xi_k'|M\le|x_{k+1}-x_k|M\le d(\Delta)M,$$

όπου $d(\Delta)$ το πλάτος της Δ.

Αν λοιπόν πάρουμε μια Δ με $d(\Delta) < \varepsilon\big/\big((M+1)(\beta-\alpha)\big)$, τότε

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k) \\
&< \frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)(M+1)}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)M \\
&= \frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)(M+1)}M(\beta-\alpha) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αν καλοσκεφτούμε τον παραπάνω συλλογισμό, βλέπουμε ότι η παραγωγισιμότητα της f μας χρειάστηκε μόνο για να δείξουμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη λίγο ισχυρότερη από τη συνέχεια στο $[\alpha,\beta]$. Πιο συγκεκριμένα την εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα x_1, x_2 από το πεδίο ορισμού της f

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή στο πεδίο ορισμού της λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* σ' αυτό. Η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων είναι τώρα άμεση συνέπεια του παρακάτω σημαντικού θεωρήματος.

Θεώρημα 5.4.1 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x, y \in [\alpha,\beta]$ με $|x-y| < \delta$ έπεται $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού καθώς και ορισμένα σχόλια πάνω στην ομοιόμορφη συνέχεια. Παρατηρούμε πάντως, ότι η ειδική περίπτωση που αποδείξαμε είναι αρκετή για την παραπέρα ανάπτυξη της θεωρίας. Πραγματικά, ένα απλό πόρισμα της ειδικής αυτής περίπτωσης είναι ότι «*Οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές, οι λογαριθμικές, οι εκθετικές συναρτήσεις καθώς και συνδυασμοί με απλές πράξεις ή συνθέσεις αυτών είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού τους*».

Πραγματικά οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και οι παράγωγοί τους είναι συνεχείς. Σε ένα κλειστό λοιπόν διάστημα αυτές οι παράγωγοι είναι φραγμένες, επομένως εφαρμόζεται το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω.

5.5 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Όπως και στην περίπτωση των ορισμών της συνέχειας και της παραγώγου, έτσι και τώρα πρέπει να αποδείξουμε τουλάχιστον τις απλές ιδιότητες του ολοκληρώματος, αυτές που «αναμένεται» να έχει η καινούργια έννοια που ορίσαμε. Η απόδειξη είναι η *ανταμοιβή* για ένα πετυχημένο ορισμό, ή, αν θέλετε, το ανάλογο της πειραματικής επαλήθευσης μιας θεωρίας στη Φυσική. Για να είμαστε όμως ειλικρινείς, πρέπει να πούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις η δουλειά αυτή είναι *αγγαρεία* (συλλογισμοί ρουτίνας, περιπτωσιολογία, ...). Στις περιπτώσεις αυτές είναι «αναγκαίο κακό».

Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς των προηγουμένων παραγράφων για τα Δ, M_k, m_k, χωρίς να επαναλαμβάνουμε κάθε φορά τον ορισμό τους.

(i) Αν $f(x) = \mathrm{c} =$ σταθερά για $\alpha \le x \le \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f = \mathrm{c}(\beta - \alpha)$.

Πραγματικά, στην περίπτωση αυτή έχουμε $M_k = m_k = \mathrm{c}$ και επομένως

$$\underline{\Sigma}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\mathrm{c} = \mathrm{c}(\beta - \alpha)$$

$$\overline{\Sigma}(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\mathrm{c} = \mathrm{c}(\beta - \alpha)$$

οπότε και $\underline{\int}_\alpha^\beta f = \overline{\int}_\alpha^\beta f = \mathrm{c}(\beta - \alpha)$

(ii) Αν οι f και f είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$, τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta (f + g) = \int_\alpha^\beta f + \int_\alpha^\beta g$$

Χρησιμοποιούμε τα m_k, M_k για το inf και sup της $f + g$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, τα m'_k, M'_k για την f και τα m''_k, M''_k για την g αντίστοιχα. Για κάθε x στο $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε:

$$f(x) + g(x) \le M'_k + M''_k$$

δηλαδή το $M'_k + M''_k$ είναι προφανώς άνω φράγμα της $f + g$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, άρα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το supremum της $f + g$ στο ίδιο διάστημα. Συνάγουμε λοιπόν ότι: $M_k \le M'_k + M''_k$ και ομοίως $m_k \ge m'_k + m''_k$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες με τον θετικό αριθμό $(x_{k+1} - x_k)$ και προσθέτοντας για $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma}(f, \Delta) + \underline{\Sigma}(g, \Delta) &= \sum (m'_k + m''_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&\le \sum m_k (x_{k+1} - x_k) \\
&= \underline{\Sigma}(f + g, \Delta) \le \overline{\Sigma}(f + g, \Delta) \\
&= \sum M_k (x_{k+1} - x_k) \\
&\le \sum (M'_k + M''_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \overline{\Sigma}(f, \Delta) + \overline{\Sigma}(g, \Delta).
\end{aligned}$$

δηλαδή
$$\begin{aligned}(\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta)) &\le \underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \le \\ &\le \overline{\Sigma}(f+g,\Delta) \le \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta)\right).\end{aligned}$$
Από τις τελευταίες ανισότητες προκύπτει άμεσα ότι
$$0 \le \overline{\Sigma}(f+g,\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \le \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)\right)+\left(\overline{\Sigma}(g,\Delta)-\underline{\Sigma}(g,\Delta)\right).$$
Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας που ξέρουμε συνάγουμε ότι υπάρχουν Δ_1, Δ_2 τέτοια ώστε
$$0 \le \overline{\Sigma}(f,\Delta_1)-\underline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$
και
$$0 \le \overline{\Sigma}(g,\Delta_2)-\underline{\Sigma}(g,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Αν $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ η κοινή εκλέπτυνση των Δ_1, Δ_2, τότε οι ανισότητες αυτές θα εξακολουθούν να ισχύουν αν θέσουμε Δ στην θέση των Δ_1, Δ_2 (γιατί;).

Προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν βρίσκουμε:
$$0 \le \overline{\Sigma}(f+g,\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g,\Delta) < \varepsilon$$
που σύμφωνα πάλι με το κριτήριο μας δείχνει ότι η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Μένει να δείξουμε ότι
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$
Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξαμε πριν λίγες γραμμές την ανισότητα
$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta) &\le \underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \le \\ &\le \int_a^b (f+g) \le \overline{\Sigma}(f+g,\Delta) \le \overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta)\end{aligned}$$
για οποιαδήποτε $\Delta \in \cdot([a,b])$. Επειδή $\int_a^b f = \inf \overline{\Sigma}(f,\Delta)$ θα υπάρχει Δ_1 τέτοιο ώστε
$$\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \text{ γιατί;}$$
και παρόμοια θα υπάρχει Δ_2 τέτοιο ώστε
$$\overline{\Sigma}(g,\Delta_2) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Οι ανισότητες αυτές θα ισχύουν και για την κοινή εκλέπτυνση Δ των Δ_1, Δ_2 οπότε θα έχουμε
$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta) < \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta)<\int_a^b f+\int_a^b g-\varepsilon$$

(μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ίδια διαμέριση Δ εμφανίζεται και στις δύο ανισότητες γιατί;)

Συνδυάζοντας όσα είπαμε παραπάνω συνάγουμε:

$$\int_a^b f+\int_a^b g-\varepsilon<\int_a^b (f+g)<\int_a^b f+\int_a^b g+\varepsilon,$$

άρα, επειδή το ε είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

Παρατήρηση: Η απόδειξη αυτή θα ήταν συντομότερη αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό του Riemann, γιατί αντί για ανισότητες θα χρησιμοποιούσαμε την προφανή ισότητα:

$$\Sigma(f+g,\Delta,\Xi)=\Sigma(f,\Delta,\Xi)+\Sigma(g,\Delta,\Xi).$$

Δεν ακολουθήσαμε αυτή την μέθοδο γιατί δεν έχουμε ακόμη αποδείξει την ισοδυναμία των ορισμών.

(iii) Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και λ πραγματικός αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται στον αναγνώστη.

(iv) Αν f,g ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και λ,μ πραγματικοί αριθμοί, τότε η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g.$$

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια των (ii) και (iii). □

(v) Αν $a<c<b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Ισχύει τότε

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω επίσης $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\Delta_1 \in \cdot([a,c])$ και $\Delta_2 \in \cdot([c,b])$ τέτοια ώστε

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta_1) \leq \int_a^c f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta_1)$$

και

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta_2) \leq \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta_2)$$

και

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta_2) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Προφανώς,

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = \overline{\Sigma}(f,\Delta_1) + \overline{\Sigma}(f,\Delta_2)$$

και

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \underline{\Sigma}(f,\Delta_1) + \underline{\Sigma}(f,\Delta_2)$$

αν $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \cdot([a,b])$ η ένωση των Δ_1, Δ_2.
Συνάγουμε λοιπόν ότι:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$$

και

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) = \big(\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_1)\big) + \\ + \big(\overline{\Sigma}(f,\Delta_2) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_2)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έχουμε επίσης

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta).$$

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες ανισότητες βρίσκουμε:

$$\left|\underline{\int_a^b} f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right)\right| \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon,$$

οπότε

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Παρόμοια έχουμε

$$\overline{\int_a^b} = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Η άλλη κατεύθυνση είναι ευκολότερη και αφήνεται στον αναγνώστη. □

(vi) Αν αλλάξουμε την τιμή μιας ολοκληρώσιμης στο διάστημα $[a,b]$ συνάρτησης f σε ένα σημείο το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει, δηλαδή αν $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \in [a,b]$ εκτός ίσως από $x = x_0$ τότε

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Φυσικά το ίδιο θα ισχύει αν αλλάξουμε την τιμή της f σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων (τετριμμένη επαγωγή).

Απόδειξη: Παρατηρούμε καταρχάς ότι η $h = f - g$ είναι παντού 0 στο $[a,b]$ εκτός ίσως από το x_0. Αρκεί λοιπόν, λόγω της ιδιότητας (iv) για $\lambda = 1$ και $\mu = -1$ να δείξουμε ότι $\int_a^b h = 0$. Αν $h(x_0) = 0$ το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας (i). Έστω λοιπόν $h(x_0) \neq 0$ και $\varepsilon > 0$. Ας πάρουμε μία διαμέριση Δ με πλάτος $d(\Delta) < \varepsilon/(2|h(x_0)|)$. Το πολύ δύο όροι των αθροισμάτων που ορίζουν τα $\overline{\Sigma}(h,\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(h,\Delta)$ θα είναι διάφοροι του μηδενός και ο καθένας από αυτούς θα είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερος του $d(\Delta)|h(x_0)| < \varepsilon/2$.

Θα έχουμε λοιπόν

$$-\varepsilon < \underline{\Sigma}(h,\Delta) \leq \underline{\int_a^b} h \leq \overline{\int_a^b} h \leq \overline{\Sigma}(h,\Delta) < \varepsilon,$$

από όπου άμεσα έπεται ότι το $\int_a^b h$ υπάρχει και ισούται με 0. □

(vii) Αν $m \leq f \leq M$, $a \leq qx \leq b$ και f ολοκληρώσιμη, τότε

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Απόδειξη: Για κάθε Δ έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)M_k \leq M \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = M(b-a).$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)m_k \geq m \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = m(b-a)$$

□

(viii) Αν $f(x) \leq g(x)$, $a \leq x \leq b$ και f, g ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ τότε

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_a^b h \geq 0$ για κάθε ολοκληρώσιμη h με $h(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ (γιατί;). Αυτό όμως είναι φανερό γιατί η υπόθεση $h(x) \geq 0$ συνεπάγεται $m_k \geq 0$, άρα $\underline{\Sigma}(h, \Delta) \geq 0$ για οποιαδήποτε διαμέριση Δ. □

(ix)
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|,$$
για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Απόδειξη: Η εκφώνηση της ιδιότητας αυτής είναι λίγο «πονηρή». Ας την αποδείξουμε καταρχάς αφελώς και μετά ας δούμε που την «πατήσαμε».

Έχουμε
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ για } a \leq x \leq b,$$
οπότε οι ιδιότητες (ii) και (viii) μας δίνουν
$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$
δηλαδή
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$
Που την πατήσαμε; Μα φυσικά έπρεπε καταρχάς να αποδείξουμε ότι η *ολοκληρωσιμότητα της f συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα της $|f|$*. Ευτυχώς η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη. (υπόδειξη: Η διαφορά $M_k - m_k$ για την $|f|$ δεν ξεπερνάει την αντίστοιχη διαφορά για την f.) □

(x) Μια γενίκευση. Το $\int_a^b f(x)dx$ έχει οριστεί μόνο στην περίπτωση $a < b$. Θα είναι χρήσιμο να το ορίσουμε και στις περιπτώσεις $a = b$ και $a < b$. Ο ορισμός είναι ο εξής:

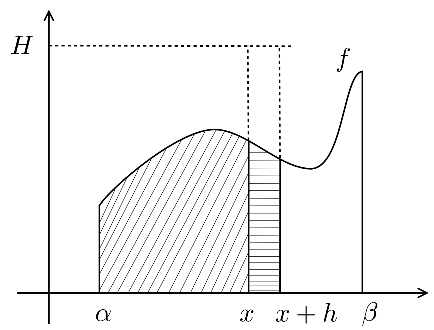
Ορισμός 5.5.1 *Αν $a = b$ και η f είναι ορισμένη στο a θέτουμε*
$$\int_a^a f = 0.$$
Αν $a > b$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, a]$, θέτουμε
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$
Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες που δείξαμε ισχύουν και με την γενικευμένη αυτή έννοια του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα αν $a > b$ και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[b, a]$, τότε
$$\int_a^b (f+g) = -\int_b^a (f+g) = -\int_b^a f - \int_b^a g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$
Η επαλήθευση των υπολοίπων ιδιοτήτων αφήνεται στον αναγνώστη,

5.5α' Τα βασικά θεωρήματα για το ολοκλήρωμα.

Τα δύο θεωρήματα που θα αποδείξουμε σ' αυτή την παράγραφο είναι από τα σημαντικότερα του Απειροστικού Λογισμού, για αυτό και ονομάζονται «Θεμελιώδη Θεωρήματα». Ουσιαστικά θα συνδέσουν τις έννοιες παραγώγιση και ολοκλήρωση. Η ανακάλυψη τους αποδίδεται στους Newton και Leibniz. Είναι ακριβώς αυτά τα θεωρήματα που οριοθετούν μια νέα εποχή για τον Απειροστικό Λογισμό λίγο μετά την Αναγέννηση και για πολλούς την απαρχή του.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Δεν υποθέτουμε ότι $f \geq 0$, αλλά είναι σκόπιμο να έχει ο αναγνώστης αυτή την περίπτωση στο μυαλό του, για να παρακολουθεί τη γεωμετρική σημασία τόσο των αποτελεσμάτων όσο και των αποδείξεων που θα δώσουμε.

Δείξαμε (ιδιότητα (v)) ότι αν $\alpha < x < \beta$ τότε το $\int_\alpha^x f$ υπάρχει. Η γενίκευση που δώσαμε μάλιστα στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου μάς επιτρέπει να ορίσουμε το $\int_\alpha^x f$ για $\alpha \leq x \leq \beta$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το



Σχήμα 5.6

ολοκλήρωμα $\int_\alpha^x f$ ορίζει μια συνάρτηση, ας την γράψουμε $F(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,

$$F(x) = \int_\alpha^x f, \qquad \text{για } \alpha \leq x \leq \beta.$$

Ας μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή. Η διαφορά $F(x+h) - F(x)$ παριστάνει γεωμετρικά το οριζόντια διαγραμμισμένο εμβαδόν στο σχήμα 5.6. Το εμβαδόν αυτό προφανώς είναι μικρότερο από το εμβαδόν ενός ορθογώνιου με βάση h και ύψος M, όπου M ένα άνω φράγμα της $|f|$, και $|f(x)| < M$, για $\alpha \leq x \leq \beta$, και επομένως τείνει στο 0 με το h. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι: αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Η ακριβής απόδειξη είναι εξίσου απλή. Έχουμε:

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = \left| \int_\alpha^{x_0+h} f - \int_\alpha^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f \right| \leq M|h|$$

και επομένως

$$|F(x+h)-F(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Αποδείξαμε λοιπόν, κάτι παραπάνω από τη συνέχεια της F, δηλαδή όχι μόνο ότι η $|F(x+h)-F(x)|$ είναι μικρή με το $|h|$ αλλά και ότι ισχύει η σχέση

$$|F(x_0+h)-F(x_0)| \leq M|h|.$$

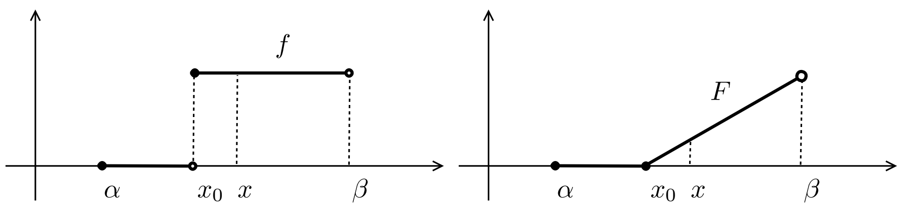
Οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν για τέτοιες συνεχείς συναρτήσεις τον όρο «Lipschitz συνεχείς», αλλά δε θα επεκταθούμε σ' αυτή την έννοια. Έχοντας όμως τώρα δείξει ότι υπάρχει «περίσσευμα» συνέχειας στο x_0 θα εξετάσουμε μήπως υπάρχει και η παράγωγος της F στο x_0. Η απάντηση είναι αρνητική χωρίς κάποια επιπρόσθετη υπόθεση. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε αμέσως με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_0 \leq x < \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha \leq x < x_0. \end{cases}$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (γιατί;) και

$$F(x) = \int_\alpha^x f = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha \leq x \leq x_0 \\ x - x_0, & \text{αν } x_0 \leq x \leq \beta, \end{cases}$$

(γιατί;). Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω τύπου είναι προφανής (βλέπε σχήμα 5.7).



Σχήμα 5.7

Ο τύπος που βρήκαμε για την $F(x)$ επαληθεύει αμέσως τη συνέχεια της F και δείχνει επίσης ότι η F' δεν υπάρχει στο x_0 ($F'(x_0^+) = 1, F'(x_0^-) = 0$). Αν όμως $x \neq x_0$ τότε

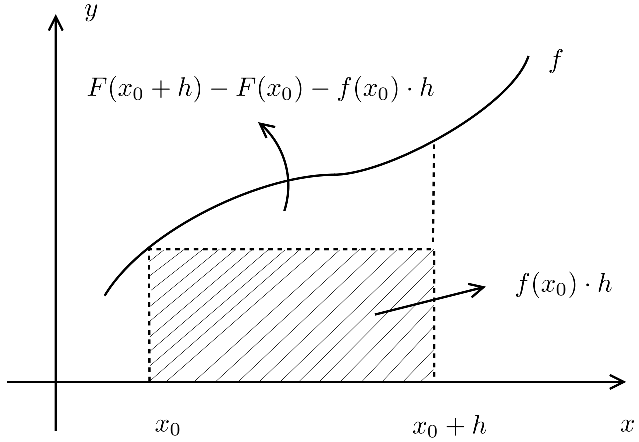
$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \alpha \leq x < x_0 \\ 1, & \text{αν } x_0 < x \leq \beta, \end{cases}$$

δηλαδή για $x \neq x_0$ η F' υπάρχει και ισούται με $f(x)$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικό και ονομάζεται *πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 5.5.2 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f$, για $\alpha \leq x \leq \beta$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η παράγωγός της ισούται με $f(x_0)$.*

Φυσικά αν $x_0 = \alpha$ ($x_0 = \beta$) εννοούμε συνέχεια και παραγώγιση από δεξιά (αριστερά).

Απόδειξη: θα εξετάσουμε την περίπτωση $\alpha < x_0 < \beta$ και θα υποθέτουμε ότι $|h| < \min\{\beta - x_0, x_0 - \alpha\}$ ούτως ώστε $x_0 + h \in (\alpha, \beta)$. Η περίπτωση $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$ είναι ανάλογη και αφήνεται στον αναγνώστη. Καλείται επίσης ο αναγνώστης να παρακολουθήσει όλα τα βήματα της απόδειξης στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8

Θέλουμε να δείξουμε ότι $F'(x_0) = f(x_0)$ δηλαδή ότι:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right) = 0.$$

Έστω πρώτα $h > 0$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\tfrac{1}{h}\left\{\int_\alpha^{x_0+h} f - \int_\alpha^{x_0} f - hf(x_0)\right\}\right| \\ &= \left|\left\{\tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right\}\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f - f(x_0))\right| \\ &\le \tfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f - f(x_0)|.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f υποτέθηκε συνεχής στο x_0 θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|h| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν λοιπόν $|h| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για $x_0 \le x \le x_0 + h$, και επομένως $0 < h < \delta$ συνεπάγεται

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f - f(x_0)| < \frac{1}{h}h\varepsilon = \varepsilon,$$

που αποδεικνύει ότι $F'(x_0^+) = f(x_0)$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $F'(x_0^-) = f(x_0)$ και επομένως $F'(x_0) = f(x_0)$. (Δικαιολογήστε όλα τα βήματα της παραπάνω απόδειξης. Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση $h > 0$;) □

Πριν προχωρήσουμε σε σχόλια και εφαρμογές του θεωρήματος αυτού ας προχωρήσουμε σε ένα πόρισμα του που ονομάζεται *β' θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Ας θεωρήσουμε πάλι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχή για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Έστω τώρα G μια άλλη συνάρτηση με πεδίο ορισμού πάλι το $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β), συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, και τέτοια ώστε $G'(x) = f(x)$, $\alpha < x < \beta$. Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται *αρχική ή αόριστο ολοκλήρωμα της* f (πιο σπάνια λέγεται και αντιπαράγωγος).

Δείξαμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $F(x) - G(x)$ είναι σταθερά στο (α, β) και (αφού είναι συνεχής) επομένως σταθερά και στο $[\alpha, \beta]$. Θα έχουμε λοιπόν $F(x) - G(x) = c$, για $\alpha \le x \le \beta$. Αν $x = 0$ τότε $F(\alpha) = \int_\alpha^\alpha f = 0$ άρα $c = -G(\alpha)$ οπότε:

$$F(x) = G(x) - G(\alpha) = \int_\alpha^x f$$

και ειδικότερα

$$F(\beta) = \int_\alpha^\beta f = G(\beta) - G(\alpha).$$

Δείξαμε λοιπόν το:

Θεώρημα 5.5.3 *Αν G είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, $\alpha \le x \le \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f = G(\beta) - G(\alpha)$.*

Συνήθως η G ορίζεται σε ένα διάστημα (γ, δ) με $\gamma < \alpha < \beta < \delta$ και είναι παραγωγίσιμη σ¨ αυτό, οπότε η συνέχεια στα α, β είναι αυτόματη.

Στην παραπάνω απόδειξη δείξαμε ότι αν $G_1(x)$ και $G_2(x)$ είναι δύο αόριστα ολοκληρώματα της f τότε το $G_2(x) - G_1(x)$ είναι σταθερά και επομένως αν ξέρουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, τα ξέρουμε όλα.

Για το αόριστο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο με το ορισμένο ολοκλήρωμα αλλά χωρίς όρια ολοκλήρωσης, (τα α, β στο $\int_\alpha^\beta$ λέγονται όρια ολοκλήρωσης, πάνω όριο το β και κάτω όριο το α). Θα γράψουμε δηλαδή $\int f$ ή $\int f(x)\,dx$ για κάθε συνάρτηση της οποίας η παράγωγος ισούται με f στο πεδίο ορισμού της f (που υποτίθεται ότι είναι ένα διάστημα).

Ο τύπος $\int_\alpha^\beta f = G(\beta) - G(\alpha)$ έχει επικρατήσει να γράφεται $\int_\alpha^\beta f = G(x)|_\alpha^\beta$, δηλαδή χρησιμοποιούμε το σύμβολο $G(x)|_\alpha^\beta$ για τη διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$.

Με τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, συνάγουμε ότι «*ο υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων ανάγεται στην εύρεση αρχικών συναρτήσεων (αόριστων ολοκληρωμάτων)*». Αυτό δεν είναι πάντοτε απλό ακόμη και αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι στοιχειώδης. Στις περιπτώσεις αυτές αν ενδιαφερόμαστε για την αριθμητική τιμή ή για μια καλή προσέγγιση ενός ορισμένου ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε διάφορες μεθόδους που βασίζονται στον ορισμό του $\int_\alpha^\beta f$.

$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,\ n \in \mathbb{Z}$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$	$\int \alpha^x\,dx = \dfrac{\alpha^x}{\log\alpha} + c, \quad \alpha > 0$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$
$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \operatorname{Arcsin} x + c \\ &= -\operatorname{Arccos} x + \left(\frac{\pi}{2} + c\right)\end{aligned}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} x + c$
$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c$	

Πίνακασ 5.1 Πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων

Ο πίνακας των παραγώγων ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δίνει σχεδόν αυτόματα ένα πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων. Το γράμμα c θα σημαίνει, ως συνήθως, μια σταθερά. Οι τύποι ισχύουν για τα x για τα οποία τα δεξιά μέλη ορίζονται (και έχουν, όπως ξέρουμε, τότε παράγωγο).

5.6 Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

Όπως αναμένουμε πολλές ιδιότητες της παραγώγισης μεταφέρονται σε αντίστοιχες ιδιότητες για την αόριστη ολοκλήρωση. Θα εξετάσουμε μερικές από αυτές που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στον υπολογισμό αορίστων, άρα και ορισμένων ολοκληρωμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, η γνωστή σχέση $(\alpha F+\beta G)' = \alpha F'+\beta G'$ α, β σταθερές, συνεπάγεται τη σχέση $\int(\alpha f + \alpha g) = \alpha\int f + \beta\int g$.

Παράδειγμα: Για τυχαίο πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$, έχουμε

$$\int f = c + \alpha_0 x + \alpha_1\frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Πιο ενδιαφέροντες είναι οι κανόνες ολοκλήρωσης που προέρχονται από τον τύπο παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης (κανόνας της αλυσίδας) και από τον τύπο παραγώγισης γινομένου. Λέγονται αντίστοιχα «ολοκλήρωση με αντικατάσταση» (ή αλλαγή μεταβλητής) και «ολοκλήρωση κατά μέρη».

5.6α' Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Αν $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, σε ένα διάστημα $\alpha < x < \beta$, δηλαδή αν $F'(x) = f(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$ και $g(y)$ για $\gamma < y < \delta$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $g(y) \in (\alpha, \beta)$ για $\gamma < y < \delta$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $F(g(y))$ ορίζεται και η παράγωγος της δίνεται από τον τύπο (κανόνας αλυσίδας):

$$\Big(F\big(g(y)\big)\Big)' = F'\big(g(y)\big)g'(y) = f(g(y))g'(y),$$

για $\gamma < y < \delta$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $F(g(y))$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(g(y))g'(y)$. Γράφουμε συνήθως αυτή την ιδιότητα ως εξής:

$$\int f\big(g(y)\big)g'(y)dy = \int f(x)\,dx.$$

Φυσικά αυτό σημαίνει ότι, εκτός από μια προσθετική σταθερά, η συνάρτηση του y που παριστάνει το αριστερά μέλος προκύπτει από τη συνάρτηση του x που παριστάνει το δεξιό μέλος, αν αντικαταστήσουμε το x με $g(y)$.

Παρατήρηση 5.6.1 Φορμαλιστικά ο παραπάνω τύπος προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ αν στη θέση του x θέσουμε $g(y)$ και στη θέση του «διαφορικού» dx το $dg(y) = g'(y)dy$. Φυσικά το dx στο ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ είναι απλώς σύμβολο, που βρίσκεται εκεί για να μας θυμίζει το $\Delta_{x_k} = x_{k+1} - x_k$ στο άθροισμα $\sum f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ του ορισμού του Riemann. Ο παραπάνω τύπος δίνει μια πολύ χρήσιμη μέθοδο ολοκλήρωσης στις περιπτώσεις που το ολοκλήρωμα του αριστερά μέλους είναι ευκολότερο στον υπολογισμό.

Παραδείγματα

(i) $\int (2x+3)^3\,dx$. Θέτουμε $2x + 3 = y$ δηλαδή $x = (y-3)/2$ και έχουμε

$$\int (2x+3)^3\,dx = \int y^3 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\frac{y^4}{4} + C = \frac{(2x+3)^4}{8} + C.$$

(ii) $\int \cos^3 x\,dx$. Εδώ, όπως και σε άλλες περιπτώσεις, δεν φαίνεται άμεσα η «καλή» αντικατάσταση. Θα μπορούσε κανείς να δώσει διάφορους κανόνες που θα κάλυπταν αρκετές περιπτώσεις αλλά δεν θα ακολουθήσουμε αυτή τη τακτική. Εξ' άλλου σε καμιά περίπτωση οι κανόνες αυτοί δεν πρόκειται να αντικαταστήσουν την εμπειρία που προέρχεται με την εξάσκηση. Παρατηρούμε ότι

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)(\sin x)'$$

Επομένως, θέτοντας $\sin x = y$:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1 - y^2)dy = c + y - \frac{y^3}{3} = c + \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\int xe^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-x^2)'e^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int e^y dy = c - \frac{e^y}{2} \\
&= c - \frac{e^{-x^2}}{2}.
\end{aligned}$$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m}$ για $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} &= \int (x-\alpha)^{-m}(x-\alpha)'\,dx \\
&= \int y^{-m} dy \\
&= \begin{cases} c + \log|y| = c + \log|x-\alpha|, & \text{αν } m = -1 \\ \dfrac{y^{-m+1}}{-m+1} = \dfrac{(x-\alpha)^{(-m+1)}}{-m+1}, & \text{αν } m \neq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

(v) $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}\,dx,\ \Delta = \gamma^2 - 4\delta = -4k^2 < 0.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}\,dx &= \int \frac{\alpha(x+\frac{\gamma}{2}) + \beta - \frac{\alpha\gamma}{2}}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{4\delta-\gamma^2}{4}}\,dx \\
&= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{4\delta-\gamma^2}{4}}\,dx \\
&\quad + \left(\beta - \frac{\alpha\gamma}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{4\delta-\gamma^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα του β' μέλους γράφοντας $k^2 = (4\delta - \gamma^2)/4\ \ (= -\delta/4 > 0)$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})\,dx}{(x+\frac{\gamma}{2}^2) + \frac{4\delta-\gamma^2}{4}} = \int \frac{((x+\frac{\gamma}{2})^2 + k^2)'\,dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + k^2} \\
&= \int \frac{dy}{y} = c + \log|y| = c + \log\left|\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + k^2\right| \\
&= c + \log|x^2 + \gamma x + \delta|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{4\delta-\gamma^2}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{\{\frac{1}{k}(x+\frac{\gamma}{2})\}^2+1} = \frac{1}{k}\int \frac{(\frac{1}{k}(x+\frac{\gamma}{2}))'\,dx}{\{\frac{1}{k}(x+\frac{\gamma}{2})\}^2+1} \\ &= \frac{1}{k}\int \frac{dy}{y^2+1} = c + \frac{1}{k}\operatorname{Arctan} y \\ &= c + \frac{1}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\operatorname{Arctan}\frac{x+\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}. \end{aligned}$$

5.7 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Ο τύπος $(fg)' = f'g + fg'$ οδηγεί αμέσως στον παρακάτω τύπο που είναι γνωστός σαν «τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη»:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x).$$

Ο τύπος γράφεται συχνά ως εξής:

$$\int fdg = fg - \int gdf,$$

και έχει πάρα πολλές εφαρμογές τόσο για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων όσο και για την εξαγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων.

Παραδείγματα

(i) $\int_1^2 \log x\,dx$. Υπολογίζω πρώτα ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $\log x$ με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} \int \log x\,dx &= \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα:

$$\int_1^2 \log x\,dx = (x\log x - x)\big|_1^2 = 2\log 2 - 2 + 1 = -1 + \log 4 = \log\frac{4}{e}.$$

Πιο συχνά προχωράμε ταυτόχρονα στην εύρεση του ορισμένου ολοκληρώματος, σε περιπτώσεις σαν την παραπάνω, γράφοντας:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \log x\,dx &= \int_1^2 (x)'\log x\,dx = x\log x|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx \\ &= 2\log 2 - 1\log 1 - (2-1) = -1 + \log 4 \\ &= \log\frac{4}{e}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \int x^2(\sin x)'\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.\end{aligned}$$

(iii) $\int \frac{(\alpha x+\beta)}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx$, $\Delta=\gamma^2-4\delta=-k^2<0$, $\mu=2,3,\ldots$. Προχωράμε όπως στο παράδειγμα v (σελίδα 115) και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{(\alpha x+\beta)}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx\\ &\quad+\Big(\beta-\frac{\alpha\gamma}{2}\Big)\int\frac{dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα του β' μέλους

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx = \int\frac{(x^2+\gamma x+\delta)'\,dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\\ &= \int\frac{dy}{y^\mu} = c + \frac{y^{-\mu+1}}{-\mu+1}\\ &= c - \frac{1}{\mu-1}\frac{1}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\mu-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int\frac{dx}{\{(x+\frac{\gamma}{2})^2+k^2\}^\mu} = \int\frac{k(\frac{x+\frac{\gamma}{2}}{k})'\,dx}{k^{2\mu}\{(\frac{x+\frac{\gamma}{2}}{k})^2+1\}^\mu}\\ &= k^{1-2\mu}\int\frac{dy}{(y^2+1)^\mu}.\end{aligned}$$

Μας μένει έτσι να υπολογίσουμε το

$$\int\frac{dy}{(y^2+1)^\mu}$$

και να αντικαταστήσουμε το y με $(x+\gamma/2)/k$. Θα βρούμε ένα τύπο για το ολοκλήρωμα αυτό, ας το καλέσουμε I_μ, συναρτήσει του $I_{\mu-1}$. Μετά από $\mu-1$ βήματα θα φτάσουμε στο $I_1=\int\frac{dy}{1+y^2}$ το οποίο ξέρουμε να το υπολογίσουμε ($= \mathrm{Arctan}\, y + c$). Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
I_\mu &= \int \frac{dy}{(1+y^2)^\mu} = \int \frac{1+y^2-y^2}{(1+y^2)^\mu} dy \\
&= \int \frac{dy}{(1+y^2)^{\mu-1}} - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^\mu} dy = I_{\mu-1} - \frac{1}{2} \int y \frac{2y}{(1+y^2)^\mu} dy \\
&= I_{\mu-1} - \frac{1}{2} \int y \frac{(1+y^2)'}{(1+y^2)^\mu} dy = I_{\mu-1} - \frac{1}{2} \int y (1+y^2)^{-\mu} (1+y^2)' dy \\
&= I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)} \int y \{(1+y^2)^{-(\mu-1)}\}' dy \\
&= I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)} \left\{ \frac{y}{(1+y^2)^{\mu-1}} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{\mu-1}} \right\} \\
&= \frac{2\mu-3}{2\mu-2} I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)} \frac{y}{(1+y^2)^{\mu-1}}.
\end{aligned}$$

δηλαδή βρήκαμε το I_μ συναρτήσει του $I_{\mu-1}$. Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη.

Παρατήρηση 5.7.1 Τα ολοκληρώματα (iv) και (v), σελίδα 115, και (iii), σελίδα 117, θα μας χρειαστούν στην επόμενη παράγραφο για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

5.8 Η ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι με τις μεθόδους που αναπτύξαμε μέχρι τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις της μορφής $P(x)/Q(x)$, όπου τα $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα και το Q έχει την μορφή:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_k)^{n_k} (x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1} \cdots (x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda},$$

όπου $\alpha_1, \ldots, \delta_\lambda \in \mathbb{R}$, $n_1, \ldots, m_\lambda \in \mathbb{N}$ και $\gamma_\rho^2 - 4\delta_\rho^2 < 0$ για $1 \le \rho \le \lambda$.

Παρατήρηση 5.8.1 Στην πραγματικότητα κάθε πολυώνυμο μπορεί να γραφτεί ως μια σταθερά επί ένα πολυώνυμο της παραπάνω μορφής. Αυτό είναι πόρισμα του λεγόμενου θεμελιώδους θεωρήματος της «Άλγεβρας», σύμφωνα με το οποίο «κάθε μη σταθερό πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία εν γένει μιγαδική ρίζα». Στην παραπάνω διατύπωση το πολυώνυμο μπορεί να έχει και μιγαδικούς συντελεστές. Στην περίπτωση τώρα που το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε οι καθαρά μιγαδικές ρίζες του εμφανίζονται ανά ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών και τα ζεύγη αυτά δημιουργούν τους παράγοντες της μορφής $(x^2+\gamma x+\delta)^m$. Δεν θα παρουσιάσουμε εδώ αυτή την θεωρία, διότι φυσιολογικά ανήκει στην θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Στους υπολογισμούς το θεώρημα δεν είναι χρήσιμο, γιατί δεν μας δίνει μέθοδο να βρίσκουμε ρίζες. Το ότι η απόδειξη του θεωρήματος, παρά το όνομα του, χρειάζεται μέσα του Απειροστικού Λογισμού (η Θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων είναι κατά κάποια έννοια η επέκταση του Απειροστικού Λογισμού για μιγαδικές συναρτήσεις), μπορούμε να το δούμε από την περίπτωση πολυωνύμου βαθμού 3 (για πολυώνυμα βαθμού 1 και 2 το θεώρημα είναι γνωστό από τα Γυμνασιακά Μαθηματικά).

Πραγματικά με την βοήθεια του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής δείξαμε ότι κάθε πολυώνυμο 3ου βαθμού έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αν λοιπόν

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad a_3 \neq 0,$$

θα υπάρχει πραγματικός ρ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 0$, και επομένως

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\rho) = a_1(x-\rho) + a_2(x^2-\rho^2) + a_3(x^3-\rho^3) = \\ a_3(x-\rho)\left\{x^2 + x\rho + \rho^2 + \frac{a_2}{a_3}(x+\rho) + \frac{a_1}{a_3}\right\} = \\ a_3(x-\rho)\left\{x^2 + \left(\rho + \frac{a_2}{a_3}\right)x + \left(\rho^2 + \frac{a_2}{a_3}\rho + \frac{a_1}{a_3}\right)\right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή πράγματι η $f(x)$ έχει την μορφή που περιγράψαμε στην αρχή της παραγράφου. Για την απόδειξη πάντως χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή ένα θεώρημα που κατέξοχήν ανήκει στον Απειροστικό Λογισμό.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων $P(x)/Q(x)$ με παρονομαστή Q της μορφής που περιγράψαμε (θεωρητικά δηλαδή όλων των ρητών συναρτήσεων) στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα που ονομάζεται *Θεώρημα ανάλυσης σε απλά κλάσματα.*

Θεώρημα 5.8.2 *Αν τα διώνυμα $x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_k$ είναι διαφορετικά ανά δύο, τα τριώνυμα $x^2+\gamma_1 x+\delta_1, \ldots, x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda$ διαφορετικά αν δύο, οι διακρίνουσες $\gamma_\rho^2 - 4\delta_\rho$ αρνητικές για $\rho = 1, \ldots, \lambda$ και $n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_\lambda$ φυσικοί αριθμοί, τότε υπάρχουν σταθερές $A_1^1, \ldots, A_1^{n_1}; \ldots; A_k^1, \ldots, A_k^{n_k}; \Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^{m_1}; \ldots; \Delta_\lambda^{m_\lambda}; \Gamma_1^1, \ldots, \Gamma_\lambda^{m_\lambda}$ ώστε*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_1^{n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \cdots \\ + \cdots + \frac{A_k^1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_k^{n_k}}{(x-\alpha_k)^{n_k}} + \\ + \frac{\Gamma_1^1 x + \Delta_1^1}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)} + \cdots + \frac{\Gamma_1^{m_1} x + \Delta_1^{m_1}}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}} + \cdots \\ \cdots + \frac{\Gamma_\lambda^1 x + \Delta_\lambda^1}{(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)} + \cdots + \frac{\Gamma_\lambda^{m_\lambda} x + \Delta_\lambda^{m_\lambda}}{(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda}}, \end{aligned}$$

όπου P, Q πολυώνυμα ώστε ο βαθμός P να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του Q και

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_k)^{n_k} (x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1} \cdots (x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda}.$$

Παρατήρηση 5.8.3 Εκτελώντας την διαίρεση $P(x) = \pi(x)Q(x) + y(x)$, όπου ο βαθμός του $y(x)$ γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$, βλέπουμε ότι

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{y(x)}{Q(x)}$$

και επομένως η υπόθεση «ο βαθμός P να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του Q» δεν βλάπτει ουσιαστικά την γενικότητα.

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι πολύ απλή και θα μας δώσει και την επιπρόσθετη πληροφορία, ότι οι σταθερές $A_1^1, \ldots, \Delta_\lambda^{m_\lambda}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένες.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον βαθμό $n_1 + n_2 + \cdots + 2m_1 + \cdots + 2m_\lambda = N$ του Q. Για $N = 1$ το θεώρημα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε $N > 1$.

Αν πιστέψουμε καταρχάς την ανάλυση σε κλάσματα που λέει το θεώρημα, τότε η παράσταση

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A_1^{n_1-1}}{x-\alpha_1)^{n_1}} = \frac{P(x) - A_1^{n_1} Q_1(x)}{Q(x)},$$

όπου $Q_1(x)$ το πολυώνυμο $\frac{Q(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}}$, μετά την εκτέλεση των πράξεων θα πρέπει να πάρει την μορφή $\frac{B(x)}{Q_2(x)}$ όπου B, Q_2 πολυώνυμα, $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{x-\alpha_1}$ και ο βαθμός του B είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του Q_2 (γιατί;). Το $A_1^{n_1}$ λοιπόν καθορίζεται, αν αυτό είναι δυνατόν, από την συνθήκη:

Το πολυώνυμο $P(x) - A_1^{n_1} Q_1(x)$ διαιρείται με $x - \alpha_1$, δηλαδή

$$P(\alpha_1) - A_1^{n_1} Q_1(\alpha_1) = 0.$$

Το ότι πραγματικά η συνθήκη αυτή καθορίζει το $A_1^{n_1}$ προκύπτει από το ότι $Q_1(\alpha_1) \neq 0$ (γιατί;).

Η ίδια σκέψη μας καθοδηγεί και για τον καθορισμό των $\Gamma_1^{m_1}, \Delta_1^{m_1}$. Έχουμε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\Gamma_1^{m_1} x + \Delta_1^{m_1}}{(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)^{m_1}} = \frac{P(x) - (\Gamma_1^{m_1} x + \Delta_1^{m_1}) Q_1(x)}{Q(x)},$$

όπου $Q_1(x)$ είναι το πολυώνυμο $\frac{Q(x)}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^m}$. Τα $\Gamma_1^{m_1}, \Delta_1^{m_1}$, καθορίζονται όπως και προηγούμενα, αν αυτό είναι δυνατόν από την συνθήκη:

Το πολυώνυμο $P(x) - (\Gamma_1^{m_1} x + \Delta_1^{m_1}) Q_1(x)$ διαιρείται με το τριώνυμο $x^2 + \gamma_1 x + \delta_1$.

Αν γράψουμε $\rho_1 x + \rho_2$, $q_1 x + q_2$ τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των P, Q_1 δια του $x^2 + \gamma_1 x + \delta_1$ η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με την

Υπάρχει σταθερά B τέτοια ώστε :

$$(\Gamma_1^{m_1} x + \Delta_1^{m_1})(q_1 x + q_2) - (\rho_1 x + \rho_2) = B(x^2 + \gamma_1 x + \delta_1)$$

Δηλαδή:

$$q_1\Gamma_1^{m_1} + 0\cdot\Delta_1^{m_1} - B = 0,$$
$$q_2\Gamma_1^{m_1} + q_1\Delta_1^{m_1} - \gamma_1 B = \rho_1,$$
$$0\cdot\Gamma_1^{m_1} + q_2\Delta_1^{m_1} - \delta_1 B = \rho_2.$$

Για να είναι λοιπόν δυνατός ο καθορισμός των $\Gamma_1^{m_1}, \Delta_1^{m_1}$ πρέπει η ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} q_1 & 0 & -1 \\ q_2 & q_1 & -\gamma_1 \\ 0 & q_2 & -\delta_1 \end{vmatrix} = -\delta_1 q_1^2 + \gamma_1 q_1 q_2 - q_2^2,$$

να είναι $\neq 0$. Καταρχάς αποκλείεται $q_1 = q_2 = 0$ γιατί τότε και το πολυώνυμο $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}}$ θα έπρεπε να διαιρείται με $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$, το οποίο δεν συμβαίνει. Η απόδειξη είναι εύκολη αλλά όχι τελείως τετριμμένη. (Το $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$ είναι ανάγωγο (δεν γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων 1ου βαθμού), διότι $\gamma_1^2 - 4\delta_1 < 0$, και επομένως για να διαιρεί το Q_1 θα πρέπει να διαιρεί έναν από τους ανάγωγους παράγοντές του. Το τελευταίο όμως δεν μπορεί να συμβεί).

Έστω λοιπόν $q_2 \neq 0$. Θα έχουμε

$$D = -q_2\left\{\delta_1\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 - \gamma_1\left(\frac{q_1}{q_2}\right) + 1\right\},$$

και επειδή εξ' υποθέσεως $\gamma_1^2 - 4\delta_1 < 0$ έπεται $D \neq 0$.

Αφαιρώντας λοιπόν από το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ένα όρο της μορφής $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ ή $\frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+\gamma x+\delta)^m}$, αναγόμαστε σε μια ρητή συνάρτηση $\frac{B(x)}{Q_2(x)}$, όπου το πολυώνυμο $B(x)$ έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q_2(x)$ και ο βαθμός του τελευταίου είναι μικρότερος του N. Η επαγωγική υπόθεση μας και οι παρατηρήσεις αυτές συμπληρώνουν εύκολα την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.8.4 Αν μας επιτρέπονταν η χρήση μιγαδικών αριθμών, η απόδειξη θα ήταν σημαντικά απλούστερη (γιατί;).

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$. Αρχίζουμε με την ανάλυση

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x+1} + \frac{\Delta x+E}{x^2+1}.$$

Η βασική μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών A, B, Γ, Δ, E συνίσταται, αφού κάνουμε τις πράξεις στο β' μέλος, στο να εξισώσουμε τους συντελεστές των αριθμητών και να λύσουμε το σύστημα που προκύπτει. Ας εφαρμόσουμε την μέθοδο στο παράδειγμα μας:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x+1} + \frac{\Delta x+E}{x^2+1} =$$

$$\frac{A(x-1)(x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+\Gamma(x-1)^2(x^2+1)+(\Delta x+E)(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)},$$

οπότε πρέπει

$$1=(A+\Gamma+\Delta)x^4+(B-2\Gamma-\Delta+E)x^3+(B+2\Gamma-\Delta-E)x^2+(B-2\Gamma+\Delta-E)x+(-A+B+\Gamma+E),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}&A+\Gamma+\Delta=0\\&B-2\Gamma-\Delta-E=0\\&B+2\Gamma-\Delta-E=0\\&B-2\Gamma+\Delta-E=0\\&-A+B+\Gamma+E=1\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A=-\frac{3}{8},\ \ B=\frac{1}{4},\ \ \Gamma=\frac{1}{8},\ \ \Delta=\frac{1}{4},\ \ E=\frac{1}{4}.$$

Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τους συντελεστές, που αντιστοιχούν σε παρονομαστές της μορφής $(x-\alpha_k)^{m_k}$ είναι να πολλαπλασιάσουμε την σχέση που δίνει την ανάλυση του $P(x)/Q(x)$ επί $(x-\alpha_k)^{m_k}$ και να θέσουμε $x=\alpha_k$. Στο παράδειγμα μας, για παράδειγμα, πολλαπλασιάζοντας επί $(x-1)^2$ και θέτοντας $x=1$ βρίσκουμε: $B=\frac{1}{(1+1)(1^2+1)}=\frac{1}{4}$. Πολλαπλασιάζοντας επί $x+1$ και θέτοντας $x=-1$, βρίσκουμε $\Gamma=\frac{1}{(-1-1)^2((-1)^2+1)}=\frac{1}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}$.

Η ολοκλήρωση τώρα της συνάρτησης $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$ ανάγεται σε γνωστά ολοκληρώματα.

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}\\&=-\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx\\&=-\frac{3}{8}\log|x-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}dx\\&=\frac{3}{8}\log|x-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(x)+\frac{1}{8}\log|x^2+1|+c.\end{aligned}$$

5.8α' Ολοκληρώματα που ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Πολλές μορφές ολοκληρωμάτων ανάγονται σε ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων. Παρουσιάζουμε μερικές από αυτές τις περιπτώσεις. Θα χρησιμοποιούμε το γράμμα R για ρητές συναρτήσεις μιας η περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα $R(x,y)$ θα σημαίνει μια συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, όπου P,Q πολυώνυμα των x,y.

(i) $\int R(\cos(x),\sin(x))dx$. Η αντικατάσταση $\tan\frac{x}{2}=y$, $(x=2\operatorname{Arctan}(y))$, ανάγει τα ολοκληρώματα αυτά σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Πραγματικά, θα έχουμε:

$$\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}, \quad (2\operatorname{Arctan} y)' = \frac{2}{1+y^2},$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right) \frac{1}{1+y^2} dy,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά επίπονη, για αυτό επιδιώκουμε συχνά, ανάλογα με την μορφή της R να βρούμε απλούστερους τρόπους ολοκλήρωσης. Αν για παράδειγμα η $R(\cos(x), \sin(x))$ έχει την μορφή $\cos(x)R_1(\cos(x), \sin(x))$ και στην ρητή συνάρτηση $R_1(x, y)$ εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x, τότε η αντικατάσταση $y = \sin(x)$ ανάγει το $\int R(\cos(x), \sin(x))dx$ σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης (γιατί;).

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{\sin(x)}$. Θέτουμε $y = \tan(x/2)$, οπότε $\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}$ και έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+y^2}{2y} (\operatorname{Arctan}(y))' dy =$$

$$\frac{1+y^2}{2y} \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + c.$$

Αν και εδώ το ολοκλήρωμα υπολογίστηκε εύκολα, ας δώσουμε και ένα άλλο τρόπο υπολογισμού.

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) dx =$$

$$\int \frac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx = c + \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

(ii) $\int R(e^x)dx$. Η αντικατάσταση $e^x = y$ ανάγει το ολοκλήρωμα στο $\int R(y)\frac{dy}{y}$. Στην περίπτωση αυτή ανάγονται και τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των υπερβολικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα: $\int \sinh^2(x)dx$. Θέτουμε $y = e^x$, οπότε $\sinh(x) = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{y})$ και έχουμε

$$\int \sinh^2(x) = \int \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \frac{dy}{y} =$$

$$\frac{1}{4}\int \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right)\frac{1}{y}dy = \frac{1}{4}\left[\int y\,dy + \int y^{-3}dy - 2\int \frac{dy}{y}\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^{-2}}{-2} - 2\log|y|\right] + c =$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) - 2x\right] + c = \frac{\sinh(x)}{4} - \frac{x}{2} + c.$$

(iii) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$. Η αντικατάσταση $y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ ανάγει το ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. Θέτουμε $x-1=y^2$, οπότε

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2ydy}{(1+y^2)y} = 2\operatorname{Arctan} y + c = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x-1} + c.$$

(iv) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι η ειδική περίπτωση $n=2$ ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, όπου $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Την περίπτωση $n=1$ την έχουμε ουσιαστικά εξετάσει. Πραγματικά το $\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης να θέσουμε $y^2 = ax+b$. Ας δούμε λεπτομερέστερα γιατί.

Η αντικατάσταση $y^2 = ax+b$, δηλαδή $x = \frac{y^2-b}{a}$ μετατρέπει την $R(x, \sqrt{ax+b})$ στη ρητή συνάρτηση $R\left(\frac{y^2-b}{a}, y\right)$ και το ολοκλήρωμα $\int R(x,y)$ στο

$$\int R\left(\frac{y^2-b}{a}, y\right)\left(\frac{y^2-b}{a}\right)' dy = \int R\left(\frac{y^2-b}{a}, y\right)\frac{2y}{a}dy.$$

Ήταν ουσιαστικό για την μετατροπή αυτή το γεγονός ότι η $y^2 = ax+b$ έχει ρητή λύση ως προς x : $x = \frac{y^2-b}{a}$. Έτσι για παράδειγμα η αντικατάσταση $y^2 = ax^2+bx+c$ δεν είναι η κατάλληλη για την μετατροπή του ολοκληρώματος $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης. Πραγματικά θα είχαμε

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(c-y^2)}}{2a},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
&\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \\
&\quad = \int R\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4(c-y^2)}}{2a}, y\right)\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4(c-y^2)}}{2a}\right)' dy,
\end{aligned}$$

δηλαδή, εν γένει ολοκλήρωμα πάλι μη ρητής συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι $a > 0$. Μια μικρή αλλαγή στην παραπάνω ιδέα, που οφείλεται στον μεγάλο Ελβετό μαθηματικό του 18ου αιώνα L. Euler, θα μας δώσει την επιθυμητή αντικατάσταση. Θέτουμε $ax^2+bx+c = (y+\sqrt{a}x)^2$. Τώρα μπορούμε να βρούμε ρητά το x συναρτήσει y (γιαυτό προσθέσαμε τον όρο $\sqrt{a}x$):

$$x = \frac{c-y^2}{2\sqrt{a}y - b},$$

οπότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται ως εξής:

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$
$$= \int R\left(\frac{c-y^2}{2\sqrt{a}y-b}, y+\sqrt{a}\frac{c-y^2}{2\sqrt{a}y-b}\right)\left(\frac{c-y^2}{2\sqrt{a}y-b}\right)'\,dy.$$

Αν $a<0$, τότε το τριώνυμο ax^2+bx+c θα έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, (αλλιώς θα ήταν <0 για όλα τα x) και θα έχουμε:

$$ax^2+bx+c = a(x-\rho_1)(x-\rho_2) = (x-\rho_1)^2\frac{a(x-\rho_2)}{x-\rho_1}.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $y^2 = \frac{a(x-\rho_2)}{x-\rho_1}$, τότε μπορούμε να λύσουμε πάλι ρητά ως προς x και θα έχουμε $x = \frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}$, οπότε

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) =$$

$$\int R\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}, y\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}-\rho_1\right)\right)\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}\right)'\,dy.$$

Μια διαφορετική μέθοδος για την ολοκλήρωση θα ήταν, με μετασχηματισμούς ανάλογους με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα (v) σελίδα 115, να αναχθούμε σε ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$ ή $\int R(x, \sqrt{x^2-1})$ ή $\int R(x, \sqrt{1-x^2})$.

Το $\int R(x, \sqrt{x-1})$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του e^x με την αντικατάσταση $x=\cosh(x)$ και το $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης των $\sin(y), \cos(y)$ με την αντικατάσταση $x=\sin(y)$.

Παραδείγματα:

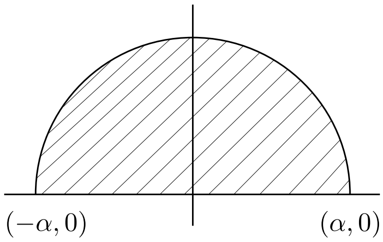
(α) Η συνάρτηση $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $-a\le x\le a$, παριστάνει ημιπεριφέρεια με ακτίνα a. Το ολοκλήρωμα $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, παριστάνει επομένως το εμβαδόν του διαγραμμισμένου ημικυκλίου και θα πρέπει να ισούται με $\frac{1}{2}\pi a^2$. Ας το επαληθεύσουμε. Θέτουμε $x=a\cdot\sin(x)$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ και έχουμε

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t a\cos t\,dt =$$

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt,$$

και μένει να δείξουμε ότι

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}.$$



Σχήμα 5.9

Η απόδειξη είναι εύκολη:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big) + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)(2t)'\, dt =$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(y)\, dy = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin(y)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να διέφυγε της προσοχής του αναγνώστη ότι χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την εξής ιδιότητα:
Αν $x = q(t), \gamma \leq t \leq \delta$ είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\int_{q(\gamma)}^{q(\delta)} f(x)\, dx = \int_{\gamma}^{\delta} f\big(q(t)\big)q'(t)\, dt».$$

Εδώ βέβαια έχουμε κάνει, χωρίς να το πούμε, και άλλες υποθέσεις, όπως η ολοκληρωσιμότητα των $f(x)$ και $f\big(q(t)\big)q'(t)$. Δεν θα ψάξουμε να βρούμε τις ακριβείς προϋποθέσεις, θα υποθέσουμε απλά ότι οι q και f είναι τέτοιες ώστε να ισχύει ο τύπος αόριστης ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(q(t)\big)q'(t)\, dt \qquad \big(x = q(t)\big).$$

Το αριστερό μέλος είναι μια συνάρτηση $F(x)$ και το δεξιό μια συνάρτηση $G(t)$ ώστε $F\big(q(t)\big) = G(t)$. Επομένως

$$\int_{q(\gamma)}^{q(\delta)} f(x)\, dx = F\big(q(\delta)\big) - F\big(q(\gamma)\big) = G(\delta) - G(\gamma) = \int_{\gamma}^{\delta} f\big(q(t)\big)q'(t)\, dt.$$

Αν η q είναι για παράδειγμα αύξουσα, τότε έχουμε μια διαισθητικά ξεκάθαρη εικόνα: Όταν το t μεταβάλλεται από το γ μέχρι το δ το

$x = q(t)$ μεταβάλλεται, αυξανόμενο και αυτό, από $q(\gamma)$ έως $q(\delta)$. Αν η q δεν είναι αύξουσα, γενικότερα μονότονη, τότε η διαισθητική εικόνα είναι πιο πολύπλοκη. Ας φανταστούμε το $\int_0^1 x\,dx$. Γράφοντας $x = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$, είναι φανερό και αναλυτικά και διαισθητικά, ότι

$$\Bigg(\int_0^1 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin t \cot t\,dt.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,dx &= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},\\
\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin t)(2t)'\,dt\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin y\,dy = \frac{1}{4}\big[-\cos y\big]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{4}\big[-(-1) - (-1)\big] = \frac{1}{2}\Bigg)
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τώρα $x = \sin t$, $0 \le t \le 5\pi/2$ (όχι $0 \le t \le \pi/2$), σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο θα έπρεπε πάλι να βρούμε:

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^{5\pi/2} \sin t \cos t\,dt$$

$$\left(= \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,dt + \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin t \cos t\,dt\right).$$

Αυτό πράγματι φαίνεται σωστό γιατί $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin t \cos t\,dt = 0$ όπως φαίνεται άμεσα από ένα απλό υπολογισμό. Στη γενική περίπτωση το τελευταίο ολοκλήρωμα θα αντιστοιχούσε σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_\gamma^\delta g'(t)\,dt$, όπου $g(\gamma) = g(\delta)$ (πάρτε $g(t) = F\big(q(t)\big)$, οπότε $g'(t) = F'\big(q(t)\big)q'(t) = f\big(q(t)\big)q'(t)$). Ένα τέτοιο όμως ολοκλήρωμα είναι φυσικά 0, διότι

$$\int_\gamma^\delta g'(t)\,dt = g(\delta) - g(\gamma) = 0.$$

(β) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

Θέτουμε $x = \sinh y$ οπότε $1 + x^2 = \cosh^2 y$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \cosh y \cosh y\,dy \\
&= \int \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 dy = \frac{1}{4}\int \left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\right) dy \\
&= \frac{1}{4}\int e^{2y}\,dy + \frac{1}{4}\int e^{-2y}\,dy + \frac{y}{2} + c \\
&= \frac{1}{4}\frac{e^{2y}}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{-2y}}{2} + \frac{y}{2} + c \\
&= \frac{1}{4}\sinh(2y) + \frac{y}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c.
\end{aligned}$$

Με τον μετασχηματισμό του Euler θα προχωρούσαμε ως εξής: $1 + x^2 = (y + x)^2$ δηλαδή $x = (1 - y^2)/(2y)$, οπότε

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \left(y + \frac{1-y^2}{2y}\right)\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy \\
&= -\int \frac{1+y^2}{2y}\frac{1+y^2}{2y^2}\,dy = -\frac{1}{4}\int \frac{1+2y^2+y^4}{y^3} \\
&= -\frac{1}{4}\int (y^{-3} + 2y^{-1} + y)\,dy \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{y^{-2}}{-2} + 2\log|y| - \frac{y^2}{2}\right) + c \\
&= \frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) - \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{8} + c
\end{aligned}$$

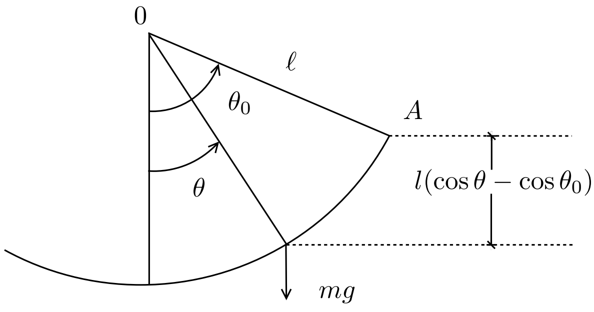
όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε το y με $\sqrt{1+x^2} - x$.

Πού κάναμε λάθος; Απάντηση: *πουθενά!* Απλούστατα οι δυο εκφράσεις που βρήκαμε διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά (αποδείξτε το).

5.9 Το απλό εκκρεμές

Τα ολοκληρώματα $\int R(x, \sqrt{p(x)}\,dx$ με $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 2, εν γένει δεν εκφράζονται με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Οι περιπτώσεις βαθμού 3 ή 4 οδηγούν στα λεγόμενα ελλειπτικά ολοκληρώματα. Η πολύ ενδιαφέρουσα θεωρία τους ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Ξεκινάει βασικά από τον Νορβηγό μαθηματικό N. Abel (αρχή 19ου αιώνα).

Σημειώνουμε ότι τέτοια ολοκληρώματα εμφανίζονται ακόμη και σε απλά, τουλάχιστον στη διατύπωση, προβλήματα όπως για παράδειγμα η εύρεση του μήκους ελλειπτικού τόξου ή η μελέτη της κίνησης του απλού εκκρεμούς. Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα το απλό εκκρεμές. Γράφουμε g για την επιτάχυνση της βαρύτητας ($\simeq 10\, m/sec^2$) και θεωρούμε τις δυνάμεις που προέρχονται από τριβή, αντίσταση αέρα κ.λπ.). Η θέση του εκκρεμούς καθορίζεται από τη γωνία $\theta = \theta(t)$. Περιμένουμε, από τη φυσική εποπτεία, ότι η συνάρτηση $\theta = \theta(t)$ θα είναι μια συνεχής περιοδική συνάρτηση, με περίοδο T ίση με το χρόνο που χρειάζεται η μάζα για να επιστρέψει στην αρχική της θέση, φθίνουσα για $0 \le t \le T/2$ και αύξουσα για $T/2 \le t \le T$.



Σχήμα 5.10

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι βρισκόμαστε στην αρχή της κίνησης, οπότε η θ είναι φθίνουσα. Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2}m\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\big(\cos\theta(t) - \cos\theta_0\big)\ell.$$

Η μαθηματική ερμηνεία του ότι η θ φθίνει στην αρχή της κίνησης θα είναι η υπόθεση ότι $d\theta/dt < 0$, οπότε

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}\\ &= -\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)}\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\frac{d\theta}{dt} = -2\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Η υπόθεση $\frac{d\theta}{dt} < 0$ σημαίνει ότι η $\theta = \theta(t)$ αντιστρέφεται και για την αντίστροφή της $t = t(\theta)$ θα έχουμε

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

για $-\theta_0 < \theta < \theta_0$, όπου θέσαμε $k = 1/\sin(\theta_0/2)$. Το t λοιπόν θα είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της παραπάνω συνάρτησης και επομένως ο προσδιορισμός του ανάγεται στην εύρεση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}.$$

Τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής λέγονται «ελλειπτικά α' είδους με τη μορφή του Lagrange».

Γράφοντας $\sin\theta = y$, το παραπάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} &= \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\end{aligned}$$

δηλαδή είναι πραγματικά της μορφής $\int R(x, \sqrt{p(x)})\, dx$, όπου το p είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού.

5.10 Ολοκλήρωση με τη βοήθεια του υπολογιστή

Ο αριθμητικός υπολογισμός ενός ορισμένου ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ όταν δίνονται οι αριθμοί α, β και η συνάρτηση f ακόμα και όταν δεν μπορούμε να βρούμε με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων τύπο για το $\int f(x)\, dx$, διευκολύνεται πολύ με την βοήθεια των υπολογιστών. Αυτό ήταν γνωστό από πολλά χρόνια και έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι για να γίνεται όσο το δυνατόν αποδοτικότερα αυτή η δουλειά. Θα πούμε λίγα λόγια στο τέλος του κεφαλαίου και θα μάθετε περισσότερα σε άλλα μαθήματα. Προς το τέλος της δεκαετίας του 1970 άρχισαν να χρησιμοποιούνται προγράμματα υπολογιστών τα οποία δεν δίνουν μόνο αριθμητικές τιμές αλλά εκτελούν και αόριστες ολοκληρώσεις σε όλες τις περιπτώσεις που αυτό είναι δυνατό να γίνει. Έτσι για παράδειγμα, όλες οι ολοκληρώσεις που μάθαμε (ρητών συναρτήσεων $R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}), \ldots$) μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια των υπολογιστών. Αυτό δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη, γιατί εννοιολογικά τουλάχιστον, όταν είναι γνωστή η θεωρία η υπόλοιπη εργασία είναι δουλειά ρουτίνας. Φαίνεται όμως ότι υπήρχαν αρκετά προβλήματα που έπρεπε να επιλυθούν μέχρι να γίνει δυνατή η χρήση των υπολογιστών γι' αυτό το σκοπό και αυτό δικαιολογεί τη χρονική καθυστέρηση σ' αυτό τον τομέα.

Ιδού η εντολή και η απάντηση ενός υπολογιστή (από το πρόγραμμα `macsyma`) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x\, dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$$

ανάλογου με αυτά που είδαμε στην ενότητα 5.7. (Η απάντηση δόθηκε σε λιγότερο από 1 sec!)

```
(c5)        integrate(x/((x-1)^2*(x+1)*(x^2+1)),x);
```

(d5) $\quad \dfrac{\mathtt{log(x^2+1)}}{\mathtt{8}} - \dfrac{\mathtt{log(x+1)}}{\mathtt{8}} - \dfrac{\mathtt{atan(x)}}{\mathtt{4}} - \dfrac{\mathtt{log(x-1)}}{\mathtt{8}} \dfrac{\mathtt{1}}{\mathtt{4x-4}}$

5.11 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα Riemann ορίστηκε για φραγμένες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Είναι πολύ χρήσιμο να επεκτείνουμε τον ορισμό και για συναρτήσεις (όχι αναγκαστικά φραγμένες) ορισμένες σε άλλης μορφής διαστήματα. Δίνουμε πρώτα τους σχετικούς ορισμούς:

Ορισμός 5.11.1 (i) *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\gamma,\beta]$, $\alpha < \gamma \le \beta$ και υπάρχει το όριο $\lim_{\gamma\to\alpha^+}\int_\gamma^\beta f$ τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha^+}^\beta f$ και ισούται με το παραπάνω όριο.*

(ii) *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,\gamma]$, $\alpha \le \gamma < \beta$ και υπάρχει το όριο $\lim_{\gamma\to\beta^-}\int_\alpha^\gamma f$, τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{\beta^-} f$ και ισούται με το παραπάνω όριο.*

(iii) *Αν υπάρχουν τα $\int_{\alpha^+}^\gamma f$ και $\int_\gamma^{\beta^-} f$ για κάποιο γ, $\alpha<\gamma<\beta$, τότε λέμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha^+}^\gamma f + \int_\gamma^{\beta^-}$. (Εύκολα φαίνεται ότι αν υπάρχει το $\int_{\alpha^+}^{\beta^-}$ τότε υπάρχουν τα $\int_{\alpha^+}^\delta$, $\int_\delta^{\beta^-}$ και για οποιοδήποτε άλλο δ, $\alpha<\delta<\beta$, και η τιμή τού $\int_{\alpha^+}^{\beta^-} f$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής του γ, $\alpha<\gamma<\beta$.)*

(iv) *Τα ολοκληρώματα $\int_\alpha^\infty$, $\int_{\alpha^+}^\infty$, $\int_{-\infty}^\beta$, $\int_{-\infty}^{\beta^-}$, $\int_{-\infty}^\infty$ ορίζονται ανάλογα. Για παράδειγμα, το $\int_\alpha^\infty f$ υπάρχει αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,M]$, $M>\alpha$ και υπάρχει το όριο $\lim_{M\to\infty}\int_\alpha^M f$, το οποίο ορίζεται ως η τιμή του $\int_\alpha^\infty f$.*

Μια τετριμμένη παρατήρηση σχετικά με τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι ότι η ύπαρξη, για παράδειγμα του $\int_\alpha^\beta f$ συνεπάγεται και την ύπαρξη των $\int_{\alpha^+}^\beta f$, $\int_\alpha^{\beta^-} f$, $\int_{\alpha^+}^{\beta^-} f$. Αν $\alpha<\gamma<\beta$ τότε

$$\left|\int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta f\right| = \left|\int_\alpha^\gamma f\right| \le (\gamma-\alpha)M,$$

όπου το M είναι ένα άνω φράγμα της $|f|$ στο $[\alpha,\beta]$ (το οποίο υπάρχει λόγω της ολοκληρωσιμότητας της f στο $[\alpha,\beta]$). Από την ανισότητα αυτή έπεται άμεσα ότι $\lim_{\gamma\to\alpha^+}\int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f$, δηλαδή $\int_\alpha^\beta f = \int_{\alpha^+}^\beta f$.

Οι ενδιαφέρουσες επομένως περιπτώσεις είναι εκείνες στις οποίες η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (ή το διάστημα είναι της μορφής $[\alpha,,\infty)$, $(-\infty,\beta]$, (α,∞), $(-\infty,\beta)$). Αυτό μπορεί να συμβεί

(i) όταν η f δεν είναι ορισμένη στο α η στο β ή και στα δύο ή

(ii) όταν η f δεν είναι φραγμένη.

Σημειώνουμε ακόμα ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα συναντιόνται πολύ συχνά και είναι σημαντικότατα τόσο σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών όσο και σε εφαρμογές.

Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογές θα δώσουμε ένα απλό αλλά σημαντικό κριτήριο για την ύπαρξη γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα το διατυπώσουμε στην περίπτωση διαστήματος της μορφής $[\alpha, \infty)$, αλλά ισχύει με τις προφανείς αλλαγές και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Αν $|f(t)| \leq g(t)$, $a \leq t < \infty$, και το $\int_\alpha^\infty g$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\int_\alpha^\infty f$, εφ' όσον η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, M]$, $M > \alpha$.

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει το $\int_\alpha^\infty \big(f(t) + g(t)\big)\, dt$. Πραγματικά, η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι $0 \leq f(t) + g(t) \leq 2g(t)$, άρα η $\Phi(M) = \int_\alpha^M \big(f(t) + g(t)\big)\, dt$ είναι αύξουσα συνάρτηση του M και φράσσεται προς τα πάνω από το $2\int_\alpha^\infty g$ (γιατί;). Συνάγουμε λοιπόν ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M \big(f(t) + g(t)\big)\, dt,$$

δηλαδή το $\int_\alpha^\infty (f+g)$. Εξ' υποθέσεως όμως υπάρχει και το $\lim_{M\to\infty} \int_\alpha^M g(t)\, dt$, άρα θα υπάρχει και το

$$\lim_{M\to\infty} \left(\int_\alpha^M (f+g) - \int_\alpha^M g \right) = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f,$$

δηλαδή θα υπάρχει το $\int_\alpha^\infty f$. □

Αφήνουμε στον αναγνώστη να διατυπώσει και να αποδείξει απλές ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων ανάλογες με αυτές που δείξαμε για τα απλά ολοκληρώματα (για παράδειγμα $\int_{\alpha^+}^\beta f + \int_{\alpha^+}^\beta g = \int_{\alpha^+}^\beta (f+g)$ κ.λπ.).

Αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως θα γράφουμε απλά $\int_\alpha^\beta f$ αντί για $\int_{\alpha^+}^\beta f$ ή $\int_\alpha^{\beta^-} f$.

Παραδείγματα: (α) $\int_{0^+}^1 x^a\, dx$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο «στο 0», γιατί η x^a δεν ορίζεται για $x = 0$ (εκτός για $a \in \mathbb{N}$, σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε σε αυτές τις σημειώσεις).

Αν $a = -1$ και $\varepsilon > 0$ τότε

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log x \,\Big|_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon = \log\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Άρα το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει. (Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε επίσης: «το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο ∞.)

Αν $a \neq 1$ και $\varepsilon > 0$, τότε

$$\int_\varepsilon^1 x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\,\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{a+1} - \frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}$$

και επομένως το ολοκλήρωμα υπάρχει και ισούται με $1/(a+1)$ αν $a > -1$, ενώ δεν υπάρχει (αν θέλετε, αποκλίνει στο ∞) για $a < -1$.

(β) $\int_1^\infty x^a\,dx$. Αν $a = 1$ και $M > 1$ τότε

$$\int_1^M \frac{dx}{x} = \log x\,\Big|_1^M = \log M \to \infty$$

καθώς $M \to \infty$ άρα το $\int_1^\infty x^a\,dx$ δεν υπάρχει.

Αν $a \neq 1$, τότε

$$\int_1^M x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\,\Big|_1^M = \frac{M^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

και επομένως το ολοκλήρωμα υπάρχει και ισούται με $-1/(a+1)$ αν $a < -1$, ενώ δεν υπάρχει (είναι ∞ αν $a > -1$.

Παρατήρηση 5.11.2 Τα δύο αυτά παραδείγματα χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε συνδυασμό με το κριτήριο που αποδείξαμε προηγούμενα. Για παράδειγμα, το

$$\int_1^\infty \frac{(\sin x)x}{x^2+1}\,dx$$

υπάρχει. Πραγματικά έχουμε, για $x \geq 1$,

$$\left|\frac{(\sin x)x}{x^2+1}\right| \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

και $-2 < -1$.

(γ) Το $\int_{0+}^\infty x^a\,dx$ δεν υπάρχει για κανένα a (γιατί;).

(δ) Ένα πολύ σημαντικό ολοκλήρωμα είναι το λεγόμενο «ολοκλήρωμα του Euler β' είδους» ή «Γάμμα συνάρτηση», που ορίζεται για όλα τα $s > 0$ ως εξής:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο και στο 0 λόγω του παράγοντα t^{s-1}.

Πρέπει να δείξουμε την ύπαρξη των $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$ και $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$. Για το πρώτο παρατηρούμε ότι $|t^{s-1}e^{-t}| \leq t^{s-1}$ (γιατί;) και χρησιμοποιούμε το παράδειγμα (α). Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι $t^{s-1}e^{-t} = (t^{s-1}e^{-t/2})e^{-t/2}$ και θα δείξουμε σε λίγο ότι η $t^{s-1}e^{-t/2}$ είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$, δηλαδή υπάρχει M ώστε $0 \leq t^{s-1}e^{-t/2} \leq M$ για $t \geq 1$. Με βάση το κριτήριό μας αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\int_1^\infty Me^{t/2}\,dt$ υπάρχει. Αυτό όμως είναι απλό διότι:

$$\int_1^N Me^{-t/2}\,dt = M\left(-2e^{-t/2}\right)\Big|_1^N = M\left(2e^{-1/2} - 2e^{-N/2}\right) \to 2Me^{-1/2}.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $f(t) = t^{s-1}e^{-t/2}$ είναι φραγμένη στο διάστημα $[1, \infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(t) \geq 0$ και

$$f'(t) = t^{s-2}e^{-t/2}\big((s-1) - \frac{1}{2}t\big).$$

Η $f'(t)$ είναι λοιπόν μη θετική για $t \geq 2(s-1)$ οπότε η $f(t)$ είναι φθίνουσα για $t \geq 2(s-1)$. Από την άλλη μεριά η $f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 2(s-1)]$ και επομένως είναι φραγμένη εκεί· έστω $|f(t)| \leq A$, $1 \leq t \leq 2(s-1)$. Συνολικά λοιπόν θα έχουμε $|f(t)| \leq A$ για όλα τα t με $t \geq 1$, όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε.

Παρατήρηση 5.11.3 Στο τελευταίο μέρος της απόδειξης ουσιαστικά δείξαμε ότι για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ $t^n e^{-t} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (γιατί;). Θα επανέλθουμε σε αυτή την πολύ σημαντική οριακή σχέση.

Ας πούμε με την ευκαιρία του παραδείγματος δυο λόγια παραπάνω για τη συνάρτηση $\Gamma(s)$, $s > 0$.

Έχουμε

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

άρα

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\,\Big|_0^\infty = 1.$$

(Δικαιολογήστε πλήρως την πιο πάνω γραμμή. Όσο πιο γρήγορα γίνει κτήμα σας το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου τόσο πιο γρήγορα θα μπορείτε και εσείς, *χωρίς να κάνετε λάθη*, να χρησιμοποιείτε αυτού του είδους τις συντομεύσεις.)

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη, πάλι με συντομεύσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^s(-e^{-t})'\,dt \\
&= t^s e^{-t}\,\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt \\
&= s\Gamma(s)
\end{aligned}$$

(και πάλι δικαιολογήστε πλήρως τις συντομεύσεις).

Η «συναρτησιακή» αυτή σχέση, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, δίνει αμέσως $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$, ... και γενικά (τετριμμένη επαγωγή) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια η $\Gamma(s)$ είναι μια συνάρτηση η οποία για ακέραιες θετικές τιμές του s συμπίπτει με το $(s-1)!$. Αυτό μόνο του δεν λέει πολλά πράγματα αν η Γ δεν έχει και άλλες καλές ιδιότητες, για παράδειγμα να είναι συνεχής, να έχει παραγώγους κ.λπ. Στην πραγματικότητα έχει όλες αυτές τις ιδιότητες. Ας δείξουμε για παράδειγμα ότι είναι συνεχής.

Έστω $s_0 > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε:

$$\begin{aligned}\Gamma(s) - \Gamma(s_0) &= \int_0^\infty (t^{s-1} - t^{s_0-1}e^{-t}\,dt \\ &= (s-s_0)\int_0^\infty t^{\xi-1}(\log t)e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

και επομένως

$$\Gamma(s) - \Gamma(s_0) \leq |s-s_0| \left|\int_0^\infty t^{\xi-1}(\log t)e^{-t}\,dt\right|,$$

όπου ξ είναι ένας αριθμός, που εξαρτάται εν γένει από το t, μεταξύ των s_0 και s.

Παίρνοντας $|s-s_0| < s_0/2$ και παρατηρώντας ότι η t^a είναι μονότονη συνάρτηση του a συνάγουμε ότι

$$(\log t)t^{\frac{1}{2}s_0-1}e^{-t} \leq (\log t)t^{\xi-1}e^{-t} \leq (\log t)t^{\frac{3}{2}s_0-1}e^{-t}$$

για $t > 0$ (γιατί;). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που δείξαμε την ύπαρξη του ολοκληρώματος $\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$ για $a > 0$, δείχνουμε και την ύπαρξη του $\int_0^\infty t^{a-1}(\log t)e^{-t}\,dt$ (δείξτε το). Φτάσαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η $|s-s_0| < s_0/2$ συνεπάγεται

$$|\Gamma(s) - \Gamma(s_0)| < |s-s_0| \left(\left|A\left(\frac{s_0}{2}\right)\right| + \left|A\left(\frac{3s_0}{2}\right)\right|\right),$$

όπου

$$A(a) = \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}(\log t)\,dt.$$

Η συνέχεια της συνάρτησης Γ έπεται εύκολα από την τελευταία ανισότητα.

Ερώτημα Μαντέψτε (όχι αποδείξτε) ποια σχέση υπάρχει μεταξύ $\Gamma(\alpha)$ και $A(\alpha)$, $\alpha > 0$; Αν θέλετε τώρα αποδείξτε αυτό που μαντέψατε.

5.12 Ο ορισμός του $\log x$ με τη βοήθεια του ολοκληρώματος

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή, που δείχνει πώς μπορούμε να ορίσουμε νέες συναρτήσεις με τη βοήθεια του ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα θα δώσουμε ένα δεύτερο ορισμό της συνάρτησης $\log x$. Ο ορισμός αυτός δεν είναι διαισθητικά τόσο ικανοποιητικός όσο ήταν ο ορισμός που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα είναι όμως απλούστερος. Ξεκινάμε από τον τύπο :

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x - \log 1 = \log x,$$

για $x > 0$, που ήδη γνωρίζουμε. Υποθέτουμε ότι δεν έχει οριστεί ακόμη η συνάρτηση $\log x$, οπότε χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο για ορισμό, δηλαδή ορίζουμε:

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t},$$

για $x > 0$.

Ο ορισμός είναι «καλός» γιατί σε κάθε διάστημα $[1, x]$ (ή $[x, 1]$ αν $x < 1$) η συνάρτηση $1/t$ είναι συνεχής (και έχει φραγμένη παράγωγο, αν δεν θέλετε να χρησιμοποιήσετε το αναπόδεικτο ακόμη θεώρημα για την ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων). Η συνάρτηση λοιπόν που ορίσαμε είναι και παραγωγίσιμη και ισχύει $(\log x)' = 1/x$ για $x > 0$ όπως φυσικά περιμέναμε.

Επειδή η $(\log x)'$ είναι παντού θετική, η συνάρτηση $\log x$ είναι αύξουσα και επομένως έχει αντίστροφο. Την αντίστροφο αυτή συμβολίζουμε με e^x και την ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση. Μια απλή παραλλαγή του θεωρήματος για την αντιστροφή μονότονων συναρτήσεων δείχνει ότι η e^x ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Πραγματικά αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty.$$

Οι δύο αυτές σχέσεις είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμες, διότι (ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

$$\log \frac{1}{x} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{d(\frac{1}{y})}{(\frac{1}{y})} = \int_1^x \frac{\frac{-1}{y^2}dy}{\frac{1}{y}} = -\int_1^x \frac{dy}{y}.$$

Για να δείξουμε ότι $\log x \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$ θεωρούμε ένα αριθμό $M > 0$. Πρέπει να βρούμε x_0 ώστε το $x > x_0$ να συνεπάγεται $\log x > M$. Γράφουμε $N = [M] + 1$ και παίρνουμε $x_0 = 2^{2N+1}$ θα έχουμε, αν $x > x_0$,

$$\log x > \log x_0 = \int_1^{2^{2N+1}} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{2^{2N}}^{2^{2N+1}} \frac{dt}{t}.$$

Για οποιοδήποτε όμως $k = 1, 2, \ldots$, η αντικατάσταση $2^k y = t$ δείχνει ότι

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{2^k dy}{2^k y} > \int_1^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

και επομένως

$$\log x > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 2N = N > M$$

που αποδεικνύει ότι πραγματικά $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.

Έχοντας ορίσει το e^x μπορούμε τώρα για τυχαίο $\alpha > 0$, να ορίσουμε $\alpha^x = e^{x \log \alpha}$.

Φυσικά οι παραπάνω «ταχυδακτυλουργίες» μόνες τους δεν είναι ικανοποιητικές. Θα πρέπει να δείξουμε, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι οι συναρτήσεις που ορίσαμε έχουν τις ιδιότητες που περιμένουμε. Σαν παράδειγμα ας δείξουμε ότι η συνάρτηση α^x, όπως την ορίσαμε τώρα για $x=2$ δίνει το γνωστό μας τύπο α^2.

Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $e^{2\log\alpha}=\alpha^2$, δηλαδή (από τον ορισμό της e^x σαν αντίστροφης του $\log x$) $2\log\alpha=\log(\alpha^2)$, ή ακόμα

$$2\int_1^\alpha \frac{dt}{t}=\int_1^{\alpha^2}\frac{dt}{t}.$$

Πραγματικά έχουμε (ολοκλήρωση με αντικατάσταση $\alpha y=t$)

$$\int_1^{\alpha^2}\frac{dt}{t}=\int_1^\alpha\frac{dt}{t}+\int_\alpha^{\alpha^2}\frac{dt}{t}=\int_1^\alpha\frac{dt}{t}+\int_1^\alpha\frac{\alpha dy}{\alpha y}=2\int_1^\alpha\frac{dt}{t}.$$

Παρατήρηση 5.12.1 Χρησιμοποιήσαμε την τελείως τετριμμένη (γιατί;) ιδιότητα

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(y)dy.$$

Για το λόγο αυτό μάλιστα όταν γράφουμε το ολοκλήρωμα$\int_\alpha^\beta f$ με τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

ονομάζουμε το x βουβή μεταβλητή.

Τελείως ανάλογα μπορούμε με τη βοήθεια του ολοκληρώματος να ορίσουμε και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η $\sin x$ σε μια «μικρή» περιοχή του 0 μπορεί να οριστεί σαν η αντίστροφη της συνάρτησης που δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

που φυσικά δεν είναι τίποτε άλλο παρά η συνάρτηση $\operatorname{Arcsin} x$. (Βρείτε μια τέτοια «μικρή» περιοχή. Εργαστείτε έντιμα· δεν έχουμε ακόμη ιδέα για τις ιδιότητες του $\sin x$, για παράδειγμα δεν ξέρουμε ότι η $\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\pi/2,\pi/2)$.

Δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο με αυτόν τον τρόπο ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σημειώνουμε μόνο, ότι αυτή η μέθοδος μας απαλλάσσει από τους γεωμετρικούς ορισμούς που δώσαμε στο κεφάλαιο 2.

5.13 Ασκήσεις

1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με φραγμένη παράγωγο στο (α, β) δηλαδή $|f'(x)| \leq M$ για $\alpha < x < \beta$. Θέτουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\beta-\alpha}{n}\left[f(\alpha) + f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right) + f\left(\alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{n}\right) + \cdots\right. \\ &\qquad \left.\cdots + f\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

   (α') Ποια είναι η γεωμετρική σημασία του α_n; (υποθέστε ότι $f \geq 0$.)

   (β') Δείξτε ότι $\lim \alpha_n = \int_\alpha^\beta f$.

   (γ') Ισχύει το β αν υποθέσουμε μόνο τη συνέχεια της f στο $[\alpha, \beta]$;

   (δ') Δείξτε ότι

$$\left|\alpha_n - \int_\alpha^\beta f\right| \leq \frac{M(\beta-\alpha)^2}{2}\frac{1}{n}$$

Παρατήρηση 5.13.1 Το (δ') δείχνει ότι όχι μόνο $\alpha_n \to \int_\alpha^\beta f$ αλλά ακόμη ότι η σύγκλιση είναι αρκετά «γρήγορη». Προσέξτε τον παράγοντα M στο β' μέλος που δείχνει ότι αν η παράγωγος παίρνει πολύ μεγάλες τιμές είναι πιθανόν να χρειαστούμε «πολύ μεγάλο» n για να προσεγγίσουμε καλά το $\int_\alpha^\beta f$ με το α_n. Πειραματιστείτε με τη συνάρτηση $f(x) = \sin^2(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, παίρνοντας $n = k$ για να πειστείτε. Περισσότερα για προσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων θα μάθετε σε άλλα μαθήματα.

2. (α') Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$ και αν υπάρχει το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx$ τότε υπάρχουν και τα (γενικευμένα) ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(xy)\,dx$ και $\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(xy)\,dx$ για οποιοδήποτε $y \in \mathbb{R}$. Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται μετασχηματισμός *Fourier* συνημιτόνου και ημιτόνου της f αντίστοιχα και έχουν πολλές εφαρμογές.

   (β') Υποθέστε επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ακόμη ότι για κάποιο $\alpha > 0, f(x) = 0$ για $|x| \geq \alpha$. Δείξτε ότι οι μετασχηματισμοί *Fourier* συνημιτόνου και ημιτόνου της f, σαν συναρτήσεις του y, τείνουν στο 0 για $y \to \infty$ καθώς και για $y \to -\infty$.

3. Γράφουμε $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

   (α') Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

   (β') Χρησιμοποιείστε το (3α') για να δείξετε ότι:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

και επομένως

$$\pi = 2\frac{[2n(2n-2)\cdots 2]^2}{(2n+1)[(2n-1)(2n-3)\cdots 3]^2}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ') Ξεκινώντας από τη σχέση: $\sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x$ και το (3α') δείξτε ότι:

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

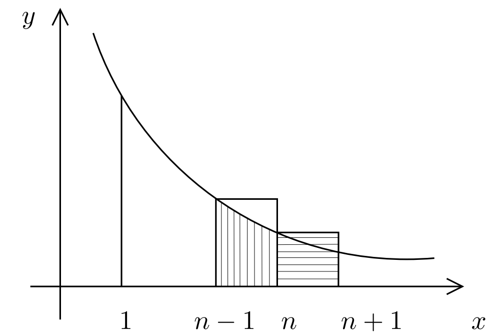
και επομένως $I_{2n}/I_{2n+1} \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

(δ') Συμπεράνετε τον επόμενο τύπο του Wallis (Σκοτσέζος μαθηματικός του 18ου αιώνα)

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(4n\left(\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}\right)^2\right).$$

4. (α') Εξετάζοντας το $\int_1^n \frac{dt}{t}$ δείξτε ότι $|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n| < 1$. Δείξτε ακόμη ότι η $\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ είναι φθίνουσα.

(Υπόδειξη: το οριζόντια διαγραμμισμένο εμβαδόν στο σχήμα 5.11 είναι μικρότερο από το κάθετα διαγραμμισμένο). Υπάρχει επομένως το $\lim \alpha_n$ το οποίο συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα γ ($\sim$ 0,5772156649...) και λέγεται σταθερά του Euler. Ερώτηση: είναι το γ ρητός ή άρρητος; Δοκιμάστε αν θέλετε να απαντήσετε σ' αυτή την ερώτηση αλλά μην επιμείνετε πολύ. Κανείς, μέχρι σήμερα, δεν μπόρεσε να βρει την απάντηση (και δοκίμασαν πολλοί και καλοί μαθηματικοί, ο Euler για παράδειγμα).



Σχήμα 5.11

(β') Συγκρίνοντας το $\log(n!)$ με το $\int_1^{n+1/2}\log x\,dx$ δείξτε ότι αν

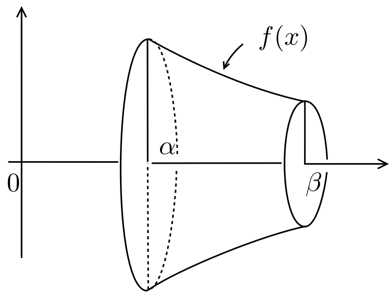
$$\alpha_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}e^{-n}$$

τότε υπάρχουν δύο θετικές σταθερές A, B ώστε $A < \alpha_n < B$. $\left(\text{Υπόδειξη: } \int_1^{n+1/2} = \int_1^{3/2} + \int_{3/2}^{5/2} + \cdots + \int_{n-1/2}^{n+1/2}\right)$

(γ') Ισχύει κάτι παραπάνω: $\lim \alpha_n = \sqrt{2\pi}$ (τύπος του Stirling). Για την απόδειξη αρκεί να δείξετε ότι η α_n είναι μονότονη και μετά να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του Wallis για να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} \to \sqrt{2\pi}.$$

5. Θεωρείστε μια θετική συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $\alpha \leq \beta$, και το στερεό που παράγεται με περιστροφή του γραφήματος της γύρω από τον άξονα Ox κατά γωνία 2π.



Σχήμα 5.12

(α') Δώστε επιχειρήματα που να καθιστούν ευλογοφανή τον τύπο:

$$V = \int_\alpha^\beta \pi(f(x))^2\,dx$$

για τον όγκο V αυτού του στερεού. (Δεν ζητάμε αυστηρή απόδειξη γιατί δεν έχουμε δώσει ακριβή ορισμό του όγκου ενός στερεού.)

(β') Εφαρμόστε τον τύπο αυτό για να βρείτε τους γνωστούς τύπους της στερεομετρίας για τους όγκους σφαιρικού τμήματος, κυλίνδρου, κώνου, κόλουρου κώνου.

6. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ του άξονα των x, του γραφήματος της $f(x) = x^4$ και της εφαπτομένης του γραφήματος στο σημείο $(2, 16)$.

7. Μια ράβδος με άκρα 0 και 1 έχει γραμμική πυκνότητα ($\equiv \lim_{h\to 0} m(x,h)/h$, όπου $m(x,h)$ η μάζα του τμήματος $[x, x+h]$) $\lambda(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Υποθέτουμε ότι η λ είναι R-ολοκληρώσιμη. Η συνολική μάζα M_1 ή ροπή $M_{1,\alpha}$ ως προς το σημείο α και η ροπή αδράνειας $M_{2,\alpha}$ ως προς το α δίνονται από τους τύπους:

- $M = \int_0^1 \lambda(x)\,dx$.

- $M_{1,\alpha} = \int_0^1 (x-\alpha)\lambda(x)\, dx$.
- $M_{2,\alpha} = \int_0^1 (x-\alpha)^2\lambda(x)\, dx$.

(α') Δείξτε ότι οι $M_{1,\alpha}$, $M_{2,\alpha}$ είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ότι οι $(x-\alpha)\lambda(x)$ και $(x-\alpha)^2\lambda(x)$ είναι R-ολοκληρώσιμες. (Υπόδειξη: δείξτε γενικότερα ότι «f, g R-ολοκληρώσιμες συνεπάγεται fg R-ολοκληρώσιμη». Για την απόδειξη παρατηρείστε ότι $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$ και δείξτε ότι «f R-ολοκληρώσιμη συνεπάγεται f^2 R-ολοκληρώσιμη». Αν $f \geq 0$ η τελευταία πρόταση είναι εύκολη, αν όχι, τότε υπάρχει M ώστε $f+M \geq 0$ και $f^2 = (f+M)^2 - M^2 - 2Mf$. Την απόδειξη αυτή την έμαθα από ένα παλιότερο συμμαθητή σας.)

(β') Αν $\lambda(x) \geq 0$ και $M \neq 0$ το σημείο $\beta = M_{1,0}/M$ λέγεται κέντρο βάρους της ράβδου. Δείξτε ότι $M_{2,\beta} = M_{2,0} - \beta^2 M$.

(γ') Εφαρμόστε τα παραπάνω για $\lambda(x) = |x - 1/2|$ και $\lambda(x) = \sin \pi x$.

8. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x^2)\, dx = 2\int_0^{\alpha} f(x^2)\, dx, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} x f(x^4)\, dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\, dx$$

και

$$\int_0^{k\pi} f(\cos^2 x)\, dx = k\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)\, dx,$$

$k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$.

9. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού α ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t+\alpha}}\, dt = 1;$$

10. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}e^{-2x}\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+t^2}\, dt.$$

11. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ με βάση τον ορισμό ή την άσκηση 1. (Υπόδειξη :

$$\sin x + \cdots + \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(k+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

12. Δείξτε ότι
$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt \leq \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Μπορούν να αντικατασταθούν οι παραπάνω ανισότητες με γνήσιες; *Παρατήρηση*: Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin t}{t}$ δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Μην προσπαθήσετε επομένως να το βρείτε.

13. Αν η συνάρτηση f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$, τότε
$$\lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta (f(x)\cos kx)\, dx = 0.$$

14. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν σ' αυτό το κεφάλαιο, βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\int (\alpha x+\beta)^3\, dx \qquad \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^k},\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \sqrt{x}\, dx \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x+\beta}}$$

$$\int \frac{dx}{1+\alpha^2 x} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$$

$$\int \tan^2 x\, dx \qquad \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int x^2 \cos x\, dx \qquad \int \operatorname{Arctan} x\, dx$$

$$\int \log(3x)\, dx \qquad \int x^3 e^{-x}\, dx$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3} \qquad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$$

$$\int x\sqrt{\alpha^2+x^2}\, dx \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} \qquad \int 3^x e^x\, dx$$

$$\int e^x \sqrt{\alpha-\beta e^x}\, dx \qquad \int \frac{x\, dx}{\cos^2 x^2}$$

$$\int 3^{\tanh x} \frac{dx}{\cosh^2 x} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (\text{θέστε } \; x = \sin^2 t),$$

$$\int x^2 e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{\alpha x} \sinh x\, dx$$

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\, dx$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4+9x^2}}$$

$$\int \frac{\sin 3x\, dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{\log \cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$$

$$\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$$

$$\int \cos(\log x)\, dx$$

$$\int |x|\, dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x}\, dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}\, dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2}\, dx$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int \sqrt[4]{x^2(1-x^2}\, dx$$

$$\int x \sin^2 x \cos^4 x\, dx$$

$$\int x e^x \cos x\, dx$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\int \frac{5x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$$\int \operatorname{Arcsin} \sqrt{x}\, dx$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sinh^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$$

$$\int \frac{\cos \alpha x \, dx}{\sqrt{\alpha^2 + \sin^2 \alpha x}}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 3x}$$

$$\int \sinh x \cosh x \, dx$$

$$\frac{2^x}{2 - 4^x} \, dx$$

$$\int \sqrt{e^x + 1} \, dx$$

Στα παραπάνω ολοκληρώματα καθορίστε τα διαστήματα στα οποία ισχύουν οι τύποι σας καθώς και τις προϋποθέσεις για τις παραμέτρους που εμφανίζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μερικές χρήσιμες εφαρμογές των όσων είδαμε μέχρι τώρα. Τα θέματα που θα εξετάσουμε είναι ουσιαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και μπορούν να διαβαστούν με οποιαδήποτε σειρά.

6.1 Απροσδιόριστες μορφές---κανόνες του de l' Hospital

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στα διαστήματα $(\beta, \alpha), (\alpha, \gamma)$, ότι οι $g(x)$ και $g'(x)$ είναι μη μηδενικές για $x \in (\beta, \alpha) \cup (\alpha, \gamma)$ και ακόμη ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Στην περίπτωση αυτή το $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x)$, μπορεί να υπάρχει, αλλά φυσικά δεν μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Ισχύει όμως το παρακάτω θεώρημα, γνωστό σαν ένας από τους κανόνες του de l'Hospital. (Γάλλος μαθηματικός του $17^{ου}$ αιώνα).

Θεώρημα 6.1.1 *Με τις προϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω, αν υπάρχει το*

$$\lim_{x\to\alpha} f'(x)/g'(x)$$

τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x)$, *και τα δύο όρια είναι ίσα. Το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που τα όρια είναι* $+\infty$ *ή* $-\infty$.

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι πολύ απλή:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)} = \frac{(f(x)-f(\alpha))/(x-\alpha)}{(g(x)-g(\alpha)(x-\alpha)} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

για x αρκετά κοντά στο α. Φυσικά κάθε άλλο παρά απόδειξη δώσαμε, αλλά δεν είναι δύσκολο να διορθώσουμε τα πράγματα. Πρώτα από όλα ορίζουμε $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και έτσι οι (νέες) συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς (γιατί;) στο (β, γ) και παραγωγίσιμες στο $(\beta, \alpha) \cup (\alpha, \gamma)$. Θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρόμοια δείχνουμε και την ισότητα των ορίων από αριστερά, επομένως και το θεώρημα. Με την επέκταση του πεδίου ορισμού των f και g που κάναμε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

και να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής στη μορφή του Cauchy. (Ελέγξτε τις υποθέσεις του θεωρήματος). Θα έχουμε: $f(x)/g(x) = f'(\xi)/g'(\xi)$, για κάποιο ξ, $\alpha < \xi < x$, από όπου είναι φανερό ότι αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to\alpha+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

θα υπάρχει και το $\lim_{x\to\alpha+} f(x)/g(x)$ και τα δυο όρια θα είναι ίσα (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Αν προσέξουμε την απόδειξη (και κάνουμε τις προφανείς αλλαγές στις προϋποθέσεις) βλέπουμε ότι έχουμε επίσης δείξει: «Η ύπαρξη του ορίου της $f'(x)/g'(x)$ από δεξιά (αριστερά) συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της $f(x)/g(x)$ από δεξιά (αριστερά) και την ισότητα των δυο ορίων». $\square$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και όταν $\alpha = +\infty$ ή $\alpha = -\infty$.

Θεώρημα 6.1.2 *Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (β, ∞), αν $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ στο (β, ∞), αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και αν το όριο*

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$$

υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$, και τα δύο όρια είναι ίσα.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $\beta > 0$. Γράφοντας τώρα $f_1(x) = f(1/x)$, $g_1(x) = g(1/x)$, $0 < x < 1/\beta$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση ορίου από δεξιά με $\alpha = 0$. $\square$

Παραδείγματα:

(i) $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x$ Έχουμε $(\sin x)'/x' = (\cos x)/1 \to 1,\ x \to 0$.

(ii) $(\log x)/(x-1), x \to 1$. Έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \frac{x^{-1}}{1} \to 1, \text{ για } x \to 1$$

άρα και $(\log x)/(x-1) \to 1$, για $x \to 1$.

(iii) $x^2 \sin(1/x)/\sin x$, $x \to 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 \sin(1/x))'}{(\sin x)'} &= \frac{2x \sin(1/x) + x^2(-x^{-2}) \cos(1/x)}{\cos x} \\ &= 2x \sin(1/x) \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ο όρος $2x \sin(1/x)/\cos(x))$ τείνει στο 0 για $x \to 0$, ενώ ο όρος

$$\frac{\cos(1/x)}{\cos x}$$

δεν συγκλίνει (γιατί;), άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}(x^2 \sin(1/x))/\sin x$. Από την άλλη μεριά, το αρχικό όριο $\lim_{x\to 0}(x^2 \sin(1/x))/\sin x$, σίγουρα υπάρχει, διότι

$$(x^2 \sin(1/x))/\sin x = x \left(\frac{x}{\sin x} \right) \sin \frac{1}{x} \to 0, \text{ αν } x \to 0$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει το «αντίστροφο» του κανόνα, δηλαδή η ύπαρξη του $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(iv) Ένα συνηθισμένο λάθος «αρχαρίων» είναι να εφαρμόζουνε τον κανόνα και όταν δεν ισχύει η προϋπόθεση: $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$. Φυσικά το αποτέλεσμα τους δεν είναι, εν γένει, σωστό.

Παράδειγμα: $(x+5)/(x+1) \to 5, x \to 0$, ενώ $(x+5)'/(x+1)' = 1/1 \to 1, x \to 0$.

(v) Πολλές φορές ο κανόνας του de l'Hospital οδηγεί πάλι σε «απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$», αλλά είναι δυνατόν να τον ξαναεφαρμόσουμε, δηλαδή να εξετάσουμε το όριο των πηλίκων $f''(x)/g''(x)$, $f'''(x)/g'''(x)$ κ.ο.κ. Ιδού ένα παράδειγμα:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \to 0.$$

Έχουμε

$$\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\sin x}{2x}, \quad \frac{(1-\cos x)''}{(x^2)''} = \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}, \text{ για } x \to 0,$$

και επομένως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

όταν $x \to 0$. Ανάλογος κανόνας ισχύει και όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ισχύουν επίσης οι παραλλαγές που διατυπώσαμε στις παρατηρήσεις. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την τυπική περίπτωση.

Θεώρημα 6.1.3 *Αν f, g είναι παραγωγίσιμες, $g'(x) < 0$ στο διάστημα (a, β),*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty,$$

και το $\lim_{x \to a^+} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)$ και τα δύο όρια είναι ίσα. (Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για όρια από αριστερά, για αμφίπλευρα όρια, για $a = +\infty$ ή $a = -\infty$, καθώς και όταν το $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$).

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και ας γράψουμε $A = \lim f'(x)/g'(x)$. Υπάρχει γ, με $\alpha < \gamma < \beta$, ώστε αν $\alpha < x \leq \gamma$ τότε $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ και

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy μας δίνει:

$$\frac{f(x) - f(\gamma)}{g(x) - g(\gamma)} = \frac{f'(\xi)}{g(\xi)} \text{ για κάποιο } \xi \text{ με } x < \xi < \gamma,$$

και όλα τα x με $\alpha < x < \gamma_1 (< \gamma)$, όπου το γ_1 έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο που η $\alpha < x < \gamma_1 (< \gamma)$ να συνεπάγεται $f(x) > f(\gamma)$ και $g(x) > g(\gamma)$ (αυτό είναι σίγουρα δυνατό, διότι $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \infty$, $x \to \alpha^+$).

Η ιδέα της απόδειξης είναι τώρα η εξής: «Επειδή $f(x) \to \infty$ και $g(x) \to \infty$, $x \to \alpha^+$, το πηλίκο $f(x)/g(x)$ θα είναι κοντά στο $(f(x) - f(\gamma))/(g(x) - g(\gamma))$, δηλαδή στο $f'(\xi)/g'(\xi)$ το οποίο είναι κοντά στο A, αν το x είναι αρκετά κοντά στο α». Ας μετασχηματίσουμε τώρα την ιδέα αυτή σε απόδειξη.

Για $\alpha < x < \gamma_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &= \frac{f(x) - f(\gamma)}{g(x) - g(\gamma)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - f(\gamma)/f(x)}{1 - g(\gamma)/g(x)}, \text{ ή} \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - g(\gamma)/g(x)}{1 - f(\gamma)/f(x)} = \\
&= A \frac{1 - g(\gamma)/g(x)}{1 - f(\gamma)/f(x)} + \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right) \frac{1 - g(\gamma)/g(x)}{1 - f(\gamma)/f(x)} \\
&= A - A \frac{g(\gamma)/g(x) - f(\gamma)/f(x)}{1 - f(\gamma)/f(x)} + \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right) \frac{1 - g(\gamma)/g(x)}{1 - f(\gamma)/f(x)},
\end{aligned}$$

οπότε, για $\alpha < x < \gamma_1$ έχουμε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq A \left| \frac{\frac{g(\gamma)}{g(x)} - \frac{f(\gamma)}{f(x)}}{1 - \frac{f(\gamma)}{f(x)}} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{1 - \frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\gamma)}{f(x)}} \right|.$$

Το δεξιά μέλος αυτής της ανισότητας συγκλίνει στο $\frac{\varepsilon}{2}$ για $x \to \alpha^+$, άρα υπάρχει γ_2, για $\alpha < \gamma_2 < \gamma_1$, ώστε για $\alpha < x < \gamma_2$ να έχουμε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon,$$

(γιατί;) που συμπληρώνει την απόδειξη. □

Οι δύο «απροσδιόριστες μορφές» που εξετάσαμε, 0/0 και ∞/∞, μας επιτρέπουν να βρούμε όρια και σε άλλες περιπτώσεις με απλούς μετασχηματισμούς. Οι πιο συνηθισμένες είναι οι περιπτώσεις των μορφών: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞. Με τις συνηθισμένες υποθέσεις για πεδία ορισμού οι μετασχηματισμοί αυτοί περιγράφονται συνοπτικά ως εξής:

- $0 \cdot \infty$. Αν $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ τότε $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$, που είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
- $\infty - \infty$. Αν $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$, τότε $f(x) - g(x) = (f(x) \cdot g(x))(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)})$, που είναι της μορφής $0 \cdot \infty$.
- 0^0. Αν $f(x) \to 0$ και $f(x) > 0$, $g(x) \to 0$ τότε $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ και η $g(x)\log f(x)$ είναι της μορφής $\infty \cdot 0$.
- 1^∞. Αν $f(x) \to 1$ και $g(x) \to \infty$, τότε $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ και η $g(x)\log f(x)$ είναι της μορφής $\infty \cdot 0$.

Παραδείγματα:

(i) $x^\alpha e^{-x}$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$. Εδώ έχουμε τη μορφή $\infty \cdot 0$ ή αν γράψουμε $x^\alpha e^{-x} = x^\alpha / e^x, \infty/\infty$. Έχουμε

$$\frac{(x^\alpha)'}{(e^x)'} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}.$$

Αν $\alpha \le 1$ τότε

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \frac{\alpha}{x^{\alpha-1}e^x} \to 0, \text{ για } x \to \infty$$

άρα $x^\alpha/e^x \to 0, x \to \infty$.

Αν $\alpha > 1$ συνεχίζουμε στις δεύτερες παραγώγους κ.ο.κ. Παίρνοντας $[\alpha]+1$ παραγώγους αν $\alpha \notin \mathbb{N}$ και α παραγώγους αν $\alpha \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-[\alpha]) \frac{x^{\alpha-[\alpha]-1}}{e^x} \right) = 0, \text{ αν } \alpha \notin \mathbb{N}$$

και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\alpha(\alpha-1)\dots 1 \frac{1}{e^x} \right) = 0, \text{ αν } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Σε όλες δηλαδή τις περιπτώσεις $x^\alpha/e^x \to 0$ για $x \to +\infty$. (Φυσικά η σχέση αυτή ισχύει και για $\alpha < 0$, χωρίς να χρειάζεται ο κανόνας του de l'Hospital για την απόδειξή της).

Η σημαντική οριακή σχέση αυτού του παραδείγματος εκφράζεται συνήθως ως εξής : «Το e^x τείνει στο ∞ γρηγορότερα από κάθε δύναμη του x».

Αν γράψουμε $e^x = y$ δηλαδή $x = \log y$, βλέπουμε ότι η παραπάνω οριακή σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{(\log y)^\alpha}{y} \to 0, \text{ για } y \to \infty$$

που εκφράζεται συνήθως ως εξής: «Οποιαδήποτε δύναμη του $\log x$ τείνει στο ∞ πιο αργά από το x»

(ii) $x^\beta \log x$, $x \to 0$, $\beta > 0$. Εδώ έχουμε τη μορφή $0 \cdot (-\infty)$. Γράφοντας

$$x^\beta \log x = \frac{\log x}{x^{-\beta}},$$

έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(x^{-\beta})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\beta x^{-\beta-1}} = -\frac{1}{\beta}x^\beta \to 0, \text{ όταν } x \to 0.$$

6.2 Ακρότατα συναρτήσεων

Ορισμός 6.2.1 *Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0 \in A$ με την ιδιότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) για όλα τα $x \in A$ δηλαδή, αν $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in A\}$ ($f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in A\}$), τότε η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο (ελάχιστο) της f στο A και συμβολίζεται με* $\max f$ ($\min f$).

Ας σημειώσουμε ότι το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι τιμή της f για περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα αν $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ τότε $\max f = 1 = \cos(2k\pi)$ και $\min f = -1 = \cos(2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Μια συνάρτηση, ακόμα κι αν είναι φραγμένη, μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο. Για παράδειγμα η

$$f(x) = x, \text{ για } 0 \leq x < 1,$$

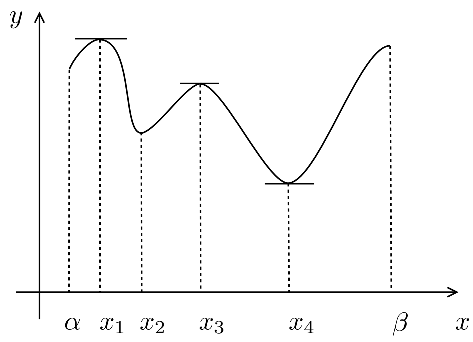
δεν έχει μέγιστο, διότι $\sup\{f(x) : 0 < x < 1\} = 1 \neq f(x)$ για κάθε x με $0 \leq x < 1$. Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμη και αν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα. Για παράδειγμα η

$$f(x) = \begin{cases} |x| & 0 < |x| < 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

δεν έχει ελάχιστο στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ διότι $\inf\{f(x) : 0 \leq x \leq 1\} = 0 \neq f(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Από την άλλη μεριά έχουμε δει ότι αν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα και η f συνεχής τότε η f έχει και μέγιστο και ελάχιστο.

Τα ακρότατα (δηλαδή μέγιστα ή ελάχιστα) για τα οποία μιλήσαμε ονομάζονται ακριβέστερα *ολικά* προς διάκριση από τα τοπικά τα οποία ονομάζονται ως εξής: Η τιμή $f(x_0)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ λέγεται *τοπικό μέγιστο* της f, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η περιοχή $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f και η τιμή της $f(x_0)$ να είναι ολικό μέγιστο της f περιορισμένης στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ δηλαδή $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x με $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Ανάλογα ορίζεται το τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα: Για τη συνάρτηση f του σχήματος 6.1 οι τιμές $f(x_1)$, $f(x_3)$ είναι τοπικά μέγιστα, οι τιμές $f(x_2)$, $f(x_4)$ τοπικά ελάχιστα, η τιμή $f(x_4)$ ολικό (και τοπικό) ελάχιστο και η τιμή $f(\beta)$ ολικό (αλλά όχι τοπικό) μέγιστο.



Σχήμα 6.1

Για συναρτήσεις που έχουν παράγωγο σ' ένα σημείο x_0, είναι πολύ εύκολο να βρούμε μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η τιμή $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο (ελάχιστο). Πραγματικά, το x_0 είναι αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f (γιατί;) και για αρκετά μικρά $h > 0$, θα έχουμε

$$\frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) \leq 0$$

και

$$\frac{1}{h}\big(f(x_0-h) - f(x_0)\big) \geq 0,$$

επομένως $D^+f(x_0) \leq 0$ και $D^-f(x_0) \geq 0$. Αν τώρα υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε

$$f'(x_0) = D^+f(x_0) = D^-f(x_0) = 0.$$

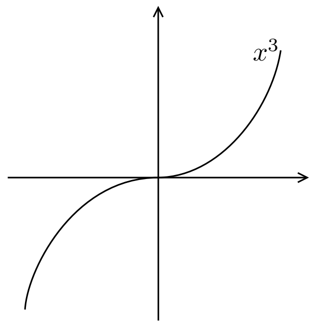
Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε και αν υποθέσουμε ότι το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου. *Για παραγωγίσιμες λοιπόν συναρτήσεις f ο μηδενισμός της $f'(x_0)$ είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 θέση τοπικού ακρότατου.*

Παράδειγμα: Η παράγωγος της συνάρτησης $\cos x$ που θεωρήσαμε προηγούμενα είναι η $\sin x$, η οποία πραγματικά μηδενίζεται στις θέσεις των ακροτάτων (που είναι αναγκαστικά και τοπικά):

$$\sin 2k\pi = \sin(2k+1)\pi = 0, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Από την άλλη μεριά η συνθήκη αυτή δεν είναι με κανένα τρόπο ικανή. Πραγματικά, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, έχει παράγωγο $3x^2$ η οποία μηδενίζεται για $x = 0$. Η τιμή $f(0) = 0$ όμως δεν είναι τοπικό ακρότατο διότι για οποιαδήποτε περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, έχουμε $f(x) > f(0) = 0$ για $0 < x < \varepsilon$ και $f(x) < f(0) = 0$ και $-\varepsilon < x < 0$.

Η γεωμετρική σημασία της αναγκαίας συνθήκης που βρήκαμε σημαίνει ότι αν το x_0 είναι σημείο ακρότατου και υπάρχει η εφαπτομένη του γραφήματος στο x_0, τότε αυτή η εφαπτομένη θα είναι οριζόντια. Αυτό φυσικά αναμενόταν και διαισθητικά.



Σχήμα 6.2

Στην περίπτωση που υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $f''(x_0)$ τότε είναι εύκολο να βρούμε και ικανές συνθήκες για να είναι το x_0 θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου. Πιο συγκεκριμένα

Πρόταση 6.2.2 *Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0, αν $f'(x_0) = 0$ και αν $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου (μεγίστου).*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα, ότι $f''(x_0) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

και επομένως υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad \text{(γιατί;)}$$

δηλαδή

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

και

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$$

Το θεώρημα της μέσης τιμής τώρα μας δίνει:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_1), \quad x_0 < \xi_1 < x,$$

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x_0 - x)f'(\xi_2), \quad x < \xi_2 < x_0,$$

και επομένως $f(x_0) \leq f(x)$ για $|x - x_0| < \delta$, δηλαδή το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου

Τελείως παρόμοια δείχνουμε ότι η συνθήκη $f''(x_0) < 0$ είναι ικανή συνθήκη για να είναι το x_0 θέση τοπικού μεγίστου. □

Παραδείγματα:

(i) Ας θεωρήσουμε πάλι την $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Η $f'(x) = -\sin x$ μηδενίζεται στα σημεία $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και

$$f''(x_k) = -\cos x_k = -\cos k\pi = \begin{cases} -1, & \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ 1, & \text{αν } k \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι θέσεις $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι θέσεις τοπικών μεγίστων και οι θέσεις $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, θέσεις τοπικών ελαχίστων. Φυσικά το αποτέλεσμα αυτό μπορούσαμε να βρούμε και απ' ευθείας παρατηρώντας ότι $-1 \leq \cos x \leq 1$ για όλα τα x.

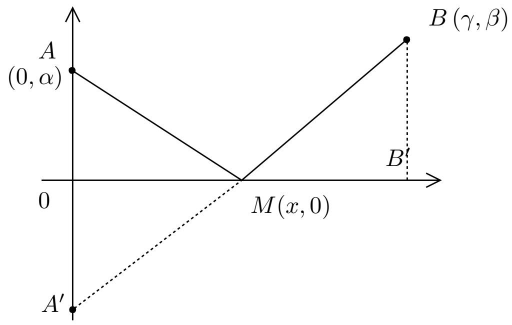
(ii) $f(x) = x^3$. Η $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται μόνο για $x = 0$, όπου όμως και η $f''(x) = 6x$ μηδενίζεται. Η ικανή συνθήκη που δώσαμε δεν δίνει λοιπόν κανένα συμπέρασμα. Από την άλλη μεριά όμως $f(x) < 0$ για $x < 0$, και $f(x) > 0$ για $x > 0$, και επομένως η θέση $x = 0$ δεν είναι θέση ούτε ελαχίστου, ούτε μεγίστου.

(iii) $f(x) = x^4$. Και πάλι $f'(0) = f''(0) = 0$, ενώ τώρα η θέση $x = 0$ είναι προφανώς θέση τοπικού ελαχίστου.

(iv) $f(x) = -x^4$. Και τώρα $f'(0) = f''(0) = 0$, ενώ η θέση $x = 0$ είναι θέση τοπικού μεγίστου.

(v) Θεωρούμε τα σημεία $A(0, \alpha)$, $B(\beta, \gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και ζητάμε ένα σημείο $M(x, 0)$ με $0 \leq x \leq \gamma$ ώστε το μήκος AMB να είναι ελάχιστο (σχήμα 6.3).

Η λύση του προβλήματος αυτού μας δίνει το σημείο προσπτώσεως μιας φωτεινής ακτίνας που ξεκινάει από το A, ανακλάται στον άξονα των x και περνάει από το B σύμφωνα με μια αρχή της οπτικής που είναι γνωστή με το όνομα Fermat. Μια απλή γεωμετρική κατασκευή δίνει αμέσως τη λύση: Το M είναι η τομή του άξονα των x και της ευθείας $A'B$, όπου $A'(0,-\alpha)$ το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα των x' (γιατί;). Από τα όμοια τρίγωνα $A'OM$ και MBB' θα έχουμε τώρα



Σχήμα 6.3

$$\frac{OM}{OA'} = \frac{MB'}{BB'}$$

δηλαδή

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\gamma - x}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

ή

$$x = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Ας λύσουμε τώρα το πρόβλημα και με τις τεχνικές που μάθαμε. Το μήκος AMB είναι φυσικά, μια συνάρτηση του x, $0 < x < \gamma$, ας την ονομάσουμε $f(x)$. Θα έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{\alpha^2 + x^2} + \sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}, \quad 0 < x < \gamma,$$

οπότε

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} - \frac{\gamma - x}{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση $f'(x) = 0$, δηλαδή την

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \frac{\gamma - x}{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}},$$

έχουμε $x^2\beta^2 = \alpha^2(\gamma - x)^2$, δηλαδή $\beta x = \alpha(\gamma - x)$, οπότε $x = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$. Φυσικά δεν τελειώσαμε. Πρέπει να δείξουμε ότι η θέση αυτή είναι θέση ελαχίστου στο (α, γ). Προφανώς

$$0 < \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\gamma < \gamma.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ παίρνει σε κάποια θέση x_0, $0 \leq x_0 \leq \gamma$ την ελάχιστη τιμή της. Αν η θέση αυτή βρίσκεται στο $(0,\gamma)$ τότε θα είναι και θέση τοπικού ελαχίστου, άρα θα πρέπει $f'(x_0)=0$. Είδαμε όμως ότι μόνο στη θέση $x=\alpha\gamma/(\alpha+\beta)$ του $(0,\gamma)$ μηδενίζεται η f'. Αναγκαστικά λοιπόν θα έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι η θέση $\alpha\gamma/(\alpha+\beta)$ είναι η θέση ολικού ελαχίστου. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι ούτε η τιμή $f(0)$, ούτε η $f(\gamma)$ είναι το ελάχιστο της f στο $[0,\gamma]$.

Ένας τρόπος να πετύχουμε αυτό το στόχο, θα ήταν να δείξουμε ότι

$$f(0) > f\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}\right)$$

και

$$f(\gamma) > f\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}\right)$$

(κάντε το!). Θα ακολουθήσουμε μια άλλη μέθοδο.

Η συνεχής συνάρτηση $f'(x)$ μηδενίζεται μόνο στο $\alpha\gamma/(\alpha+\beta)$ στο διάστημα $[0,\gamma]$ και επίσης

$$f'(0) = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} < 0, \quad f'(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} > 0,$$

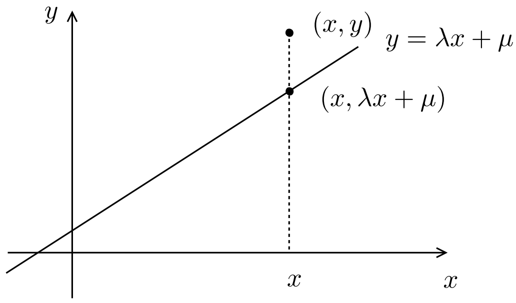
άρα η $f'(x)$ είναι αρνητική για $0<x<\alpha\gamma/(\alpha+\beta)$ και θετική για

$$\alpha\gamma/(\alpha+\beta) < x < \gamma$$

(γιατί;). Η συνάρτηση λοιπόν f φθίνει στο διάστημα $[0,\alpha\gamma/(\alpha+\beta)]$ και αυξάνει στο $[\alpha\gamma/(\alpha+\beta),\gamma]$ οπότε προφανώς η θέση $\alpha\gamma/(\alpha+\beta)$ είναι θέση ολικού ελαχίστου στο διάστημα $(0,\gamma)$.

6.3 Η γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία που δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των y. Θα δίνεται από μια εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\mu$, $-\infty<x<+\infty$. Τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται «πάνω» από την ευθεία αυτή ορίζονται φυσιολογικά σαν τα σημεία (x,y) για τα οποία $y>\lambda x+\mu$ δηλαδή τα σημεία (x,y) για τα οποία η τεταγμένη y είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του σημείου της ευθείας με την ίδια τετμημένη.

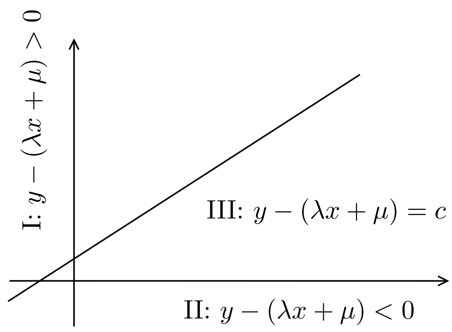


Σχήμα 6.4

Χωρίζεται έτσι το επίπεδο σε τρία μέρη:

$I = \{(x,y) : y > \lambda x + \mu\}$
$I\!I = \{(x,y) : y < \lambda x + \mu\}$
$I\!I\!I = \{(x,y) : y = \lambda x + \mu\}$.

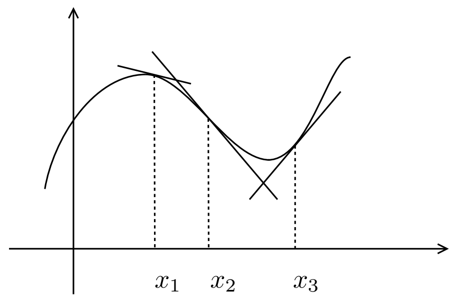
Αν $(x,y) \in I$ ή $(x,y) \in I\!I$ θα λέμε αντίστοιχα ότι το (x,y) βρίσκεται πάνω ή κάτω από την ευθεία $y = \lambda x + \mu$. Ας θεωρήσουμε τώρα το γράφημα μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα (α, β) και ας υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την θέση του γραφήματος της f ως προς την εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0).



Σχήμα 6.5

Αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : |x - x_0| < \delta\}$ να βρίσκεται πάνω (κάτω) από την εφαπτομένη στο x_0, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κάτω) στο σημείο x_0. Αν το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : 0 < x - x_0 < \delta\}$ βρίσκεται πάνω (κάτω) και το $\{(x, f(x)) : 0 < x_0 - x < \delta\}$ κάτω (πάνω) από την εφαπτομένη, τότε το x_0 λέγεται σημείο καμπής της f. (βλέπε σχήμα 6.6)

x_1 : κοίλα προς τα κάτω
x_2 : σημείο καμπής
x_3 : κοίλα προς τα πάνω



Σχήμα 6.6

Παραδείγματα:

(i) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$. Η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (τετριμμένο).

(ii) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. Το x_0 είναι σημείο καμπής (τετριμμένο).

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη παντού με

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 \cos \frac{1}{x} + 4x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Το $x_0 = 0$ δεν είναι σημείο καμπής και η f δεν στρέφει τα κοίλα ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω.

Πραγματικά $f'(0) = 0$ άρα η εφαπτομένη στο (0,0) είναι ο άξονας των x. Επίσης για οποιοδήποτε $\delta > 0$ η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο διάστημα $(0, \delta)$, δηλαδή το γράφημα της έχει σημεία και πάνω και κάτω από την εφαπτομένη (δώστε την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού).

Ας γυρίσουμε για λίγο στη γενική περίπτωση. Αν στο x_0 η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ για } \quad |x - x_0| < \delta$$

δηλαδή:

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \geq 0 = g(x_0) \text{ για } |x - x_0| < \delta.$$

Το να στρέφει λοιπόν τα κοίλα προς τα πάνω η f στο x_0 ισοδυναμεί με το να είναι το x_0 θέση τοπικού ελαχίστου για την $g(x)$, γεγονός που είναι και γεωμετρικά φανερό (γιατί;). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει δεύτερη παράγωγος $f''(x_0)$. Με αυτά που είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο και παρατηρώντας ότι $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0)$ συνάγουμε: Ικανή συνθήκη για να στρέφει η f τα κοίλα προς τα πάνω είναι η $f''(x_0) > 0$ και (παρόμοια) ικανή συνθήκη για να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω είναι η $f''(x_0) < 0$.

Αν το x_0 είναι σημείο καμπής τότε το x_0 δεν είναι θέση τοπικού ελαχίστου, ούτε τοπικού μεγίστου της g. Επειδή τώρα $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ θα πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $g''(x_0) = f''(x_0) = 0$ (γιατί;), δηλαδή: Αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο καμπής είναι να ισχύει $f''(x_0) = 0$.

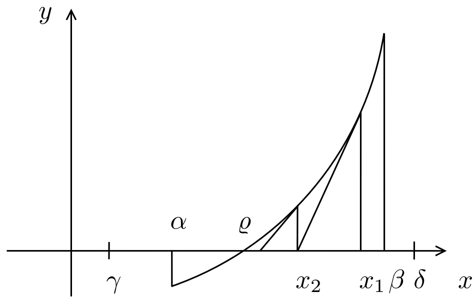
Η συνθήκη αυτή δεν είναι με κανένα τρόπο ικανή. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής το $x = 0$ (στρέφει προφανώς τα κοίλα προς τα πάνω), ενώ $f''(0) = 0$. Ένα πιο «άγριο» παράδειγμα είναι το παράδειγμα (iii) στη σελίδα 156.

Παρατήρηση 6.3.1 Λεπτομερέστερη εξέταση συνθηκών για τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής απαιτεί τον λεγόμενο τύπο Taylor τον οποίο θα εξετάσουμε αργότερα.

6.3α' Η μέθοδος του Newton για τη λύση εξισώσεων

Η εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης $f(x) = 0$ δεν είναι, εν γένει, εύκολη ακόμη και αν η f είναι απλή συνάρτηση, για παράδειγμα πολυώνυμο. Υπάρχουν πολλές προσεγγιστικές μέθοδοι για το σκοπό αυτό από τις οποίες θα περιγράψουμε μια γνωστή με το όνομα του Newton.

Έστω f μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης σε ένα διάστημα $(\gamma, \delta) \supset [\alpha, \beta]$ (βλέπε σχήμα 6.7). Ας Υποθέσουμε ακόμα ότι $f'(x) > 0$, $a \leq x \leq \beta$ και $f(a) < 0$, $f(\beta) > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα ϱ της f στο διάστημα $[a, \beta]$ (γιατί;) και σκοπός μας είναι να την προσεγγίσουμε.
Η ιδέα της μεθόδου είναι απλή. Ξεκινάμε από ένα σημείο x_1 «αρκετά κοντά» στη ρίζα ϱ και ονομάζουμε x_2 την τετμημένη της τομής της εφαπτομένης στο $(x_1, f(x_1))$ με τον άξονα των x. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μια ακολουθία x_1, x_2, $x_3, \ldots$, η οποία τουλάχιστον διαισθητικά περιμένουμε να συγκλίνει στη ζητούμενη ρίζα ϱ. Ας αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό.



Σχήμα 6.7

Ας ξεκαθαρίσουμε πρώτα τον όρο *αρκετά κοντά* που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Έστω M το μέγιστο της $|f''(x)|$ και m το ελάχιστο της $f'(x)$ στο $[a, \beta]$. Θα έχουμε $m > 0$ (γιατί;) και θα υποθέσουμε ότι $|x_1 - \varrho| < \frac{1}{2}\frac{m}{M}$. Θα δούμε ότι με αυτή την προϋπόθεση η ακολουθία x_k συγκλίνει και μάλιστα *αρκετά γρήγορα* στη ρίζα ϱ.

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι

$$x_{k+1} = x_k - fracf(x_k)f'(x_k)$$

(γιατί;) και επομένως θα υπάρχουν $\xi_k \in (\varrho, x_k)$, $\xi'_k \in (x_k, \xi_k)$ ώστε

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \varrho - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \varrho - \frac{f(x_k) - f'(\varrho)}{f'(x_k)} = \\
&= (x_k - \varrho)\left(1 - \frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right) = (x_k - \varrho)\left(\frac{f'(x_k) - f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right) = \\
&= (x_k - \varrho)\left[(x_k - \xi_k)\frac{f''(\xi'_k)}{f'(x_k)}\right] = (x_k - \varrho)\left[(x_k - \xi_k)\frac{f''(\xi'_k)}{f'(x_k)}\right],
\end{aligned}$$

οπότε

$$|x_{k+1} - \varrho| \leq |x_k - \varrho|\left(|x_k - \varrho|\frac{M}{m}\right).$$

Η υπόθεση

$$|x_1 - \varrho| < \frac{1}{2}\frac{m}{M}$$

μας δίνει άμεσα

$$|x_2 - \varrho| < \frac{1}{2}|x_1 - \varrho|.$$

$$|x_3 - \varrho| < |x_2 - \varrho|\left(|x_2 - \varrho|\frac{M}{m}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_1 - \varrho|$$

και γενικά (εύκολη επαγωγή)

$$|x_k - \varrho| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} |x_1 - \varrho|.$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι πραγματικά $x_k \to \varrho$ και μάλιστα το *λάθος* $x_k - \varrho$ τείνει στο 0 πιο γρήγορα από τη φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο $\left(\frac{1}{2}\right)^k |x_1 - \varrho|$. Στην πραγματικότητα η σύγκλιση είναι ακόμα ταχύτερη αλλά δεν θα επιμείνουμε στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα: Ακόμα και σε περιπτώσεις που έχουμε άλλες μεθόδους για την επίλυση μιας εξίσωσης, η μέθοδος του Newton μπορεί να αποδειχτεί καλύτερη.Ας λύσουμε για παράδειγμα την $f(x) = x^2 - 2 = 0$ στο διάστημα $[1,2]$ δηλαδή ας προσεγγίσουμε τη $\sqrt{2}$. Αρχίζουμε με $x_1 = 2$ και έχουμε

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = 1{,}5$$

$$x_3 = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \frac{2{,}25 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = \frac{4{,}25}{3} = 1{,}4166\ldots$$

Δεδομένου ότι $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ βλέπουμε ότι με δύο μόνο βήματα πετύχαμε προσέγγιση πολύ καλύτερη του 10^{-2}.

6.3β' Μια απλή διαφορική εξίσωση.

Η κατάστρωση και η λύση *διαφορικών εξισώσεων* αποτελεί μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του Απειροστικού Λογισμού. Μια τέτοια εξίσωση μελετήσαμε με αρκετή λεπτομέρεια στο πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή. Η συστηματική μελέτη αυτών των εξισώσεων θα γίνει σε άλλα μαθήματα. Στην παράγραφο αυτή θα περιοριστούμε σε μια απλή εξίσωση που εμφανίζεται πολύ συχνά. Η εξίσωση που θα εξετάσουμε είναι η $y' = ky$ όπου k ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Εδώ φυσικά ψάχνουμε για μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $y' = ky$. Αυτόματα λοιπόν, περιορίζουμε το ψάξιμο μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε, σύμφωνα με την ανάπτυξη της θεωρίας που παρουσιάσαμε το πεδίο ορισμού τους θα είναι ανοιχτό διάστημα.

Είναι φανερό ότι αν η $y = f(x)$ είναι λύση της εξίσωσής μας και η $c \cdot f(x)$, c σταθερά, είναι επίσης λύση. Τα όσα είπαμε για την εκθετική συνάρτηση μάς οδηγούν αμέσως στη λύση $y = e^{kx}$ (πραγματικά $(e^{kx})' = ke^{kx}$) και επομένως οι συναρτήσεις $ce^{kx}, c \in \mathbb{R}$, είναι λύσεις της εξίσωσης μας. Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχουν άλλες. Πιο συγκεκριμένα αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ ικανοποιεί την $y' = ky$ σε κάποιο διάστημα (a, β) τότε υπάρχει σταθερά c ώστε $y' = ce^{kx}$ για $x \in (a, \beta)$. (Ειδικότερα το συμπέρασμα αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε λύση σ' ένα διάστημα (a, β) μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ (γιατί;).

Ας δούμε καταρχάς πώς θα φτάσουμε τελείως φορμαλιστικά σε αυτό το συμπέρασμα.

Αν $f'(x) = kf(x)$ τότε $f'(x)/f(x) = k$ δηλαδή. $\log|f(x)| = kx + c_1$, c_1 σταθερά δηλαδή $|f(x)| = e^{c_1}e^{kx}$ και επομένως $f(x) = ce^{kx}$ όπου τώρα το c μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (ενώ το e_1^c παίρνει μόνο θετικές τιμές).

Το κύριο εμπόδιο για να μετασχηματίσουμε τον παραπάνω συλλογισμό σε απόδειξη είναι ότι δεν ξέρουμε á priori ότι $f(x) \neq 0$ και έτσι δεν μπορούμε να γράψουμε $f'(x)/f(x) = k$. Αντί να εξετάσουμε ξεχωριστά: περιπτώσεις ($f(x) = 0$, $f(x) \neq 0$) εκμεταλλευόμαστε το αναμενόμενο τώρα συμπέρασμα και δείχνουμε ότι «*Αν* $f'(x) = kf(x)$ $\alpha < x < \beta$, *τότε η* $f(x) \cdot e^{-kx}$ *είναι σταθερή στο* (α, β) *δηλαδή* $f(x) = ce^{-kx}$, c *σταθερά*».

Η απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot e^{-kx})' &= f'(x) \cdot e^{-kx} - ke^{-kx} \cdot f(x)\\ &= ke^{-kx} \cdot f(x) - ke^{-kx} \cdot f(x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

$\alpha < x < \beta$ οπότε πράγματι η $f(x) \cdot e^{-kx}$ σταθερά στο (α, β).

Ένα μοντέλο πληθυσμιακής εξέλιξης.

Ας γράψουμε $f(t)$ για τον πληθυσμό ενός συνόλου οργανισμών όπου η μεταβλητή t παριστάνει χρόνο. Παρόλο που η συνάρτηση f πρέπει να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές στο θεωρητικό μοντέλο που θα δώσουμε, θα τη θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση για την οποία μάλιστα θα υποθέσουμε ότι έχει παράγωγο για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι η τη χρονική στιγμή 0 ο πληθυσμός είναι γνωστός, έστω α, δηλαδή $f(0) = \alpha$. Η εξέλιξη του πληθυσμού εξαρτάται φυσικά από τον αριθμό των γεννήσεων και τον αριθμό των θανάτων που συμβαίνουν στον πληθυσμό. Μια—από βιολογική άποψη—εύλογη παραδοχή είναι ότι η διαφορά του αριθμού των γεννήσεων από τον αριθμό των θανάτων είναι για κάθε t ανάλογη με τον πληθυσμό $f(t)$. Η παραδοχή αυτή μεταφρασμένη σε μαθηματικούς όρους μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$f'(t) = kf(t),$$

όπου k μια σταθερά που εξαρτάται από τα βιολογικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού και του περιβάλλοντος στο οποίο αναπτύσσεται. Η συνάρτηση λοιπόν f θα είναι λύση του προβλήματος:

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = kf(t) \\ f(0) = \alpha \end{array}\right\}$$

Η $f'(t) = kf(t)$ δίνει $f(t) = ce^{kt}$ και η $f(0) = \alpha$ μας λέγει ότι: $c = \alpha$, δηλαδή $f(t) = \alpha e^{kt}$.

6.4 Ασκήσεις

1. Συμπληρώστε την απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος

$$\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$$

της §6.1.

2. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο (α, β) και αν

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty$$

δείξτε ότι η $f(x)$ έχει ελάχιστο στο (α, β).

3. Βρείτε έναν αριθμό α, αν υπάρχει, ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x^3} + \frac{\alpha}{x^2} \right).$$

4. Αν υπάρχει η $f''(x)$ στο (α, β) και είναι θετική τότε η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλαδή

$$f(\gamma x + \delta y) < \gamma f(x) + \delta f(y)$$

για όλα τα $x, y \in (\alpha, \beta)$ και $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma > 0$, $\delta > 0$ και $\gamma + \delta = 1$. Τι σημαίνει γεωμετρικά η παραπάνω ανισότητα; (Συγκρίνετε το γράφημα της f στο $[x, y]$ με την αντίστοιχη χορδή του γραφήματος).

5. Μια ραδιενεργός ουσία έχει μάζα $m(t)$, όπου t ο χρόνος. Η υπόθεση ότι η ουσία είναι ραδιενεργός σημαίνει ότι «χάνει μάζα με ρυθμό ανάλογο προς τη μάζα», δηλαδή $m'(t) = -k^2 \cdot m(t)$ για κάποια σταθερά k. Δείξτε ότι «ο χρόνος ημιζωής» της ουσίας, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να μείνει η μισή ρίζα, είναι ανεξάρτητος της αρχικής μάζας m_0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπληρωματα

Πολλά και σημαντικά θέματα της θεωρίας παραλήφθηκαν στην ανάπτυξη που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή σε μερικά από αυτά τα θέματα. Όπως και στο κεφάλαιο 6 τα θέματα είναι γενικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και μπορούν να διαβαστούν με οποιαδήποτε σειρά.

7.1 Τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος

Για λόγους πληρότητας δίνουμε τον κατάλογο των αξιωμάτων ενός διατεταγμένου σώματος. Το θέμα αυτό αναπτύσσεται διεξοδικά στο μάθημα της Άλγεβρας.

Ορισμός 7.1.1 *Ένα μη κενό σύνολο Σ λέγεται διατεταγμένο σώμα αν ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε ζευγάρι $x, y \in \Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του, που συμβολίζεται $x + y$ και λέγεται άθροισμα των x, y, ώστε για όλα τα $x, y, z \in \Sigma$ να έχουμε:*

(α') $(x + y) + z = z + (y + z)$.

(β') *Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται 0, ώστε:*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(γ') *Υπάρχει ένα στοιχείο, που συμβολίζεται $-x$, ώστε:*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(δ') $x + y = y + x$.

(ii) *Για κάθε $x, y \in \Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του, που συμβολίζεται xy και λέγεται γινόμενο των x, y, ώστε για όλα τα $x, y, z \in \Sigma$ να έχουμε:*

(α') $(xy)z = x(yz)$.

(β') *Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ διαφορετικό από το 0, που συμβολίζεται 1, ώστε:*

$$1x = x1 = x.$$

(γ') *Για κάθε $x \in \Sigma$ με $x \neq 0$ υπάρχει ένα στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται x^{-1}, ώστε:*

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

(δ') $xy = yx$.

(ε') $x(y+z) = xy + xz$.

(iii) *Υπάρχει ένα υποσύνολο P του Σ, που λέγεται σύνολο των θετικών στοιχείων του Σ, ώστε:*

(α') *Για κάθε $x \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς μια από τις τρεις σχέσεις: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.*

(β') *$x, y \in P$ συνεπάγεται $x + y \in P$ και $xy \in P$.*

Όποιος είναι λίγο εξοικειωμένος με τη σύγχρονη Άλγεβρα θα αναγνώρισε ότι τα αξιώματα (i)α', (i)β', (i)γ' χαρακτηρίζουν το Σ σαν ομάδα ως προς την πρόσθεση και τα (i)α', (i)β', (i)γ', (i)δ' σαν *Αβελιανή ομάδα*. Τα αξιώματα (i) και (ii) χαρακτηρίζουν το Σ σαν σώμα. Η τρίτη ομάδα των αξιωμάτων καθορίζει τα θετικά στοιχεία και επομένως τη *διάταξη*, αν ορίσουμε $x < y$ αν και μόνο αν $y - x \in P$.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης προκύπτουν από τα παραπάνω αξιώματα. Για παράδειγμα, «*το 0 είναι μοναδικό*». Πραγματικά, αν υπήρχε στοιχείο $0'$ ώστε $0' + x = x + 0' = x$ για όλα τα $x \in \Sigma$, τότε παίρνοντας $x = 0$ θα είχαμε: $0' + 0 = 0$ και $0' + 0 = 0'$ (αξίωμα 1β') οπότε και $0 = 0'$. Μια άλλη τετριμμένη ιδιότητα είναι η $1 > 0$, δηλαδή $1 - 0 = 1 \in P$. Πραγματικά, επειδή $1 \neq 0$ μένουν οι δύο περιπτώσεις $1 \in P$ ή $-1 \in P$. Αν $(-1) \in P$ τότε $1 = (-1)(-1) \in P$ που είναι άτοπο (αξίωμα 3). Συνάγουμε λοιπόν ότι $1 \in P$.

Άσκηση

(i) Δείξτε όσες και όποιες ιδιότητες θέλετε των διατεταγμένων σωμάτων.

(ii) Υπάρχει σώμα με 1 στοιχείο; με 2 στοιχεία; με 3 στοιχεία;

Ίδια ερώτηση για διατεταγμένα σώματα.

Όταν μελετάμε ένα αξιωματικό σύστημα μας ενδιαφέρει να δούμε αν τα αξιώματα είναι *συμβιβαστά*, δηλαδή ότι δεν προκύπτει καμία αντίφαση από αυτά. Μας ενδιαφέρει επίσης να δούμε αν τα αξιώματα είναι *ανεξάρτητα*, δηλαδή ότι κανένα από αυτά δεν είναι απόρροια των υπολοίπων. Είναι προφανές ότι αν υπάρχει ένα γνωστό σύνολο στο οποίο ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός από ένα, τότε το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.

Ας ελέγξουμε ότι *το επίμαχο αξίωμα της συνέχειας είναι πραγματικά ανεξάρτητο από τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος*. Πρέπει λοιπόν να βρούμε ένα διατεταγμένο σώμα στο οποίο δεν ικανοποιείται το αξίωμα της συνέχειας. Θεωρούμε το σύνολο $Q(x)$ των ρητών συναρτήσεων. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού το $Q(z)$ είναι πραγματικά σώμα. Ορίζουμε σαν θετικά στοιχεία του $Q(x)$ εκείνες τις ρητές συναρτήσεις

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m},$$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, για τις οποίες οι συντελεστές a_n και b_m είναι ομόσημοι.

Άσκηση:

(i) Δείξτε ότι με τον παραπάνω ορισμό το $Q(x)$ γίνεται διατεταγμένο σώμα (πρέπει πρώτα να δείξετε ότι ο ορισμός των θετικών στοιχείων είναι «καλός»).

(ii) Δείξτε ότι στο $Q(x)$ δεν ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα (άρα δεν ισχύει και το αξίωμα της συνέχειας).

7.2 Οι τομές του Dedekind

Όπως αναφέραμε στο 1$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο, ήδη από την αρχαιότητα είχαν ανακαλυφθεί οι άρρητοι αριθμοί. Είχε γίνει κατανοητό ότι οι ρητοί (τους οποίους θεωρούμε ότι καταλαβαίνουμε καλά) αφήνουν «κάποια κενά» (για παράδειγμα το $\sqrt{2}$) των οποίων η συμπλήρωση δημιουργεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το «συνεχές» όπως έλεγαν παλιότερα. Μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, από πλευράς ακρίβειας, η καλύτερη πληροφορία που είχαμε ήταν ο ορισμός της ισότητας δύο πραγματικών όπως δίνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη και αποδίδεται στον Εύδοξο (ο ορισμός του Εύδοξου ουσιαστικά έλεγε: $x = y$ *αν και μόνο αν* κάθε ρητός μικρότερος του x είναι και μικρότερος του y και κάθε ρητός μεγαλύτερος του x είναι και μεγαλύτερος y).

Μια σωστή τοποθέτηση των πραγμάτων έγινε για πρώτη φορά το 1872 από το Γερμανό Μαθηματικό R. Dedekind σε ένα βιβλιαράκι του με τον τίτλο «Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί». Η έννοια του πραγματικού αριθμού ή το «συνεχές» των πραγματικών υπήρχε φυσικά στο μυαλό των ανθρώπων και η διατύπωση ακριβούς ορισμού ίσως πρέπει να συγκριθεί με την ανακάλυψη και διατύπωση ενός βασικού νόμου της Φυσικής (φανταστείτε την ανακάλυψη του Θαλή για τον ηλεκτρισμό ή του Newton για την βαρύτητα). Ίσως κάτι τέτοιο να είχε ο Dedekind στο μυαλό του όταν, στο παραπάνω βιβλιαράκι, έγραφε:

> ...Οι πιο πολλοί άνθρωποι θα θεωρήσουν αυτή την ανακάλυψη *κοινοτυπία*. Η ανακάλυψη αυτή συνίσταται στο εξής: Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι κάθε σημείο ρ της ευθείας παράγει ένα διαχωρισμό της ευθείας σε δύο μέρη...

Η κεντρική ιδέα του Dedekind ήταν να ταυτίσει τους πραγματικούς αριθμούς με «τομές» των ρητών (τις λεγόμενες τομές του Dedekind).

Ορισμός 7.2.1 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ λέγεται τομή αν:*

(i) $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{Q}$

(ii) $x \in A$ *και* $y < x$ *συνεπάγεται* $y \in A$

(iii) *Το* A *δεν έχει μέγιστο στοιχείο (δηλαδή δεν υπάρχει* $x_0 \in A$ *ώστε* $x_0 \geq x$ *για όλα τα* $x \in A$*).*

Άσκηση. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πραγματικών που δώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο δείξτε ότι: «αν σε κάθε πραγματικό x αντιστοιχίσουμε το σύνολο $A_x = \{y \in \mathbb{Q}, y < x\}$ τότε η αντιστοιχία $x \to A_x$ είναι $1-1$ και επί από τους πραγματικούς στο σύνολο όλων των τομών των ρητών». Ποια είναι η αντίστροφη της «συνάρτησης» $\Phi : x \mapsto A_x$;

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε πράξεις και σχέση διατάξεως στο σύνολο των τομών και να δείξουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα των πραγματικών. Ορίζουμε για παράδειγμα «η τομή A είναι μικρότερη ή ίση της B αν $A \subset B$», «Το «άθροισμα» $A+B$ ορίζεται ως $\{\alpha+\beta : \alpha \in A$ και $\beta \in B\}$ κ.τ.λ.

Αν θέλετε, μπορείτε να συνεχίσετε μόνοι σας τη θεωρία (δεν υπάρχει πουθενά ουσιαστική δυσκολία) ή να ανατρέξετε στη βιβλιογραφία.

7.3 Ακολουθίες Cauchy

Για να ελέγξουμε αν μια ακολουθία $\{\alpha_n\}$ συγκλίνει, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, πρέπει να γνωρίζουμε το «υποψήφιο» όριο της α (για να εξετάσουμε τις απόλυτες τιμές των διαφορών $\alpha_n - \alpha$). Σε πολλές όμως περιπτώσεις είτε δεν γνωρίζουμε κανένα τέτοιο α είτε, ίσως, δεν ενδιαφερόμαστε για την τιμή του ορίου, αλλά το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ή όχι. Το παρακάτω σημαντικό θεώρημα μάς δίνει ένα κριτήριο γι' αυτές τις περιπτώσεις.

Θεώρημα 7.3.1 *Μια ακολουθία $\{\alpha_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι «βασική» (ή «Cauchy»), δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε για όλα τα n, $m \in \mathbb{N}$ να ισχύει:*

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$$

Όπως βλέπουμε στον ορισμό της βασικής ακολουθίας δεν υπεισέρχεται καθόλου το όριο α της $\{\alpha_n\}$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η α_n συγκλίνει και ότι $\alpha_n \to \alpha$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: $n > n_0$ συνεπάγεται $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon/2$. Αν λοιπόν $n, m > n_0$ τότε:

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_m| &= |\alpha_n - \alpha - (\alpha_m - \alpha)| \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

δηλαδή η $\{\alpha_n\}$ είναι βασική.

Το αντίστροφο είναι πιο ενδιαφέρον. Δείχνουμε πρώτα ότι: «Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη». Πραγματικά, από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας, με $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_n| \leq |\alpha_{n_0+1}| + |\alpha_n - \alpha_{n_0+1}| < |\alpha_{n_0+1}| + 1$$

Συνάγουμε λοιπόν ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε:

$$|\alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_{n_0+1}| + 1 = M$$

δηλαδή η $\{\alpha_n\}$ είναι φραγμένη.

Γνωρίζουμε τώρα ότι θα υπάρχει μια υπακολουθία $\{\alpha_{k_n}\}$ της $\{\alpha_n\}$ η οποία θα συγκλίνει, έστω ότι $\alpha_{k_n} \to \alpha$. Ισχυρίζομαι ότι και «ολόκληρη η ακολουθία $\{\alpha_n\}$ συγκλίνει στο α». Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι εύκολη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon/2$ για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m > n_0$. Υπάρχει επίσης $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_1$ συνεπάγεται $|\alpha_{k_n} - \alpha| < \varepsilon/2$. Αν τώρα $n > \max\{n_0, n_1\}$, τότε $k_n \geq n \geq n_0$ και επομένως:

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - \alpha_{k_n}| + |\alpha_{k_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε. □

Θεώρημα 7.3.2 (Κριτήριο Cauchy για ύπαρξη ορίου συνάρτησης) *Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της. Δείξτε ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι η εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα x, y του πεδίου ορισμού της f που είναι $\neq x_0$ να ισχύει:*

$$|x - x_0|, |y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Η ιδιότητα των πραγματικών ακολουθιών που δείξαμε στο πρώτο θεώρημα αυτής της παραγράφου, δηλαδή ότι κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει, ονομάζεται συνήθως **πληρότητα** του $\mathbb{R}$. Λέμε ακόμα ότι ο $\mathbb{R}$ είναι «πλήρης χώρος». Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε, από τη σκοπιά αυτή, το $\mathbb{Q}$ με το $\mathbb{R}$. «Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρης χώρος». Με αυτό φυσικά εννοούμε ότι υπάρχουν βασικές ακολουθίες $\{\alpha_n\}$ με $\alpha_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, οι οποίες δεν συγκλίνουν (στο $\mathbb{Q}$).

Προσέξτε: Μια τέτοια ακολουθία $\{\alpha_n\}$ μπορεί φυσικά να θεωρηθεί και σαν ακολουθία στο $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, επομένως συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$), αλλά κάλλιστα μπορεί να συμβεί το όριο της να μην ανήκει στο $\mathbb{Q}$.

Άσκηση

(i) Δώστε ένα παράδειγμα μιας βασικής ακολουθίας $\{\alpha_n\}$, με $\alpha_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, που δεν συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$.

(ii) Εξετάστε ποια από τα υποσύνολα $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ του $\mathbb{R}$ είναι πλήρη και ποια όχι, αφού πρώτα διατυπώσετε με ακρίβεια τι σημαίνει ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι πλήρες.

(iii) Αν $A \subset \mathbb{R}$ και το A είναι πλήρες, τότε κάθε σημείο συσσώρευσης του A ανήκει στο A.

7.4 Η δεκαδική παράσταση των πραγματικών αριθμών

Η δικαιολόγηση της συνηθισμένης δεκαδικής παράστασης των πραγματικών βασίζεται κατά ουσιαστικό τρόπο στο αξίωμα της συνέχειας. Ο τρόπος αυτός παράστασης των πραγματικών έχει επικρατήσει γιατί παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα στην εκτέλεση πράξεων.

Έστω x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Γράφουμε $x_0 = [x]$ και $y_0 = x - x_0$, οπότε θα έχουμε $x = x_0 + y_0$ με $0 \leq y_0 < 1$.

Αν γράψουμε $x_1 = [10y_0]$, $y_1 = y_0 - 10^{-1}[10y_0]$, θα έχουμε: $x = x_0 + x_1/10 + y_1$, με x_1 ακέραιο $0 \leq x_1 < 10$ και $0 \leq y_1 < 10^{-1}$. Ένας απλός επαγωγικός συλλογισμός δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ακεραίων $x_1, x_2, \ldots$ ώστε $0 \leq x_k < 10$, $k = 1, 2, \ldots$ και

$$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k} + y_k$$

με $0 \leq y_k < 10^{-k}$, για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

Άσκηση Συμπληρώστε την παραπάνω απόδειξη και δείξτε επιπλέον ότι $x_k = [10^k x] - 10[10^{k-1}x]$.

Συνήθως γράφουμε $x_0, x_1, \ldots, x_k$ αντί $x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k}$ και καλούμε αυτό τον αριθμό «δεκαδική προσέγγιση τάξης 10^{-k} του x». Είναι φανερό ότι η ακολουθία

$$\Delta_0 = x_0, \Delta_1 = x_0 + \frac{x_1}{10}, \ldots, \Delta_k = x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k} \cdots$$

συγκλίνει στον αριθμό x.

Αντίστροφα, αν μας δοθεί μια ακολουθία $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ όπου $\beta_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\beta_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j = 1, 2, \ldots$ τότε η ακολουθία

$$\alpha_k = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \cdots + \frac{\beta_k}{10^k}$$

συγκλίνει σε ένα μη αρνητικό αριθμό x. Προφανώς $\alpha_k \geq 0$ και η $\{\alpha_k\}$ είναι αύξουσα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $\{\alpha_k\}$ είναι φραγμένη προς τα πάνω.

Για τυχαίο όμως $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \cdots + \frac{\beta_k}{10^k} \leq \beta_0 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^k} \\
&= \beta_0 + \frac{9}{10}(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{k-1}}) \\
&= \beta_0 + \frac{9}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10}} < \beta_0 + \frac{9}{10}\frac{1}{\frac{9}{10}} = \beta_0 + 1
\end{aligned}$$

και έτσι το $\beta_0 + 1$ είναι ένα φράγμα της $\{\alpha_k\}$. Είναι ενδιαφέρον, και χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις, να παρατηρήσουμε ότι η παράσταση αυτή δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν δηλαδή πραγματικοί x με δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Έτσι για παράδειγμα έχουμε

$$1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$$

Πραγματικά:

$$\frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \longrightarrow 1,$$

όταν το n τείνει στο άπειρο. Περιπτώσεις σαν κι αυτή είναι ουσιαστικά οι μόνες, δηλαδή αν $\alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots = \beta_0{,}\beta_1\beta_2\ldots$ τότε ή

(i) $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots$ ή

(ii) για κάποιο $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $a_0 = b_0, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k = b_k + 1$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$, $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = 9$ ή

(iii) για κάποιο $k \in \{0, 1, 2, 3\ldots\}$, $a_0 = b_0 = \cdots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $b_k = a_{k+1}$, $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 9$.

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι δεν συμβαίνει το i. Ονομάζουμε k τον πιο μικρό από τους αριθμούς $0, 1, 2, \ldots$ για τον οποίο ισχύει $a_k \neq b_k$. Έστω $a_k > b_k$. Θα έχουμε

$$\frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+n}}{10^{k+n}} \geq \frac{a_k}{10^k} \geq \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k},$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_k}{10^k} + \frac{b_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{b_{k+n}}{10^{k+n}} &\leq \frac{b_k}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \cdots \frac{9}{10^{k+n}} = \\
&= \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{10^k} + \cdots + \frac{a_{k+n}}{10^{k+n}}\right) &\geq \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \geq \\
&\geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_k}{10^k} + \cdots + \frac{b_{k+n}}{10^{k+n}}\right).
\end{aligned}$$

Αν υπάρχει έστω και ένα $n > 0$ ώστε $a_{k+n} > 0$ τότε η αριστερή ανισότητα θα είναι γνήσια (γιατί;) και αν υπάρχει έστω και ένα $n > 0$ ώστε $b_{k+n} < 9$ τότε η δεξιά ανισότητα θα είναι γνήσια (γιατί;). Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, δηλαδή αν δεν ισχύει η (i) πρέπει να ισχύει η (ii) ή η (iii).

Άσκηση:

(i) Αν ένας αριθμός $x > 0$ έχει δεκαδική παράσταση της μορφής $x_0 x 1 x_2 \ldots x_n \ldots$ και $x_n \neq 0$ ενώ $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ τότε $x = x_0 x_1 \ldots x_n \ldots = x_0 x_1 \ldots x_{n-1} 9999 \ldots$.

(ii) Αν συμφωνήσουμε να γράψουμε όλες τις δεκαδικές παραστάσεις με ψηφία ίσα με 0 με τις ίσες τους παραστάσεις που τελειώνουν σε $9999\ldots$ τότε η δεκαδική παράσταση είναι μονοσήμαντη.

(iii) Αν $q = x_0 x_1 x_2 \ldots$ και $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, τότε υπάρχουν $k, n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{\lambda+n} = x_\lambda$ για όλα τα $\lambda \geq k$. (Τέτοιες δεκαδικές παραστάσεις λέγονται περιοδικές). Αντίστροφα κάθε τέτοια δεκαδική παράσταση ισούται με ένα ρητό αριθμό.

Υπόδειξη: Για το αντίστροφο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $10^n q - q = (10^n - 1)q$ είναι ακέραιος. Για το ευθύ γράφετε $q = \frac{A}{B}$, με $A, B \in \mathbb{N}$ και $B = 2^\nu 5^\rho \Gamma$, $\nu, \rho \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και ο Γ είναι πρώτος προς το 10. Το μικρό θεώρημα του Fermat μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός φυσικού n ώστε ο Γ να διαιρεί το $10^n - 1$. Αυτό είναι μια καλή επιλογή για το n που ζητάει η άσκηση.

7.5 Το πλήθος των πραγματικών αριθμών

Χαρακτηρίζουμε σαν πεπερασμένο ένα σύνολο, όταν μπορούμε να μετρήσουμε με ένα φυσικό αριθμό το πλήθος των στοιχείων του. Ακριβέστερα λέμε ότι το A είναι πεπερασμένο όταν υπάρχει αριθμός $N \in \mathbb{N}$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση Φ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ και πεδίο τιμών το A. Ο όρος $1-1$ σημαίνει ότι $\Phi(a) = \Phi(b) \Rightarrow a = b$, δηλαδή διαφορετικά στοιχεία έχουν διαφορετικές εικόνες, και ο όρος επί σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A είναι εικόνα ενός στοιχείου του $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

Φυσικά υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι πεπερασμένα για παράδειγμα τα $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, (δώστε απόδειξη).

Μεταξύ των απειρων συνόλων φαίνεται διαισθητικά τουλάχιστον ότι κάποια είναι «πιο άπειρα» από άλλα. Η ακριβής κατάταξη των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή και γενικότερα, οποιωνδήποτε συνόλων) ανάλογα με το «πλήθος» των στοιχείων τους έγινε στο τέλος του 19ου αιώνα από το Γερμανό μαθηματικό G. Cantor. Ο Cantor για τον σκοπό αυτό δημιούργησε τη λεγόμενη *υπερπεπερασμένη Αριθμητική* στην οποια λίγο πολύ έκανε πράξεις με «άπειρα». Ας σημειώσουμε εδώ ότι για αρκετό διάστημα πολλοί μαθηματικοί έβλεπαν με δυσπιστία τις έρευνες του Cantor. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα αποτέλεσμα σ' αυτή την κατεύθυνση θα συζητήσουμε με συντομία σ' αυτή την παράγραφο.

Θεώρημα 7.5.1 *Το σύνολο* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει* $1-1$ *και επί συνάρτηση από το* $\mathbb{N}$ *στο* $\mathbb{R}$.

Η διατύπωση του θεωρήματος περιέχει και τον ορισμό του *αριθμήσιμου* συνόλου (ακριβέστερα «άπειρου αριθμήσιμου»).

Γενικά λέμε ότι δυο σύνολα A, B είναι *ισοδύναμα* ή ότι έχουν τον ίδιο «πληθικό αριθμό» αν υπάρχει μια $1-1$ και επί συνάρτηση Φ από το A στο B. Αριθμήσιμα λοιπόν είναι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι ισοδύναμα με το $\mathbb{N}$.

Ήδη από το σημείο αυτό αρχίζουν τα παράδοξα. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο A των ζυγών φυσικών, $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ που «έπρεπε» να έχει λιγότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$, είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$. Αρκεί πράγματι να πάρουμε $\Phi : \mathbb{N} \to A$ με $\Phi(k) = 2k$. Με λίγο περισσότερη προσοχή μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο, ενώ «έπρεπε» να έχει περισσότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$. Με το $\mathbb{R}$ η κατάσταση είναι διαφορετική. Κατ' αρχάς η συνάρτηση $\Phi(x) = \tan\frac{\pi}{2}x$, $\Phi : (-1,1) \to \mathbb{R}$, δείχνει ότι το $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμο με το διάστημα $(-1,1)$ και η συνάρτηση $\Psi : (-1,1) \to (0,1)$ με $\Psi(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ δείχνει ότι το $(-1,1)$ είναι ισοδύναμο με το $(0,1)$, (γιατί;). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η απόδειξη θα κάνει ουσιαστική χρήση του αξιώματος της συνέχειας (με την μορφή της δεκαδικής παράστασης των πραγματικών) και θα βασίζεται σε ένα συλλογισμό που λέγεται *διαγώνιο συλλογισμός του Cantor*. Ο συλλογισμός αυτός χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα μαθηματικά.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε μία συνάρτηση Φ $1-1$ και επί από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$. Γράφουμε τη δεκαδική παράσταση των στοιχείων $\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(N), \ldots$, και για να μην έχουμε πρόβλημα με το ποια δεκαδική παράσταση παίρνουμε διαλέγουμε εκείνη που τελειώνει σε 9999
ldots, στις περιπτώσεις που υπάρχουν δυο τέτοιες παραστάσεις. Έστω λοιπόν

$$\begin{array}{c}
\Phi(1) = 0, x_1^1 x_2^1 x_3^1 \ldots x_n^1 \ldots \\
\Phi(2) = 0, x_1^2 x_2^2 x_3^2 \ldots x_n^2 \ldots \\
\vdots \\
\Phi(n) = 0, x_1^n x_2^n x_3^n \ldots x_n^n \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

οι δεκαδικές τους παραστάσεις.

Για να φτάσουμε σε άτοπο θα βρούμε ένα $x \in (0,1)$ ώστε $x \neq \Phi(n)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε λοιπόν τον αριθμό x με δεκαδική παράσταση $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, όπου τα $a_1, a_2, \ldots$ ορίζονται ως εξής: $a_k = 5$ αν $x_k^k \neq 5$ και $a_k = 6$ αν $x_k^k = 5$. Είναι σχεδόν τετριμμένο να δούμε ότι πραγματικά $x \in (0,1)$ και $x \neq \Phi(n)$, για κάθε n (δείξτε το). □

Παρατήρηση 7.5.2 Ένα ερώτημα, τελείως φυσιολογικό, που απασχόλησε τον Cantor μετά από αυτή την ανακάλυψη, ήταν το εξής: «Υπάρχουν άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία να μην είναι ισοδύναμα ούτε με το $\mathbb{N}$ ούτε με το $\mathbb{R}$;» Η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν τέτοια σύνολα είναι γνωστή σαν *υπόθεση* *του συνεχούς*. Η απάντηση που έδωσαν οι μαθηματικοί (ο Γερμανός K. Gödel το 1939 και ο Αμερικανός P. Cohen το 1963) θυμίζει λίγο την «Πυθία». Πιο συγκεκριμένα έδειξαν ότι με τις συνηθισμένες παραδοχές που κάνουμε στη θεωρία συνόλων, δεν πρόκειται να βρούμε καμία αντίφαση είτε αποδεχτούμε, είτε απορρίψουμε την υπόθεση του συνεχούς. Με άλλα λόγια, αν τα αξιώματα στα οποία στηριζόμαστε στην θεωρία των συνόλων είναι *συμβιβαστά* (δηλαδή δεν οδηγούν σε αντιφάσεις), τότε θα εξακολουθήσουν να είναι συμβιβαστά, αν προσθέσουμε σαν αξίωμα την υπόθεση του συνεχούς ή την άρνησή της.

7.6 Η συνέχεια Darboux για την παράγωγο

Ας θεωρήσουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b). Δεν υπάρχει a' priori λόγος να είναι συνεχής η παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης. Ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα του Darboux μας λέει όμως ότι οι ασυνέχειες της παραγώγου, αν υπάρχουν, είναι μόνο ουσιώδεις. Ακριβέστερα το θεώρημα είναι το εξής:

Θεώρημα 7.6.1 *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν $f'(c) \neq f'(d)$, $a < c < d < b$, και αν A είναι ένας αριθμός μεταξύ των $f'(c)$ και $f'(d)$, τότε υπάρχει ξ, $c < \xi < d$, ώστε $f'(\xi) = A$.*

Με άλλα λόγια το θεώρημα λέει ότι η f' ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος της μέσης τιμής (τέτοιες συναρτήσεις αναφέρονται σας Darboux συνεχείς).

Άσκηση:

(i) Δείξτε την ιδιότητα για τις ασυνέχειες της f' που αναφέραμε πιο πάνω σαν πόρισμα του θεωρήματος.

(ii) Δώστε ένα παράδειγμα μιας παραγωγίσιμης f' με *ασυνεχή* παράγωγο σε ένα διάστημα.

Υπόδειξη:

(i) Για κάθε διάστημα $I = (a, b)$, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g_I(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (a, b) \\ \left\{1 - \frac{4}{(b-a)^2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right\}^2 & x \in (a, b) \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

(ii) Θεωρείστε τώρα μία συνάρτηση, αφού δείξετε ότι υπάρχει, με παράγωγο

$$f(x) = \begin{cases} g_{I_n}(x), & x \in I_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}) \;\; n = 2, 3, \ldots \\ 0, & x \in (-1, 1) - \cup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{cases}$$

(iii) Ή ακολουθήστε το ii με την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $f'(c) < A < f'(d)$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $n > 0$ ώστε $n < d - c$ και αν

$$g(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}, \quad c \leq x \leq d - n,$$

τότε $g(c) < A < g(d-n)$.

Ας πιστέψουμε προς στιγμήν τον ισχυρισμό. Η g είναι προφανώς συνεχής, οπότε το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός αριθμού ξ, $c < \xi < d - n$, ώστε

$$g(\xi) = A \text{ δηλαδή } \frac{f(\xi+n) - f(\xi)}{n} = A.$$

Το θεώρημα τώρα της μέσης τιμής συνεπάγεται την ύπαρξη ενός ξ', $\xi < \xi' < \xi + n$, ώστε $f(\xi+n) - f(\xi) = f'(\xi') \cdot n$, δηλαδή $f'(\xi') = A$, όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε. □

Άσκηση:

- Δείξτε τον ισχυρισμό.
- Δείξτε ότι η συνθήκη $g'(x) >$ του θεωρήματος 6.1.3 (σελίδα 148) μπορεί να αντικατασταθεί με την $g'(x) \neq 0$. Εξετάστε την ισοδυναμία των δύο ορισμών.

7.7 Η ισοδυναμία των ορισμών του Darboux και του Riemann για το ορισμένο ολοκλήρωμα φραγμένων συναρτήσεων

Θα δείξουμε στην παράγραφο αυτή το αποτέλεσμα που αφήσαμε αναπόδεικτο στην ενότητα 5.2 δηλαδή:

Θεώρημα 7.7.1 *Οι ορισμοί του Riemann και του Darboux για το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

τέτοια ώστε
$$\left|\sum(f,\Delta,\Xi)-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$
για οποιαδήποτε επιλογή Ξ συμβιβαστή με την Δ.

Αν προς στιγμή υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής τότε θα υπάρχουν επιλογές $\Xi'=\left\{\xi_0',\ldots,\xi_{n-1}'\right\}$ και $\Xi''=\left\{\xi_0'',\ldots,\xi_{n-1}''\right\}$ ώστε $m_k=f(\xi_k')$ και $M_k=f(\xi'')$, $k=0,1,\ldots,n-1$ (γιατί;), και επομένως
$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi'')\quad \underline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi').$$
Από τις σχέσεις αυτές και την προηγούμενη ανισότητα έχουμε:
$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\Sigma(f,\Delta,\Xi')=$$
$$\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\int_a^b f-\left(\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_a^b f\right)\leq$$
$$\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\int_a^b f\right|+\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_a^b f\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$
ικανοποιείται δηλαδή το κριτήριο για την Darboux ολοκληρωσιμότητα.

Παρατηρούμε ακόμα ότι
$$\underline{\int_a^b} f\geq\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_a^b f+\int_a^b f\geq$$
$$\geq\int_a^b f-\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_a^b f\right|>\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{4},$$
και εντελώς παρόμοια
$$\overline{\int_a^b} f<\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{4}.$$
Από τις δύο αυτές ανισότητες έχουμε
$$\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{4}<\underline{f_a^b}\leq\overline{\int_a^b}<\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{4}$$
για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ και επομένως
$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b}=\int_a^b f.$$
Για την γενική περίπτωση (όταν η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής) παρατηρούμε ότι υπάρχουν επιλογές Ξ',Ξ'' «σχεδόν τόσο καλές» όσο και πριν. Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν $\Xi'=\{\xi_0',\ldots,\xi_{n-1}'\}$, $\Xi''=\{\xi_0'',\ldots,\xi_{n-1}''\}$ ώστε
$$m_k>f(\xi_k')-\frac{\varepsilon}{4(b-a)},\quad M_k<f(\xi_k'')+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

και επομένως

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) >$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi'_k)(x_{k+1}-x_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) =$$

$$\Sigma(f,\Delta,\Xi') - \frac{\varepsilon}{4}$$

και παρόμοια

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) < \Sigma(f,\Delta,\Xi'') + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Από το σημείο αυτό και μετά η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια (συμπληρώστε την).

Η άλλη κατεύθυνση, δηλαδή ότι η Darboux ολοκληρωσιμότητα συνεπάγεται Riemann ολοκληρωσιμότητα είναι πιο ενδιαφέρουσα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τώρα μία διαμέριση Δ ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ ώστε $|\Sigma(f,\Delta',\Xi) - I| < \varepsilon$ για όλες τις διαμερίσεις Δ' με πλάτος $d(\Delta') < \delta$ και όλες τις επιλογές Ξ, όπου φυσικά παίρνουμε $I = \underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$.

Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι η Δ' είναι εκλέπτυνση της Δ (που είναι εν γένη λάθος, γιατί όποιο και να είναι το δ υπάρχουνε Δ' με $d(\Delta') < \delta$ που δεν είναι εκλεπτύνσεις της Δ) τότε η συνέχεια είναι εύκολη. Πραγματικά σε μια τέτοια περίπτωση θα είχαμε:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \le \underline{\Sigma}(f,\Delta') \le \Sigma(f,\Delta',\Xi) \le \overline{\Sigma}(f,\Delta') \le \overline{\Sigma}(f,\Delta)$$

και επίσης

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \le I \le \overline{\Sigma}(f,\Delta),$$

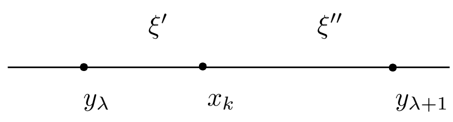
δηλαδή και οι δύο αριθμοί I και $\Sigma(f,\Delta,\Xi)$ βρίσκονται στο διάστημα

$$[\underline{\Sigma}(f,\Delta), \overline{\Sigma}(f,\Delta)],$$

άρα

$$|\Sigma(f,\Delta',\Xi) - I| \le \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Θα φτάναμε στην εύκολη αυτή περίπτωση, αν για παράδειγμα προσθέταμε στην Δ' όσα σημεία της λείπουν για να γίνει εκλέπτυνση της Δ. Τα σημεία αυτά θα είναι το πολύ n (όσα τα διαιρετικά σημεία της Δ). Ας πούμε ότι η Δ' είναι η $\{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$. Κάθε φορά που προσθέτουμε ένα διαιρετικό σημείο έστω το x_k, $y_\lambda < x_k < y_{\lambda+1}$ (βλέπε σχήμα 7.1) το $\Sigma(f,\Delta',\Xi)$ μεταβάλλεται κατά



Σχήμα 7.1

$$-(y_{\lambda+1} - y_\lambda)f(\xi_\lambda) + (x_k - y_\lambda)f(\xi') + (y_{\lambda+1} - x_k)f(\xi''),$$

όπου ξ', ξ'' δύο σημεία των διαστημάτων $[y_\lambda, x_k]$, $[x_k, y_{\lambda+1}]$ αντίστοιχα. Η μεταβολή αυτή θα είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση από

$$\big(|y_{\lambda+1} - y_\lambda| + |x_k - y_\lambda| + |y_{\lambda+1} - x_k|\big)M \leq 3d(\Delta')M,$$

όπου M ένα άνω φράγμα της $|f(x)|$ στο $[a,b]$ (θυμηθείτε ότι η f υποτίθεται φραγμένη στο $[a,b]$, άρα και η $|f|$ είναι φραγμένη), δηλαδή $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Η συνολική λοιπόν μεταβολή του $\Sigma(f, \Delta', \Xi)$ θα είναι κατά απόλυτη τιμή το πολύ $3nMd(\Delta')$. Αν λοιπόν διαλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2\cdot 3nM}$, τότε για κάθε διαμέριση Δ' με $d(\Delta') < \delta$ θα υπάρχει μια εκλέπτυνση Δ'' της Δ', η οποία θα είναι και εκλέπτυνση της Δ ώστε

$$|\Sigma(f, \Delta'', \Xi'') - \Sigma(f, \Delta', \Xi)| \leq 3d(\Delta')nM < 3nM \cdot \frac{\varepsilon}{2\cdot 3nM} = \frac{\varepsilon}{2},$$

όποιες και να είναι οι επιλογές Ξ', Ξ''. Για την $\Sigma(f, \Delta'', \Xi'')$ όμως δείξαμε ότι

$$|\Sigma(f, \Delta'', \Xi'') - I| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες συνάγουμε ότι

$$|\Sigma(f, \Delta', \Xi) - I| \leq |\Sigma(f, \Delta', \Xi') - \Sigma(f, \Delta'', \Xi'')| + |\Sigma(f, \Delta'', \Xi'') - I| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. □

Άσκηση: Δείξτε όσο πιο πολλές ιδιότητες του ολοκληρώματος μπορείτε βασιζόμενοι στον ορισμό του Riemann.

7.8 Ομοιόμορφη συνέχεια

Στην ενότητα 5.3 (σελίδα 99) αναφέραμε χωρίς απόδειξη το εξής:

Θεώρημα 7.8.1 *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό.*

Το θεώρημα αυτό ήταν το κλειδί στην απόδειξη της Riemann ολοκληρωσιμότητας των συνεχών συναρτήσεων.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε κατ' αρχάς ότι η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα x, y που ανήκουν στο $[a,b]$ να ισχύει

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα υπάρχει τότε $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x, y \in [a, b]$ με την ιδιότητα $|x - y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Διαλέγουμε διαδοχικά για δ τους αριθμούς $\frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots$, οπότε βρίσκουμε $x_k, y_k \in [a, b]$ ώστε:

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \text{ και } |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Η ακολουθία $\{x_k\}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία της, η οποία συγκλίνει. Το όριο της θα είναι αναγκαστικά σημείο του $[a, b]$. Τονίζουμε ότι στο σημείο αυτό χρησιμοποιείται ουσιαστικά η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα (γιατί;). Η ακολουθία $\{y_{k_n}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{y_n\}$ η οποία είναι φραγμένη. Υπάρχει επομένως υπακολουθία της, έστω η $\{y_{k_{n_\varrho}}\}$ η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο $y \in [\alpha, \beta]$. Η $\{x_{k_{n_\varrho}}\}$, σαν υπακολουθία της x_{k_n}, θα συγκλίνει επίσης στο x. Για να αποφύγουμε τους πολλούς δείκτες, γράφουμε $\overline{x}_\varrho = x_{k_{n_\varrho}}, \overline{y}_\varrho = y_{k_{n_\varrho}}, \varrho = 1, 2, \ldots$ και έχουμε:

$$|\overline{x}_\varrho - \overline{y}_\varrho| < \frac{1}{k_{n_\varrho}} < \frac{1}{\varrho}$$

(γιατί;) και $|f(\overline{x}_\varrho) - f(\overline{y}_\varrho)| \geq \varepsilon, \ \varrho \in \mathbb{N}$.

Η πρώτη ανισότητα δείχνει ότι $x = \lim \overline{x}_\varrho = \lim \overline{y}_\varrho = y$. Η συνέχεια της f στα σημεία x, y συνεπάγεται ότι $f(\overline{x}_\varrho) \to f(x)$ και $f(\overline{y}_\varrho) \to f(y) = f(x)$. Συνάγουμε λοιπόν ότι $|f(\overline{x}_\varrho) - f(\overline{y}_\varrho)| \to |f(x) - f(y)| = 0$, που προφανώς αντιφάσκει με τις ανισότητες $|f(\overline{x}_\varrho) - f(\overline{y}_\varrho)| \geq \varepsilon$ και $\varepsilon > 0$. □

7.8α' Σχόλια και ασκήσεις

(i) Αν σκεφτούμε λίγο την απόδειξη θα δούμε ότι η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους:

(α') Το $[\alpha, \beta]$ είναι φραγμένο σύνολο (για να υπάρχουν υπακολουθίες που συγκλίνουν) και

(β') Το όριο οποιασδήποτε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του $[\alpha, \beta]$ ανήκει στο $[\alpha, \beta]$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι τα σημεία συσσώρευσης του $[\alpha, \beta]$ ανήκουν στο $[\alpha, \beta]$ (γιατί;).

Υποσύνολα όπως το $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την (ii) υπάρχουν και άλλα εκτός από κλειστά διαστήματα (για παράδειγμα το ίδιο το $\mathbb{R}$, το σύνολο $[0, 1] \cup [5, 6]$, το σύνολο $[3, \infty), \ldots$). Τα σύνολα αυτά λέγονται *κλειστά* και τα κλειστά σύνολα που είναι επίσης φραγμένα λέγονται *συμπαγή*. Η τελευταία αυτή έννοια γενικεύεται με πολλούς τρόπους και είναι πολύ χρήσιμη στα Μαθηματικά. Το θεώρημα λοιπόν που δείξαμε μπορεί να γενικευτεί και ως εξής:

Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό.

(ii) Για να βεβαιωθούμε ότι η υπόθεση της «συμπάγειας» δεν μπορεί να παραληφθεί προτείνουμε τα παραδείγματα:

(α')

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad 0 < x \leq 1.$$

Το $(0,1]$ δεν είναι κλειστό, διότι το 0 είναι σημείο συσσώρευσής του αλλά δεν ανήκει σ' αυτό. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} > \frac{1}{\varepsilon}$$

για όλα τα $x \in (0,1]$ με $|x| = |2x - x| < \varepsilon/2$, δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β') $f(x) = x^2, -\infty < x < \infty$. Το $(-\infty, \infty)$ προφανώς δεν είναι φραγμένο.

(iii) Αν η f είναι συνεχής στο $A \subset \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta = \delta(x) > 0$ ώστε

$$|y - x| < \delta(x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Γράψαμε $\delta = \delta(x)$, γιατί εν γένει το δ εξαρτάται από το x. Ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας δεν σημαίνει τίποτε άλλο παρά ότι μπορούμε να επιλέξουμε το δ ανεξάρτητο του x , δηλαδή, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, το ίδιο δ για όλα τα $x \in A$. Δείξτε ότι αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη: για κάθε $\varepsilon > 0$, $\inf\{\delta_0(x) : x \in A\} > 0$ όπου

$$\delta_0(x) = \sup\{\delta > 0 : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

(iv) Φυσικά υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις με μη συμπαγή πεδία ορισμού οι οποίες είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Δώστε παραδείγματα με πεδία ορισμού: $\mathbb{R}$, $(-1,1)$, $[0,\infty)$.

7.9 Ο τύπος του Taylor.

Υπάρχει μια πολύ απλή σχέση μεταξύ των συντελεστών $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ενός πολυωνύμου $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ και των παραγώγων της f στο 0.

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(x^k)^{(\lambda)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-\lambda+1)x^{k-\lambda}, & \text{αν } \lambda \leq k \\ 0, & \text{αν } \lambda > k \end{cases}$$

και επομένως οι παράγωγοι στη θέση 0 της συνάρτησης $f(x) = x^k$ δίνονται από τη σχέση

$$f^{(\lambda)}(0) = \begin{cases} k!, & \text{αν } \lambda = k \\ 0, & \text{αν } \lambda \neq k. \end{cases}$$

Για το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + a_n x^n$ θα έχουμε επομένως

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} k! a_k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

όπου για λόγους ομοιομορφίας γράψαμε $0! = 1$ και $f^{(0)}(x) = f(x)$, δηλαδή θεωρήσαμε την $f(x)$ σαν «παράγωγο τάξης 0» του εαυτού της.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε για το πολυώνυμο $f(x)$ ότι:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin (Σκοτσέζος μαθηματικός του 18ου αιώνα) για την f.

Δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο για την τιμή $x = 0$. Αν γράψουμε

$$g(x) = f(x + x_0) = a_0 + a_1(x + x_0) + \cdots + a_n(x + x_0)^n$$

τότε η g είναι επίσης ένα πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το f και ο τύπος του Maclaurin για την g γίνεται:

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n,$$

δηλαδή

$$f(t + x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n$$

ή (γράφοντας $x = t + x_0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι γνωστός σαν τύπος του Taylor (Εγγλέζος μαθηματικός του 18ου αιώνα) για την f. Φυσικά ο τύπος του Maclaurin είναι η ειδική περίπτωση του τύπου του Taylor (για $x_0 = 0$).

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι είναι ορισμένη σε μια περιοχή $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $\alpha > 0$, ενός σημείου x_0 και ότι έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα αυτό. Δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι θα ισχύει γενικά ο τύπος του Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Πραγματικά το β' μέλος είναι πολυώνυμο ενώ το πρώτο μπορεί να μην είναι. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ για παράδειγμα, έχει παραγώγους κάθε τάξης αλλά δεν είναι πολυώνυμο. Όσο οφθαλμοφανής και να φαίνεται αυτός ο ισχυρισμός χρειάζεται απόδειξη. (Αν υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η e^x είναι πολυώνυμο βαθμού n, τότε θα πρέπει η $n+1$ τάξης παράγωγός της να είναι ταυτοτικά 0, το οποίο είναι φυσικά άτοπο).

Αντί να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια να γενικεύσουμε τον τύπο του Taylor για πολυώνυμα με αυτό τον τρόπο, γινόμαστε λιγότερο απαιτητικοί και εξετάζουμε μήπως το πολυώνυμο

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

«προσεγγίζει», τουλάχιστον για μικρά $|x - x_0|$, την $f(x)$, δηλαδή ψάχνουμε για «καλά» άνω φράγματα της παράστασης $|R_n(x)|$, όπου $R_n(x)$ το λεγόμενο *υπόλοιπο*, δηλαδή η παράσταση:

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Αυτό είναι πραγματικά δυνατό όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7.9.1 *Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια περιοχή του x_0 και έχει παράγωγο τάξης n συνεχή στο κλειστό διάστημα $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, και υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τότε υπάρχει αριθμός $\xi = \xi(x)$, $x_0 - \delta < \xi < x_0 + \delta$, ώστε*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

με

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Με άλλα λόγια, με τις προϋποθέσεις που αναφέραμε, ισχύει ο τύπος του *Taylor* με υπόλοιπο $R_n(x)$ που έχει τη λεγόμενη μορφή του Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\ (x - x_0)^{n+1}.$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη ας κάνουμε δυο απλές παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 7.9.2 Για $n = 0$ ο τύπος του Taylor παίρνει τη μορφή

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

δηλαδή ανάγεται στο γνωστό μας θεώρημα της μέσης τιμής.

Παρατήρηση 7.9.3 Αν υποθέσουμε επί πλέον ότι η $f^{n+1}(x)$ είναι φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δηλαδή, $|f^{n+1}(x)| \leq M$, τότε θα έχουμε

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

ή

$$R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1})$$

για $x \to x_0$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι για μεγάλα n η προσέγγιση της $f(x)$ με το πολυώνυμο

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

είναι πολύ καλή για x «κοντά στο x_0».

Παρατήρηση 7.9.4 Το υπόλοιπο $R_n(x)$ μπορεί να εκφραστεί και με άλλους τρόπους, για παράδειγμα να πάρει τη λεγόμενη ολοκληρωτική μορφή

$$R_n(x) = \int \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\, dt.$$

Άσκηση Δείξτε τον τελευταίο τύπο (υπόδειξη: ολοκληρώστε κατά μέρη n φορές).

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.9.1: Το υπόλοιπο $R_n(x)$ δίνεται εξ' ορισμού από τον τύπο:

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_0 < x$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} q(t) &= f(t) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(t - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t - x_0)^n \right) \\ &\quad + \frac{R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}}(t - x_0)^{n+1} \\ &= R_n(t) - \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}(t - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

για $x_0 \leq t < x$. Από τον ορισμό του R_n βλέπουμε εύκολα ότι

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

(με άλλα λόγια: το πολυώνυμο $f(x) - R_n(x)$ και οι n πρώτες παράγωγοι του συμπίπτουν στο x_0 με την f και τις n πρώτες παραγώγους της αντίστοιχα). Θα έχουμε λοιπόν μετά από μερικές απλές πράξεις:

$$q(x) = q(x_0) = q'(x_0) = \cdots = q^{(n)}(x_0) = 0$$

και

$$\begin{aligned} q^{(n+1)}(t) &= R_n^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

(πώς προκύπτει η τελευταία ισότητα;).

Το πρόβλημα μας τώρα είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x)$ ώστε

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

δηλαδή $q^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Αυτό προκύπτει εύκολα με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος του Rôlle (ελέγξτε ότι ισχύουν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις):

Από την $q(x) = q(x_0) = 0$ έπεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_0, x)$ ώστε $q'(\xi_1) = 0$, από την $q'(x_0) = q'(\xi_1) = 0$ έπεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \xi_1) \subseteq (x_0, x)$ ώστε $q''(\xi_2) = 0$ κ.ο.κ. Τελικά λοιπόν βρίσκουμε ένα $\xi = \xi_{n+1} \in (x_0, x)$ ώστε

$$q^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Παραδείγματα:

(i) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Προφανώς $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x.

Ας εκτιμήσουμε το υπόλοιπο R_n. Έχουμε:

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αν για παράδειγμα $x = 1$, και $n = 5$ τότε

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240},$$

δηλαδή το άθροισμα

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120} = 2{,}716$$

προσεγγίζει το e με σφάλμα μικρότερο από 0,01.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $R_n(x) \to 0$, καθώς $n \to \infty$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

Πραγματικά, ας γράψουμε $n_0 = 2[|x|]+2$ και ας υποθέσουμε $n \geq n_0$. Θα έχουμε:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{|x|}{2|x|}\right)^{n-n_0} = \left(\frac{2^{n_0}}{n_0!}|x|^{n_0}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

και το δεξιά μέλος τείνει στο μηδέν για $n \to \infty$. Φτάσαμε λοιπόν στο σημαντικό τύπο

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

τον οποίο γράφουμε συνήθως με τη μορφή $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ ή

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

και ονομάζουμε το δεξιά μέλος «σειρά *Maclaurin*» της συνάρτησης e^x.

(ii) Ζητείται ο υπολογισμός με προσέγγιση 1/100 του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx.$$

Είναι μάταιο να προσπαθήσουμε να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $(e^x-1)/x$ με την βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων (αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τέτοιος τύπος). Χρησιμοποιώντας όμως τον τύπο του Taylor έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)-1\right)\\ &= 1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\frac{R_n(x)}{x},\end{aligned}$$

όποτε

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{e^x-1}{x}\,dx &= \int_0^1 1\,dx+\frac{1}{2!}\int_0^1 x+\cdots\\ &\qquad \cdots+\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n-1}\,dx+\int_0^1\frac{R_n(x)}{x}\,dx\\ &= 1+\frac{1}{2!\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot n}+\int_0^1\frac{R_n(x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να διαλέξουμε το n ώστε το $\int_0^1 R_n(x)/x\,dx$ να είναι μικρότερο του $1/100$. Έχουμε δείξει ότι

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1},$$

άρα

$$\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} \leq \frac{e}{(n+1)!}\int_0^1 x^n dx = \frac{e}{(n+1)!(n+1)} \leq \frac{3}{(n+1)!(n+1)}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $n = 4$ ($\frac{3}{5!5} = \frac{3}{5\cdot 120} < \frac{1}{100}$) όποτε με προσέγγιση καλύτερη από $1/100$ θα έχουμε

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}dx \simeq 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 3} + \frac{1}{24\cdot 4}.$$

Άσκηση

(i) Βρείτε τον τύπο του Taylor για τις συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, και δείξτε ότι το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν για όλα τα x.

(ii) Υπολογίστε με προσέγγιση $1/100$ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Παρατήρηση 7.9.5 Ο όρος «σειρά» που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο παράδειγμα ορίζεται ως εξής: Αν α_n είναι μια ακολουθία, η β_n με

$$\beta_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

λέγεται σειρά και συμβολίζεται με

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Τα β_n λέγονται μερικά αθροίσματα της σειράς. Αν η β_n συγκλίνει στον αριθμό β τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει, ή έχει άθροισμα τον αριθμό β. Η θεωρία των σειρών είναι ένα από τα σημαντικότερα κεφαλαία του Απειροστικού Λογισμού, και θα μελετηθεί με λεπτομέρεια σε επόμενα μαθήματα.

· Απειροστικός Λογισμός Ι · Πρόχειρες Σημειώσεις · Στέλιος Πηχωρίδης ·
· Ηλεκτρονική έκδοση: Σάμος 2006 ·