

Ορισμένο ολοκλήρωμα

1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha . \int_0^1 (x-2)^5 dx$$

$$\beta . \int_{-2}^2 (|x| + |x-1|) dx$$

$$\gamma . \int_0^2 x e^{x^2} dx$$

$$\delta . \int_1^{2e} |\ln x - 1| dx$$

$$\varepsilon . \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$\sigma\tau . \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}} dx$$

$$\zeta . \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2+\ln x} dx$$

$$\eta . \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha . \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$\beta . \int_0^1 (3x^2 - 5x) e^x dx$$

$$\gamma . \int_{-1}^0 \frac{2x+3}{e^x} dx$$

$$\delta . \int_1^e (x^3 - 2x) \ln x dx$$

$$\varepsilon . \int_1^2 \ln x dx$$

$$\sigma\tau . \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\zeta . \int_0^\pi x \sin 3x dx$$

$$\eta . \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \eta\mu 2x dx$$

$$\theta . \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$\iota . \int_0^\pi e^x \eta\mu 2x dx$$

3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha . \int_1^2 \frac{1}{2x^2+3x-2} dx$$

$$\beta . \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+3x-2} dx$$

$$\gamma . \int_{-2}^0 \frac{3x+3}{x^3-1} dx$$

$$\delta . \int_1^2 \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2} dx$$

4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha . \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$\beta . \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\gamma . \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$\delta . \int_{\frac{3}{2}}^2 x(2x-3)^5 dx$$

$$\varepsilon . \int_{-1}^2 x \sqrt{x+2} dx$$

$$\sigma\tau . \int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\sqrt{\ln x})} dx$$

$$\zeta . \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\eta . \int_0^{\pi^2} \eta\mu \sqrt{x} dx$$

5. Να δειχθεί ότι: $\int_0^{2\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^\alpha f(x) dx$, αν $f(2\alpha-x)=f(x)$.

6. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu dx = \int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu dx$.

7. Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[-a, a]$ να αποδειχθεί ότι:

i) Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 0$

ii) Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 2 \int_0^\alpha f(x) dx$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^\pi f(\eta\mu x) dx = \int_0^\pi f(\sigma\upsilon\nu x) dx$

ii) $\int_0^\pi x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx$.

9. Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και $g(0)=e$. Αν $\int_0^1 [g(x) + g'(x)] e^x dx = 0$, να βρεθεί η τιμή της g στο $x_0=1$.

10. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύουν $f(a)=f(\beta)=g(a)=g(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι: $\int_a^\beta f''(x) \cdot g(x) dx = \int_a^\beta f(x) \cdot g''(x) dx$.

11. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a :

$$\alpha . \int_0^2 (3x+7) dx = a - 1$$

$$\beta . \int_1^\alpha e^{x^2} 2x dx = e^4 - e$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(x)+f(a+\beta-x)=c$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(x) dx = (\beta-a) f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-a}{2} [f(a) + f(\beta)].$$

13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)} dx = \frac{\beta-\alpha}{2}$

β. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[0, a]$ και:

$f(x)=f(a-x)$, $g(x)+g(a-x)=\beta$, για κάθε $x \in [0, a]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^a f(x)g(x) dx = \frac{\beta}{2} \int_0^a f(x) dx.$$

14. Να δειχθεί ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x + 2}{\eta\mu^2 x + 1} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\eta\mu^2 x + 1} dx = \frac{\pi}{4}.$

15. Να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $\int_1^{\kappa} \frac{x^2-4}{x^2+1} dx - \int_{\kappa}^1 \frac{5}{x^2+1} dx = 3.$

16. Αν $I_v = \int_0^1 x^v e^x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα I_v και I_{v-1} . Να υπολογισθεί το I_3 .

17. Αν $I_v = \int_1^2 (\ln x)^v dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να βρεθεί η σχέση που συνδέει το I_{v-1} και το I_v . Να υπολογισθεί το I_2 .

18. Έστω η συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x) > 0$ και f^{-1} , f' συνεχείς για κάθε $x \in [a, \beta]$, $a > 0$. Αν $f([a, \beta]) = [a^2, \beta^2]$, να δείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} f(x) dx + \int_{a^2}^{\beta^2} f^{-1}(x) dx = \beta^3 - a^3.$$

19. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και 1-1. Αν f' και f^{-1} είναι συνεχείς, να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\int_a^{\beta} f^{-1}(x) dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x) dx.$

20. Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση, με $a \geq 0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν είναι γνωστό ότι f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι

$$2 \int_a^{\beta} x f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} (f^{-1})^2(x) dx = \beta^2 f(\beta) - a^2 f(a).$$

21. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $af(x) + \beta f(-x) = \gamma$ με $a + \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{4\gamma}{a+\beta}.$

22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(x) + f(1-x) = x - x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{12}.$

23. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1.$

24. i. Έστω συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν ισχύει η σχέση $\int_a^{\beta} g^2(x) dx = 0$, να αποδείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ii. Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 8 \int_0^1 f(x) dx - 16 \quad \text{Να βρείτε τον τύπο της } f. \quad (\text{Αν. } f(x) = 4)$$

25. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx.$

$$(\text{Αν. } f(x) = e^x + 2)$$

26. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = \int_0^1 f(x) dx$. Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

$$(\text{Αν. } f(x) = 2x + 1)$$

27. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = e^x - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$(\text{Αν. } f(x) = e^x - 1)$$

28. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=1$ και $f'(x) = \int_0^1 f(x)dx - f(x)$.
(Απ. $f(x)=1$)

29. Δίνεται συνεχής $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ ώστε $\int_1^3 f(x)dx = 2f(1)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (1,3)$: $f'(x_0)=0$

30. Δίνεται η ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $e^x f(x) + e^x f'(x) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1)=1$. Να δειχθεί ότι $\int_0^1 f(x)dx = 1 + e - (1+e)\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

31. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,a]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $\int_0^a x f''(x)dx = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,a)$, τέτοιο ώστε να είναι $f'(x_0) = f'(a)$.

32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και ισχύει $\int_1^e f(x)dx = e$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1+\ln x_0$.

33. Έστω συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(0)=0$, $f(1)=3$ και $f'(x) > 2$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 2$

34. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=f(x)+f(4010-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ι. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ι. Να δείξετε ότι $\int_{2004}^{2006} f(x)dx > 2f(2005)$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

β. $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{1+e}$, για κάθε $x \in [0,1]$

γ. $\sqrt{2} \leq \int_0^1 f(x)dx < \sqrt{1+e}$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)$. Να δείξετε ότι:

α. $f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{3}$.

37. Έστω $f: [1,e] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν $f(x) \geq \frac{1}{x} + 1$, για κάθε $x \in [1,e]$ και $\int_1^e f(x)dx = e$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
(Απ. $f(x) = \frac{1}{x} + 1$)

38. Έστω $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{4}{3} < \int_0^2 f(x)dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{f(x)}dx < 12$.

39. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι θετική και συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx > \int_1^2 x f(x)dx.$$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx > \frac{3e}{2}$